www.laisac.page.tl

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Trần Xuân Bang

Trong các đề thi tốt nghiệp THPT và Tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng thường có các bài toán tích phân. Bài viết này xin được chuyển đến các bạn đọc chuẩn bị thi vào các trường Đại học và Cao đẳng một hệ thống các phương pháp tính tích phân mà tôi tích luỹ được và sắp xếp theo một cách riêng mình, một số bất đẳng thức tích phân và một số áp dụng tích phân tính diện tích và thể tích.

1. Tính trực tiếp nguyên hàm rồi áp dụng công thức Niutơn- Lépnit.

Tính trực tiếp nguyên hàm có một thuận lợi khi ta không phải để ý đến tập xác định của hàm dưới dấu tích phân.

VD1. Tính $I=\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}, n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.   (ĐH Thái Nguyên - A 2000)

Biến đổi sau $I=\int_0^1 \frac{dx}{x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}}}$ là không chấp nhận được.

Nhưng nếu đặt $I(x)=\int \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}$ thì các biến đổi sau là hợp lý và cho phép được:

$$I(x)=\int \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}=\int \frac{dx}{x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)x\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}}}=\int \frac{x^{-n-1}}{\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{1+\frac{1}{n}}}dx=\int\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}}x^{-n-1}dx$$

$$=-\frac{1}{n}\int\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}}d\left(1+\frac{1}{x^n}\right)=\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{1}{n}}+C=\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}+C.$$

Suy ra $I(x)=\int \frac{dx}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}=\left.\frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}}\right|_0^1=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

Nhưng do chương trình không dùng hàm số ngược, nên một số nguyên hàm không thể tính được.

VD2. Tính $I(x)=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$

Đặt $x=a\sin t \Rightarrow dx=a\cos t dt$

$$\Rightarrow I(x)=\int \frac{a\cos t dt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\int \frac{dt}{\text{cost}}=\int \frac{\text{cost}dt}{1-\sin^2 \text{t}}=\int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin \text{t})(1+\text{sint})}$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)d(\sin t) = \frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 t)+C$$

Một quá trình thật đẹp, tiếc rằng không rút được t theo x để có nguyên hàm biến x.

2. Áp dụng một tính chất của nguyên hàm.

Nguyên hàm có tính chất:

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$ (1)

Đặc biệt: Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$

<u>Ví dụ 1:</u> Tính $I = \int_1^2 \frac{(1+x)^{2006}}{x^{2008}}dx$.

Ta có: $I = -\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2006} d\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2007}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2007}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2007}\left(2^{2007} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2007}\right)$

<u>Ví dụ 2:</u> Tính $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x\left(\ln^2 x + 1\right)}dx$. (ĐH Cần Thơ - B1999)

Ta có: $I = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{d(\ln^2 x + 1)}{\ln^2 x + 1} = \frac{1}{2}\ln(\ln^2 x + 1)\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \ln\sqrt{2}$.

<u>Ví dụ 3:</u> Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1+\sin 2x}.dx$, (ĐH,CĐ - B2003)

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1+\sin 2x)}{1+\sin 2x} = \frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}$

3. Phương pháp đổi biến.

3.1. Phép đổi biến "trông thấy" $\varphi(x), \varphi'(x)$:

Tính $I = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, $\varphi(x)$ liên tục và đơn điệu trên [a; b].

Ở đây ta "nhìn thấy" cả $\varphi(x)$ và $\varphi'(x)$

Đặt $\varphi(x) = t$, khi đó: $I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$.

<u>Ví dụ 1:</u> Tính $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

Ta có: $I = \int_0^1 (x - \frac{x}{x^2+1}dx = = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

<u>Ví dụ 2:</u> Tính $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$, (ĐH,CĐ - TK2 - 2002)

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow I = \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \int_2^4 t^{-\frac{3}{2}} dt = -2\frac{1}{\sqrt{t}}\Big|_2^4 = \sqrt{2} - 1$.

<u>Ví dụ 3:</u> Tính $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x}.\ln x}{x} dx$.

Đặt $t = 1 + \ln^2 x \Rightarrow dt = \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

Thực ra các tích phân như thế không cần đổi biến mà chỉ cần áp dụng (1) vì

$$I = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = I = \int_a^b f(\varphi(x))d(\varphi(x)).$$

<u>Ví dụ:</u>

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1}dx = \int_0^1 (x - \frac{x}{x^2 + 1}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}} = \int_0^{\ln 3} \frac{d(e^x + 1)}{\sqrt{(e^x + 1)^3}} = \int_0^{\ln 3} (e^x + 1)^{-\frac{3}{2}} d(e^x + 1) = -2(e^x + 1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^{\ln 3} = \sqrt{2} - 1$$

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x}.\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{1 + \ln^2 x}.d(1 + \ln^2 x)$$

$$= \frac{1}{3}(1 + \ln^2 x)\sqrt{1 + \ln^2 x}\Big|_1^e = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

3.2. Phép đổi biến "không trông thấy" $\varphi(x, \varphi'(x)$.

Tính $I = \int_a^b f(x)dx$.

Đặt $\varphi(x) = t$, $\varphi(x)$ liên tục và đơn điệu trên [a; b], khi đó: $I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$.

<u>Ví dụ 1:</u> ***(Tích phân cơ bản)***

$$\text{Tính } I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.dx, (a > 0). \qquad \text{(I)}$$

Đặt: $x + \sqrt{a^2 + x^2} = t \Rightarrow (1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}})dx = dt \Rightarrow \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx = dt$

$$\Rightarrow \frac{t}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó: $I = \int\limits_{a}^{a(1+\sqrt{2})} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{a}^{a(1+\sqrt{2})} = \ln(1+\sqrt{2})$

*** Chú ý:** Tích phân này có thể đổi biến $x = tant$

<u>Ví dụ 2:</u> (Tích phân cơ bản)

Tính $I = \int\limits_{\sqrt{2}a}^{2a} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}.dx$, $(a > 0)$. (II)

Tương tự VD6, đặt: $x + \sqrt{x^2 - a^2} = t$

*** Chú ý:** Tích phân này có thể đổi biến $x = \frac{a}{\cos t}$

<u>Ví dụ 3:</u> Tính $I = \int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$, (ĐH,CĐ - A2003)

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4}$. Suy ra $I = \int\limits_{3}^{4} \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4}\int\limits_{3}^{4}\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt = \frac{1}{4}\ln\frac{t-2}{t+2}\Big|_{3}^{4} = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$

<u>Ví dụ 4:</u> Tính $I = \int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{1 - x^2}dx$, (ĐH,CĐ- TK2- A2003)

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{1} t^2(1 - t^2)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{15}$.

- Tích phân này có nhiều cách tính:

<u>Cách 2:</u> Đặt $t = 1 - x^2$

<u>Cách 3:</u> Đặt $t = x^2$

<u>Cách 4:</u> Đặt $x = \cos t \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^3 t dt$.

Cách 4.1. Đặt $\sin t = u \Rightarrow \cos t dt = du \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{1} u^2(1 - u^2)du$

Cách 4.2. $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t(1 - \sin^2 t)d(\sin t)$.

Cách 4.3. $I = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t.\cos t dt = \frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2}\cos t dt = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t.\cos t dt$

<u>Cách 5:</u> $I = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} (1 - x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}d(1 - x^2) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}d(1 - x^2) - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}d(1 - x^2)$

Ví dụ 5: Tính I = $\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}.dx$, (ĐH,CĐ - A2004)

Đặt: t = 1 + $\sqrt{x-1} \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 2}{t}.2(t - 1)dt = \frac{11}{3} - 4\ln 2$

Ví dụ 6: Tính I = $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3\ln x}.\ln x}{x}dx$. (ĐH,CĐ - B2004)

Đặt t = $\sqrt{1 + 3\ln x}$. Ta có: I = $\frac{2}{3}\int_1^2 \frac{t^2 - 1}{3}t^2dt = \frac{2}{9}\int_1^2 (t^4 - t^2)dt = \frac{116}{135}$

Ví dụ 7: Tính I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}}.dx$, (ĐH,CĐ - A2005)

Đặt t = $\sqrt{1 + 3\cos x} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}}.dx = \frac{2}{9}\int_1^2 (2t^2 + 1)dt = \frac{34}{27}$

3.3. Phép đổi biến $x = \varphi(t)$:

Tính I $= \int_a^b f(x)dx$.

đặt x = $\varphi(t)$. Suy ra I $= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. $\varphi(t)$ liên tục và đơn diệu trên $[\alpha; \beta]$

Ví dụ 1: ***(Tích phân cơ bản)***

Tính I = $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.dx$, (a > 0). (III)

Đặt $x = a\sin t$

Ví dụ 2: ***(Tích phân cơ bản)***

Tính I = $\int_0^a \frac{1}{x^2 + a^2}.dx$, (a > 0). (IV)

Đặt $x = a\tan t$

Ví dụ 3: ***(Tích phân cơ bản)***

Tính I = $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}.dx$, (a > 0). (V)

Đặt x = $a\sin t$

Ví dụ 4: ***(Tích phân cơ bản)***

Tính I = $\int_0^a \sqrt{a^2 + x^2}.dx$, (a > 0) (VI)

Đặt x = $a\tan t$

Ví dụ 5: ***(Tích phân cơ bản)***

Tính $I = \int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2}.dx$, (a > 0). (VII)

Cách 1. Đặt $x = \frac{a}{cost}$

*** Chú ý:** Có thể đặt $\sqrt{x^2 - a^2} = t \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = dt$

$\Rightarrow xdx = \sqrt{x^2 - a^2}dt = tdt$

$\Rightarrow dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + a^2}} \Rightarrow I = \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{(t^2 + a^2 - a^2)dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} =$

$= \int_0^{a\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + a^2}dx - \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{a^2dt}{\sqrt{t^2 + a^2}}$ (Xem (I) và (VI))

Có thể biến đổi:

$$I = \int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2}.dx = \int_a^{2a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.dx = \int_a^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.dx - \int_a^{2a} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.dx$$

Trong đó $\int_a^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.dx = \int_a^{2a} xd\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)$

còn $\int_a^{2a} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}.dx$ xem dạng III.

<u>**Ví dụ 6:**</u> Tính $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}dx$,

Đặãn = sint $\Rightarrow$ costdt = dx $\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

4. Đổi biến về tích phân ban đầu hoặc về một tích phân có tổng với tích phân ban đầu là một tích phân tính được.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Tính $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x}.dx$

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 4(\pi - t)}{1 + \cos^2 t}.dx = -\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}.dx = -I$

$\Rightarrow I = 0.$

<u>**Ví dụ 2:**</u> Tính $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}.dx$

Đặt x = π - t ⇒ $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}.dx \quad = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.dx \quad - I$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}.dx$.

Đặt cosx = t ⇒ $I = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1 + t^2} \quad = \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

<u>Ví dụ 3:</u> Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x.dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$ (ĐH Huế - A2000)

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$. Suy ra: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 t.dt}{\sin^6 t + \cos^6 t} \quad \Rightarrow 2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \quad = \frac{\pi}{2}$

5. Phương pháp tích phân từng phần.

5.1. Tích phân từng phần một lần.

<u>Ví dụ 1:</u> Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x}.dx$,(ĐH,CĐ - TK1- A2003)

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x}.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(tgx) = \frac{1}{2}\left(xtgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$

<u>Ví dụ 2:</u> Tính $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x - 1}}$, (ĐH,CĐ - TK1- B2003)

Ta có: $I = 2\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x d(\sqrt{e^x - 1}) = 2e^x\sqrt{e^x - 1}\Big|_{\ln 2}^{\ln 5} - 2\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x\sqrt{e^x - 1}.dx$

$= 16 - 2\int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1}.d(e^x - 1) = 16 - \frac{4}{3}(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1}\Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{20}{3}$

<u>Ví dụ 3:</u> Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ln(\sin x)dx$

Ta có $I = \sin x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - (\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\ln\sqrt{2}\right)-1$$

Ví dụ 4: Tính I = $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$

Ta có $I = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}e\sqrt{e} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^e = \frac{2}{3}$

5.2. Tích phân từng phần nhiều lần.

Ví dụ 1: Tính I = $\int_0^1 x^2\sin^2\pi x.dx$

Ta có $I = \int_0^1 x^2.\frac{1-\cos 2\pi x}{2}.dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cos 2\pi x.dx$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d(\sin 2\pi x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi}\left(x^2\sin 2\pi x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\sin 2\pi x.dx \right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\cos 2\pi x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}\left(x\cos 2\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos 2\pi x dx \right)$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{8\pi^3}\sin(2\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}$$

Ví dụ 2: Tính I = $\int_0^1 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2tdt$

Suy ra $I = 2\int_0^1 t^2e^tdt = 2\left(t^2e^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 te^tdt \right) = 2e - 4\left(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^tdt \right) = 2(e-2)$.

5.3. Tích phân từng phần làm xuất hiện tích phân ban đầu.

VD1: $I = \int_0^\pi \cos^3x.\cos 3x.dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi \cos^3x d(\sin 3x)$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos^3x.\sin 3x\Big|_0^\pi + 3\int_0^\pi \cos^2x.\sin x.\sin 3x.dx \right) = \int_0^\pi \cos^2x.\sin x.\sin 3x.dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2x(\cos 2x - \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2x.\cos 2xdx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2x.\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1+\cos 2x)\cos 2xdx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2x(\cos 3x.\cos x - \sin 3x.\sin x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1+\cos 2x)\cos 2x.dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^3x.\cos 3x.dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2x.\sin x.\sin 3x.dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos2x)\cos2x.dx \ - \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos2x.dx \ + \frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos4x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\sin2x\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{32}\sin8x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

<u>Ví dụ 2:</u> $I = \int_0^1 e^x\sin^2\pi x.dx$,

Ta có: $I = \int_0^1 \sin^2\pi x.de^x = e^x\sin^2\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 2\pi\sin\pi x.\cos\pi x.e^x dx = -\pi\int_0^1 \sin2\pi x.de^x$

$$J = \int_0^1 \sin2\pi x.de^x \ = e^x\sin2\pi x\Big|_0^1 - 2\pi\int_0^1\cos2\pi x.de^x \ = -2\pi e^x\cos2\pi x\Big|_0^1 - 4\pi^2\int_0^1 e^x\sin2x.dx$$

$$= -2\pi(e-1) - 4\pi^2 J$$

$$\Rightarrow J = \frac{2\pi(1-e)}{1+4\pi^2} \ \Rightarrow I = \frac{2\pi^2(e-1)}{1+4\pi^2}$$

<u>Ví dụ 3:</u> $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos^2(\ln x)dx$.

Ta có: $I = \frac{1}{2}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}(1+\cos(2\ln x))dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) + \frac{1}{2}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx$

Đặt $J = \frac{1}{2}\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx \ = \frac{1}{2}x\cos(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\sin(2\ln x)dx$

$$= -\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) + x\sin(2\ln x)\Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - 2\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}}\cos(2\ln x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) - 4J.$$

Suy ra: $J = -\frac{1}{10}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) \ \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - \frac{1}{10}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) = \frac{1}{5}(2e^{\frac{\pi}{2}} - 3)$

5.4. Tích phân từng phần làm xuất hiện một tích phân triệt tiêu một tích phân.

<u>Ví dụ 1:</u> Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)e^x}{1+\cos x}.dx$, (ĐH Dược HN - A2000)

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}.dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}.dx \ = \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x d(\text{tg}\frac{x}{2}) + \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\text{tg}\frac{x}{2}.dx$

$$= e^x tg\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x tg\frac{x}{2}.dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x tg\frac{x}{2}.dx = e^x tg\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx$,

Ta có:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}.dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx = xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx$$

$$= 2e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\Big| - \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}.dx = 2e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}e\sqrt{e}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$,

Ta có:

$$I = \int_0^1\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)e^x dx = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}\Big|_0^1 + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{e^x dx}{(1+x)^2} - \int_0^1 \frac{e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e}{2} - 1.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{e} \frac{1+x\ln x}{x}e^x dx$.

Ta có $I = \int_{\frac{1}{2}}^{e} \frac{1}{x}e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{e} e^x \ln x dx = e^x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}e^x dx + \int_1^e \frac{1}{x}e^x dx = e^e$

6. Biến đổi thành tổng:

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.dx}{\sin x + \cos x}$

Ta có $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x).dx}{\sin x + \cos x}$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x.\sin(x + \frac{\pi}{6})}$

Ta có I = $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\text{cotx - cotg(x + }\frac{\pi}{6}\text{)}\right]dx \quad = 2\ln\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{6})}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2(2\ln\sqrt{3} - \ln 2)$

<u>Ví dụ 3:</u> Tính I = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin^2x.\cos^2x}$

Ta có I = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\right)dx$

<u>Ví dụ 4:</u> Tính I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sinxcos3xdx}$

Ta có I = $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{sin4x - sin2x})dx$

<u>Ví dụ 5:</u> Tính I = $\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

Ta có I = $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

7. Tính đồng thời hai tích phân.

Để tính I = $\int_a^b f(x)dx$, ta "huy động thêm" J = $\int_a^b g(x)dx$ sao cho I + J và I - J đều tính được hoặc đổi biến thích hợp để có I = $\int_a^b g(x)dx$.

<u>Ví dụ 1:</u> Tính I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sinx.dx}}{\text{sinx + cosx}}$

Gọi J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{cosx.dx}}{\text{sinx + cosx}}$. Ta có I + J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{(sinx + cosx)dx}}{\text{sinx + cosx}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{\pi}{2}$

I - J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{(sinx - cosx)dx}}{\text{sinx + cosx}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{d(sinx - cosx)}}{\text{sinx + cosx}} = -\ln(\text{sinx + cosx})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$

<u>Ví dụ 2:</u> Tính I = $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos^2 x dx$

Gọi J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x dx$

I + J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$

I - J = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin 2x) = \left.\frac{1}{2}x\sin 2x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left.\frac{1}{4}\cos 2x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$

Suy ra I = $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2 - 4}{32}$

8. Áp dụng trực tiếp cách chứng minh một số kết quả tích phân.

8.1. Nếu f(x) là hàm số lẻ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Nếu f(x) là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Chứng minh ở đây là: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.

Đặt t = - x. Khi đó: $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$, nếu f(x) là hàm số lẻ.

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$, nếu f(x) là hàm số chẵn.

__**Ví dụ:**__ Tính I = $\int_{-1}^{1}\left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]^3 dx$.

Ta có: I = $\int_{-1}^{0}\left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]^3 dx + \int_0^1\left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]^3 dx$ (1)

Đặt t = - x. Khi đó $\int_{-1}^{0}\left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]^3 dx = \int_0^1\left[\ln(-t + \sqrt{1 + t^2})\right]^3 dt$

$= \int_0^1\left[\ln\frac{1}{t + \sqrt{1 + t^2}})\right]^3 dt = \int_0^1\left[-\ln(t + \sqrt{1 + t^2})\right]^3 dt = -\int_0^1\left[\ln(-x + \sqrt{1 + x^2})\right]^3 dt$

Thay vào (1) ta có: I = $\int_{-1}^{1}\left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2})\right]^3 dx = 0$.

• Để ý rằng ở đây đã áp dụng trực tiếp cách chứng minh mà không phải trải qua hai bước: Chứng minh tính chất, chứng minh hàm dưới dấu tích phân là chẵn hay lẻ rồi áp dụng kết quả(như thế lời giải sẽ dài dòng).

8.2. Nếu f(x) là hàm số chẵn thì $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{a^x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$.

Chứng minh ở đây là: Đặt t = - x. Khi đó:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{a^x+1}dx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(t)}{a^{-t}+1}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{a^t f(t)}{a^t+1}dt = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{1}{a^t+1}\right)f(t)dt =$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx - \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{a^x+1}dx \Rightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{a^x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$$

__Ví dụ :__ Tính $I = \int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx$, (HVCNBCVT - A1999)

Đặt x = - t. Ta có: $\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx = \int_{-1}^{1}\frac{t^4}{2^{-t}+1}dt = \int_{-1}^{1}\frac{2^t t^4}{2^t+1}dt = \int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{2^t+1}\right)t^4dt =$

$$= \int_{-1}^{1}f(t)dt - \int_{-1}^{1}\frac{t^4}{2^t+1}dt \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx = \frac{1}{10}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{5}.$$

• Ở đây ta cũng có một chú ý tương tự chú ý ở ***6.1***.

9. Áp dụng trực tiếp một tích phân lượng giác.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a^2\sin^2x + b^2\cos^2x}, \ (a^2+b^2>0)$$

i) a = 0 : Tích phân cơ bản.

ii) b = 0: Tích phân cơ bản.

3i) ab $\neq$ 0: $I = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{b^2\cos^2x\left(\frac{a^2}{b^2}tg^2x+1\right)}$.

Đặt $t = \frac{a}{b}tgx$, suy ra $I = \frac{1}{ab}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{dt}{t^2+1}$

__Ví dụ:__ Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2-\cos^2x}$, (ĐHY Thái Bình - 2000)

Ta có: $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\sin^2x+\cos^2x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2x(2tg^2x+1)}$

Đặt $t = \sqrt{2}tgx \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+1}$

10. Nắm vững cách tính tích phân các hàm số phân thức hữu tỉ.

10.1. $I = \int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(ax+b)^n}; n \in \mathbb{N}$.

10.2. $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(cx+d)^m(ax+b)^n}$; m, n $\in \mathbb{N}$.

10.3. $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

với ba trường hợp $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

10.4. $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k(mx^2+nx+p)^l}$; k, l $\in \mathbb{N}$.

10.5. $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(ax+b)^k(mx^2+nx+p)^l}$; k, l $\in \mathbb{N}$.

10.6. $I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)dx}{Q(x)}$; P(x) và Q(x) là các đa thức.

11. Nắm vững cách tính nguyên hàm của một số hàm lượng giác thường gặp.

11.1. $I = \int \sin^2 x dx$;

11.2. $I = \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x)$;

11.3. $I = \int \sin^4 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) dx$;

11.4. $I = \int \sin^5 x dx = -\int \sin^4 x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x)$

11.5. $I = \int \frac{dx}{\sin x}$;

11.6. $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)^2}$;

11.7. $I = \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int (1+\cot^2 x) d(\cot x)$;

11.8. $I = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{\sin x dx}{\left(1-\cos^2 x\right)^3}$;

11.9. $I = \int \tan x dx$;

11.10. $I = \int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int d(\tan x) = \int dx$;

11.11. $I = \int (1+\tan^2 x - 1)\tan x dx = \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx$

11.12. $I = \int \tan^4 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1)\tan^2 x dx = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \tan^2 x dx$

11.13. $I = \int \tan^5 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1)\tan^3 x dx = \int \tan^3 x d(\tan x) - \int \tan^3 x dx$

* **Chú ý :** Các kết quả tương tự sinx cho **cosx** và tanx cho **cotx**.

Đối với các tích phân hàm số lượng giác cần chú ý biến đổi lượng giác.

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{1}{1+\cos x} dx = \int \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int d(\tan \frac{x}{2})$

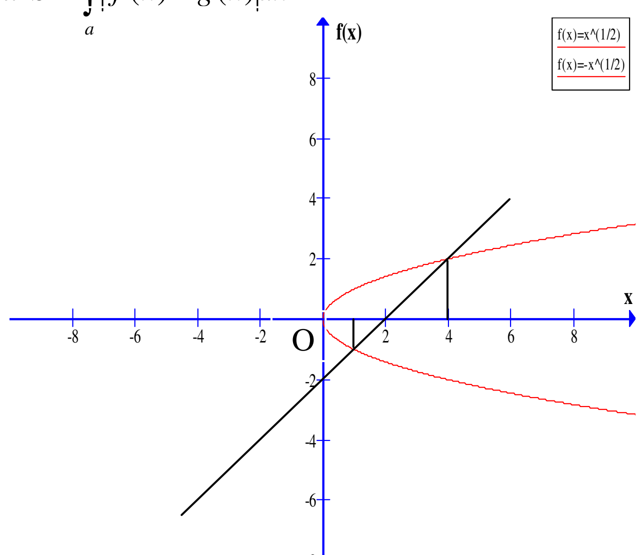
Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}$

11. Nắm vững cách tính diện tích hình phẳng và cách tính thể tích vật thể tròn xoay.

11.1. Tính diện tích hình phẳng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b > a \end{cases} \quad \text{là } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



VD. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases}$

HD. Toạ độ giao điểm $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ x^2 - 4x + 4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

Toạ độ hai giao đểm (1;- 1) và (4; 2).
Suy ra diện tích hình phẳng:

Cách 1: $S = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 + (\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_1^4$

$$= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 8 + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{9}{2}$$

Cách 2: $S = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)dy = (\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$

11.2. T ính thể tích vật thể tròn xoay.

i) Vật thể tròn xoay được tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b > a \end{cases}$ xung quanh trục hoành là $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

ii) Vật thể tròn xoay được tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

$\begin{cases} x = g(y) \\ x = 0 \\ y = a \\ y = b > a \end{cases}$ xung quanh trục hoành là $V = \pi\int_a^b g^2(y)dy$

3i) Vật thể bất kỳ có diện tích thiết diện thẳng vuông góc Ox là S(x) và bị giới hạn bởi các mặt phẳng x = a, x = b(a < b):

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

VD. Cho một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h. Cắt hình trụ bằng một mặt phẳng nghiêng với đáy một góc 45^0 và đi qua đường kính AB. Tính thể tích của các phần hình trụ bị cắt ra từ hình trụ.

HD. Gọi V là thể tích phần hình trụ ABNFEMCH.

Đặt OI = x(x > 0) $\Rightarrow MN = 2MI = 2\sqrt{R^2 - x^2}$.

IK = IO = x.

Thiết diện là hình chử nhật MNFE;

Ta có diện tích thiết diện là:

$$S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$$