

هذا العمل وقف لله تعالى لا يجوز بيعه أو الاتجار به، وهو حق لكل مسلم ومسلمة وطالب وطالبة علم

المذكرة الشارحة لكامل المقرر الجامعي

بحوث العمليات

(PAD 351)

القسم العملي للمقرر الجامعي

شرح لكامل عمليات المقرر الجامعي وفق ترتيب الدورة التأهيلية
التي قدمها سعادة الدكتور محمد توفيق الإدريسي في الفترة (١٠-٢١ / ٥ / ١٤٣١ هـ)

كافة شروحات وحلول مسائل بحوث العمليات في هذه المذكرة متطابقة
تماماً مع أنماط وأساليب الحل التي يقدمها ويدرسها الدكتور محمد الإدريسي

إعداد وشرح: حسان علي الطيار

(KsaUvi@GMail.Com)

١٤٣١ هـ / ٢٠١٠ م



سبحانك اللهم لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم

اللهم افتح لنا أبواب رحمتك وهب لنا من أمرنا رشداً

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً وأنت تجعل الحزن إن شئت سهلاً

سهل اللهم علي فهم وحفظ واستدراك هذا المقرر بقدرتك ورحمتك إنك على كل شيء قدير

سَمَّ الله وأقرأ فاتحة الكتاب على نية التيسير وتوكل على الله

فهرس

الصفحة

الموضوع

٥٠	الفصل الأول: القرارات الإدارية وتأثير الاحتمالات عليها
١٧	الفصل الثاني: شجرة القرارات والمباريات
٢١	الفصل الثالث: نماذج البرمجة الخطية
٢٢	• الرسم البياني
٣٨	• الطريقة المبسطة سمبلكس Simplex
٧٩	• ملخص لقواعد وقوانين سمبلكس
٨١	• طرق مبسطة مقترحة للحل بطريقة سمبلكس
٨٢	الفصل الرابع: مشاكل النقل والتخصيص – طرق الحل المختلفة
٨٢	• النقل
١٠٣	• التخصيص
١٢٠	الفصل الخامس: إدارة شبكات المشاريع والتخطيط والتحكم
١٢٣	• قوانين (الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة)
١٣٥	• الإسراع
١٤٣	• طريقة بيرت (PERT)
١٤٧	طريقة استخدام الآلة الحاسبة CASIO FX-991ES

إن زيادة عدد صفحات هذه المذكرة وكبر حجمها يعود للأسباب التالية

١. إحتواء المذكرة على عدد كبير من المسائل المحولة والمشروحة والتي سوف تساعد على الفهم الكامل للمادة العلمية.
٢. حل كافة المسائل بشرح مفصل ودقيق لعدم تعريض القارئ والقارئة إلى أي لبس قد يحدث ولإيصال المعلومة لهم بسهولة وتدرج.

يعتمد إتقانك لبحوث العمليات ونجاحك في إختباراتها على

الإكثار من حل المسائل لكل درس من دروس المقرر الجامعي

صورة غلاف الكتاب المقرر من الجامعة والواجب العودة له في ذلك



الفصل الأول: القرارات الإدارية وتأثير الاحتمالات عليها

(الفصل السادس حسب ترتيب الكتاب المقرر)

أولاً الحالات المختلفة لعملية اتخاذ القرار.

هناك ثلاث حالات متاحة، ويمكن اعتبارها في عملية اتخاذ القرار الإداري، وذلك طبقاً لتوفر المعلومات أو البيانات التي تحكم متغيرات حالة الطبيعة، وهي:

١. حالة التأكد.

٢. حالة عدم التأكد.

٣. حالة المخاطرة

أولاً: اتخاذ القرار الإداري في حالة التأكد.

وتعني أن الحدث سيكون مؤكداً حدوثه ولهذا فإن متخذ القرار أمامه حالة طبيعية واضحة وسوف تحدث في المستقبل بكل تأكيد. وقد تكون من واقع خبرة سابقة. إلا أنه لا يمكن ضمان حدوث هذه الحالة بكامل التأكد مستقبلاً حتى ولو تم الحصول على معلومات كاملة عن المستقبل. إنما يفترض حدوث الطبيعة بنسبة ١٠٠٪. وحيث أن حالة الطبيعة هي حالة واحدة فليس أمام متخذ القرار سوى المفاضلة بين الخيارات المتوفرة، وعليه يتم إختيار البديل الذي يعطي أفضل عائد بين تلك البدائل. ومثال ذلك، المفاضلة بين السفر بالطائرة والسيارة والقطار، فنجد هنا أن المتوفر هو معلومة واحدة كأسعار التذاكر والتكلفة (محددة) والمدة الزمنية للمسافة (محددة) والراحة بين كل خيار وآخر (محدد). ولذا يسمى ذلك "حالة الطبيعة".

ثانياً: اتخاذ القرار الإداري في حالة عدم التأكد.

وتعني أن أمام متخذ القرار أكثر من حالة طبيعية إلا أنه لا يوجد أي معلومات أو بيانات تحدد أي من هذه الحالات ستحدث أو معرفة احتمالات حدوث أي منهم. وعند غياب المعلومات عن الاحتمالات المستقبلية تسمى هذه الحالة "حالة عدم التأكد". ولها عدة طرق معينة لتحليلها. وعدة قواعد يمكن استخدامها للمفاضلة بين البدائل والمساعدة في اتخاذ القرار السليم وهي:

١) قاعدة لابلاس Laplas Principle (التوزيع المتساوي).

٢) قاعدة أقصى الأقصى (التفاؤل).

٣) قاعدة أقصى الأدنى (التشاؤم).

٤) قاعدة هوروتس Hurwics.

٥) قاعدة الأسف والندم (أدنى أقصى الأسف).

١) قاعدة لابلاس Laplas Principle (التوزيع المتساوي).

ويمكن تسميتها بصيغة الأسباب غير الكافية (Principle of Insufficient Reason) وهي تعتمد على فرضية العشوائية والتي تنص على أنه في حالة غياب احتمالات حدوث الأحداث المستقبلية فإن يمكن القول أن احتمالات حدوث أي حدث منها متساوي مع الاحتمالات الأخرى، أي أن جميع حالات الطبيعة واحدة. وعلى ذلك فإنه لا بد من تقييم كل بديل والعائد منه.

فلو كان لدينا أربع حالات فإن نسبة حدوثها مجتمعة هي (١٠٠٪) أي أن نسبة حدوث كل حالة ستكون (٢٥٪) دون أن يكون لأي منها زيادة أو نقص. فإن كانت خمس فسيكون نسبة حدوث أي منها (٢٠٪) وإن كانت اثنتان فسيكون نسبة حدوث أي منها (٥٠٪) أي أنه لا تفضيل بين أي حالة وأخرى.

مثال (١): لدينا المعلومات التالية والتي تمثل عائد البدائل المختلفة لمشروع ما.

والمطلوب: تطبيق قاعدة لابلاس لتحديد القرار المناسب. مع العلم بأن (ح): إحتمال حالة طبيعة. و(ب): بديل متوفر.

البدائل/الإحتمالات	ح ١	ح ٢	ح ٣
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

الحل: بالنظر للمعطيات سنجد أننا أمام ثلاث حالات (إحتمالات) للطبيعة، أي ثلاث (٣) معطيات متساوية في نسبة حدوثها. وأننا أمام أربع اختيارات (بدائل) يجب المفاضلة بينها. فيكون الحل هو بقسمة مجموع الحالات (ح ١ + ح ٢ + ح ٣) على عدد الأحداث (٣) لكل بديل.

البدائل/الإحتمالات	عدد الأحداث = ٣	قيمة البديل
ب ١	$3 \div (300 + 200 + 100) = 3 \div 600$	٢٠٠
ب ٢	$3 \div (600 + 150 + 300-) = 3 \div 1050$	١٥٠
ب ٣	$3 \div (400 + 200 + 130) = 3 \div 730$	٢٤٣
ب ٤	$3 \div (200 + 300 + 160) = 3 \div 660$	٢٢٠

إذاً فأفضل بديل هو أعلى رقم بين القيم، وهو البديل (ب ٣) لأن قيمته (٢٤٣) هي الأعلى.

قاعدة: حسب قاعدة لابلاس فإننا نأخذ متوسط كل بديل على حدة ثم يتم اختيار أعلى نتيجة في حالة العائدات أو أقل نتيجة في حالة التكاليف.

(٢) قاعدة أقصى الأقصى (التفاؤل).

هي من القواعد السهلة الاستخدام، والطبقة دائماً في عمليات اتخاذ القرارات الإدارية في حالة عدم التأكد، وهي من القواعد التي لا تهتم بالأحداث أو قيم إحتمالات الأحداث، ولكن ينظر متخذ القرار هنا إلى نتائج الأحداث. ولذا فإن هذه القاعدة وباعتبارها مبنية على التفاؤل فإن تطبيقها يعتمد على أخذ البديل الذي يعطي الأفضل من بين أفضل عائد للأحداث. أي أعلى قيمة بين الأحداث (ح).

مثال (٢): بالعودة إلى نفس المثال السابق.

والمطلوب: ما هي نتيجة تطبيق قاعدة أقصى الأقصى.

البدائل/الإحتمالات	ح ١	ح ٢	ح ٣
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

الحل: بالنظر لقيم الأحداث (الاحتمالات) لكل بديل (ب) فإنه يتم أخذ أعلى رقم من كل (ح) لكل (ب). ويكون الحل:

البدائل	أقصى عائد لكل بديل
ب ١	٣٠٠
ب ٢	٦٠٠
ب ٣	٤٠٠
ب ٤	٢٠٠

إدًا: فأفضل خيار هو الخيار الثاني (ب ٢) لأنه يعطي أعلى عائد وهو (٦٠٠).

قاعدة: في حالة العائدات يتم إختيار أعلى رقم وفي حالة التكاليف يتم إختيار أقل رقم.

(٣) قاعدة أقصى الأدنى (التشاؤم).

وهي مطابقة للقاعدة السابقة (أقصى الأقصى) إلا أنها تأخذ الأمر بنظرة تشاؤمية، أي أنها تعتمد على الأخذ بالبديل الذي يعطي أعلى عائد من أقل عائد من عائد للأحداث. أي أقل قيمة بين الأحداث (ح).

مثال (٣): بالعودة إلى نفس المثال السابق.

والمطلوب: ما هي نتيجة تطبيق قاعدة أقصى الأقصى.

البدائل/الإحتمالات	ح ١	ح ٢	ح ٣
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

الحل: بالنظر لقيم الأحداث (الاحتمالات) لكل بديل (ب) فإنه يتم أخذ أعلى رقم من كل (ح) لكل (ب). ويكون الحل:

البدائل	أدنى عائد لكل بديل
ب ١	١٠٠
ب ٢	٣٠٠-
ب ٣	١٣٠
ب ٤	١٦٠

إدًا: فأفضل خيار هو الخيار الثاني (ب ٤) لأنه يعطي أعلى عائد من أقل العائدات وهو (١٦٠).

قاعدة: في حالة العائدات يتم إختيار أعلى رقم وفي حالة التكاليف يتم إختيار أقل رقم.

(٤) قاعدة هوروتس Hurwics.

من القاعدتين السابقتين (أقصى الأقصى) و(أقصى الأدنى) نجد أنهما يمثلان القيم النهائية المتطرفة (طرفي القيمة القصوى والقيمة الدنيا) وقد لا يفضل متخذ القرار أي منهما. وبناء على القاعدتين

السابقتين فقد وضع هوروتس قاعدته التي تأخذ في الاعتبار القاعدتين السابقتين مع تطبيق قاعدته. أي أن قاعدة هوروتس **تعتمد اعتماداً كلياً** على قاعدتي (أقصى الأقصى) و(أقصى الأدنى) **شرطية** وجود نسبة محددة لكل من التفاؤل والتشاؤم.

قاعدة: حسب قاعدة هوروتس فإن بيان النسبة المنوية شرط في السؤال، ويعتمد الحل اعتماداً كلياً على قاعدتي أقصى الأقصى، وأقصى الأدنى.

مثال (٤): لدينا المعلومات التالية والتي تمثل عائد البدائل المختلفة لمشروع ما.

والمطلوب: تطبيق قاعدة هوروتس لتحديد القرار المناسب. مع العلم بأن نسبة التفاؤل هي (٣٠٪) ونسبة التشاؤم هي (٧٠٪).

البدائل/الإحتمالات	ح ١	ح ٢	ح ٣
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

الحل: يجب أولاً استخراج قيم (أقصى الأقصى) و(أقصى الأدنى) دون تحديد الخيار الأفضل بينها، ثم ضرب كل قيمة منها بنسبتها المحددة ومن ثم يتم جمع النتائج للخروج بنتائج جديدة.

العائد البدائل	أقصى عائد لكل بديل	أدنى عائد لكل بديل	العائد النسبي بين الطرفين	قيمة العائد
ب ١	٣٠٠	١٠٠	$(٠,٧ \times ١٠٠) + (٠,٣ \times ٣٠٠)$	١٩٠
ب ٢	٦٠٠	٣٠٠-	$(٠,٧ \times ٣٠٠-) + (٠,٣ \times ٦٠٠)$	٣٠-
ب ٣	٤٠٠	١٣٠	$(٠,٧ \times ١٣٠) + (٠,٣ \times ٤٠٠)$	٢١١
ب ٤	٢٠٠	١٦٠	$(٠,٧ \times ١٦٠) + (٠,٣ \times ٢٠٠)$	٢٠٢

إذاً: فأفضل خيار هو الخيار الثالث (ب ٣) لأنه يعطي أعلى عائد من العائدات وهو (٢١١).

(٥) قاعدة الأسف والندم (أدنى أقصى الأسف).

وتعني هذه القاعدة أنه لربما يأسف متخذ القرار على اختيار البديل الذي تم اختياره بأحد الأطراف السابقة وذلك لأن حالة الطبيعة أدت إلى حدوث حدث آخر بعد ذلك غير الحدث الأول والذي على أساسه تم اختيار البديل. وهنا يتم العمل وفق ما يلي:

١. تحديد قيمة أقصى عائد لكل حدث، وهي أقصى قيمة في كل عمود.
٢. تطرح قيمة كل عائد في العمود من قيمة أقصى ذلك العمود. ويكرر ذلك على جميع الأعمدة.
٣. تجمع نتائج الأعمدة الجديدة كل صف (خيار / بديل) على حدى.
٤. يتم إختيار أقل قيمة في العمود الجديد.

أي بعبارة أخرى:

١. نأخذ أكبر رقم في العمود، ونقوم بطرح كل قيمة من العمود منه.
٢. نأخذ أكبر رقم في كل صف على حدة، وهو الذي سيمثل أقصى الأسف لذلك الصف.
٣. نأخذ أقل رقم في العمود الأخير وهو عمود (أقصى الأسف) وهو الذي سيمثل البديل الأمثل.

مثال (٥): بالعودة إلى المثال السابق.

والمطلوب: هي نتيجة تطبيق قاعدة الأسف والندم (أدنى أقصى الأسف).

البدائل/الإحتمالات	ح ١	ح ٢	ح ٣
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

الحل: يتم تطبيق ما سبق شرحه حيث نجد أن أعلى قيمة في العمود الأول (ح ١) هي (١٦٠) وأعلى قيمة في العمود الثاني (ح ٢) هي (٣٠٠) وأعلى قيمة في العمود الثالث (ح ٣) هي (٦٠٠). فنقوم بطرح جميع قيم كل عمود من أعلى قيمة للعمود.

البدائل/الإحتمالات	ح ١	ح ٢	ح ٣	ح ١	ح ٢	ح ٣	أقصى الأسف
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٦٠	١٠٠	٣٠٠	٤٦٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠	٤٦٠	١٥٠	٠	٦١٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠	٣٠	١٠٠	٢٠٠	٦٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠	٠	٠	٤٠٠	٤٠٠

إدراك: فأفضل خيار هو الخيار الرابع (ب ٤) لأنه يعطي أدنى أقصى الأسف (أقل أسف) وقيمته (٤٠٠) أي أنه بإختيار هذا البديل فإن متخذ القرار سيواجه أدنى أقصى أسف (أقل أسف ممكن) وهو (٤٠٠).

قاعدة: في حالة العائدات أو التكاليف يتم إختيار أقل رقم وذلك في حالة الأسف والندم

مثال (٦): يبين الجدول التالي العائد لبدائل مصنع الزجاج تحت حالات الطبيعة (الطلب) المختلفة، فإذا كانت إدارة المصنع متفائلة بنسبة (٣٠٪).

والمطلوب: أحسب القرار بجميع طرق حالات عدم التأكد.

البدائل/الإحتمالات	مرتفع	معتدل	منخفض	منعدم
توسع	٥٥	٣٠	٣٠	١٠-
بناء مصنع	٧٥	٤٠	٣٥	١٥-
إستيراد	٣٥	٢٠	١٥	١٠

الحل:

(١) وفق قاعدة التوزيع المتساوي (لابلاس).

قاعدة: متوسط البديل = مجموع إحتمالات البديل ÷ عدد الإحتمالات.

قاعدة: البديل الأمثل هو أعلى رقم ناتج في حالة العائدات، وأقل رقم ناتج في حالة التكاليف.

$$\text{متوسط البديل (توسع)} = (٥٥ + ٣٠ + ٣٠ - ١٠) \div ٤ = ٢٦,٢٥$$

متوسط البديل (بناء مصنع) = $(75 + 40 + 35 - 15) \div 4 = 33,75$.

متوسط البديل (إستيراد) = $(35 + 20 + 15 + 10) \div 4 = 20$.

إذا... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٢) وفق قاعدة أقصى الأقصى (التفاول).

البدائل/الإحتمالات	أقصى عائد
توسع	٥٥
بناء مصنع	٧٥
إستيراد	٣٥

إذا... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٣) وفق قاعدة أقصى الأدنى (التشاؤم).

البدائل/الإحتمالات	أدنى عائد
توسع	١٠-
بناء مصنع	١٥-
إستيراد	١٠

إذا... البديل (إستيراد) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٤) وفق قاعدة هوروتس Hurwics.

نسبة التفاول والتشاؤم				
٧٠٪	٣٠٪			
البدائل/الإحتمالات	أقصى عائد	أدنى عائد	العائد النسبي	العائد المتوقع
توسع	٥٥	١٠-	$(0,7 \times 10-) + (0,3 \times 55)$	٩,٥٠
بناء مصنع	٧٥	١٥-	$(0,7 \times 15-) + (0,3 \times 75)$	١٢,٠٠
إستيراد	٣٥	١٠	$(0,7 \times 10) + (0,3 \times 35)$	١٧,٥٠

إذا... البديل (إستيراد) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٥) وفق قاعدة الأسف والندم (أدنى أقصى الأسف).

البدائل/الإحتمالات	مرتفع	معتدل	منخفض	منعدم	مرتفع	معتدل	منخفض	منعدم	أقصى الأسف
توسع	٥٥	٣٠	٣٠	١٠-	٢٠	١٠	٥	٢٠	٢٠
بناء مصنع	٧٥	٤٠	٣٥	١٥-	٠	٠	٠	٢٥	٢٥
إستيراد	٣٥	٢٠	١٥	١٠	٤٠	٢٠	٢٠	٠	٤٠

إذا... البديل (توسع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أقل رقم، أي أقل ندم قد يحدث.

مثال (٧): ترغب شركة تصنيع المكيفات في زيادة إنتاجها، وأمامها عدة بدائل، إما أن توسع إمكانيات المصنع الحالي، أو أن نبين مصنعاً جديداً، أو أن نتعاقد مع مصنع آخر لتزويدها بجزء من الإنتاج، والجدول التالي يوضح العائد من كل قرار (بديل) وتحت حالات الطبيعة المختلفة:

البدائل/الإحتمالات	طلب مرتفع	طلب متوسط	طلب منخفض
توسع في المصنع	٦	٣	٢
بناء مصنع	٨	٢	٣
تعاقد مع مصنع آخر	٤	٢	١

المطلوب:

١. تحديد البديل الذي يجب إختياره طبقاً للقواعد التالية: لابلاس، أقصى الأدنى، أقصى الأقصى.
٢. البديل المناسب باستخدام قاعدة هورتس في حالة أن وزن حدوث الحدث المتفائل (أ = ٠,٦٥).
٣. ما هو البديل الأفضل باستخدام قاعدة الأسف والندم.

الحل:

(١) وفق قاعدة التوزيع المتساوي (لابلاس).

قاعدة: متوسط البديل = مجموع إحتمالات البديل ÷ عدد الإحتمالات.

قاعدة: البديل الأمثل هو أعلى رقم ناتج في حالة العائدات، وأقل رقم ناتج في حالة التكاليف.

$$\begin{aligned} \text{متوسط البديل (توسع)} &= (٦ + ٣ + ٢) \div ٣ = ٣,٦ \\ \text{متوسط البديل (بناء مصنع)} &= (٨ + ٢ + ٣) \div ٣ = ٤,٣ \\ \text{متوسط البديل (إستيراد)} &= (٤ + ٢ + ١) \div ٣ = ٢,٣٠ \end{aligned}$$

إذاً... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٢) وفق قاعدة أقصى الأقصى (التفاؤل).

البدائل/الإحتمالات	أقصى عائد
توسع	٦
بناء مصنع	٨
إستيراد	٤

إذاً... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٣) وفق قاعدة أقصى الأدنى (التشاؤم).

البدائل/الإحتمالات	أدنى عائد
توسع	٢
بناء مصنع	٢
إستيراد	١

يلاحظ هنا أننا قد حصلنا على نتيجتين هما الأعلى، ولذا فإنه يمكن إختيار أي منهما. إذا... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أحد الخيارات التي أعطت أعلى رقم.

(٤) وفق قاعدة هوروتس Hurwics.

نسبة التفاؤل والتشاؤم		٣٥٪	٦٥٪	
البدائل/الإحتمالات	أقصى عائد	أدنى عائد	العائد النسبي	العائد المتوقع
توسع	٦	٢	$(٠.٦٥ \times ٦) + (٠.٣٥ \times ٢)$	٤,٦
بناء مصنع	٨	٢	$(٠.٦٥ \times ٨) + (٠.٣٥ \times ٢)$	٥,٩
إستيراد	٤	١	$(٠.٦٥ \times ٤) + (٠.٣٥ \times ١)$	٢,٩٥

إذا... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

(٥) وفق قاعدة الأسف والندم (أدنى أقصى الأسف).

البدائل/الإحتمالات	طلب مرتفع	طلب متوسط	طلب منخفض	طلب مرتفع	طلب متوسط	طلب منخفض	طلب مرتفع
توسع في المصنع	٦	٣	٢	٢	٠	١	٢
بناء مصنع	٨	٢	٣	٠	١	٠	١
تعاقد مع مصنع آخر	٤	٢	١	٤	١	٢	٤

إذا... البديل (بناء مصنع) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أقل رقم، أي أقل ندم قد يحدث.

ثالثاً: اتخاذ القرار الإداري في حالة المخاطرة.

وهي حالة تتشابه مع حالة عدم التأكد إلا أن الفارق بينهما هي في الإحتمالات. ففي حالة "عدم التأكد" فإن جميع الإحتمالات متساوية من حيث نسبة وقوعها، وليس هناك فارق بين خيار وآخر. أما في حالة "المخاطرة" فإن هناك إحتمالات مختلفة لوقوع حدث من الأحداث مع تفاوت في نسبة الوقوع بين حدث وآخر، أي أن هناك نسبة أعلى ونسبة أقل بين كل حالة عن حالة أخرى. وبمعنى آخر فإن متخذ القرار يلجأ إلى وضع أوزان لإحتمالات حدوث الأحداث في المستقبل، وقد تكون أوزان هذه الإحتمالات غير مبنية على أساس علمي أو خبرة ماضية أو تجارب ومواقف معينة. وفي هذه الحالة فإنه لا بد أن يتوفر لدينا نسب محددة لكل حالة من الحالات لكل بديل، وعلى هذا فإنه القواعد العلمية لعملية إتخاذ القرار في حالة المخاطرة هي ثلاث، وهي:

(١) قاعدة مستوى الطموح The Aspiration Level.

(٢) قاعدة الأكثر إحتمالاً The Most Probable.

(٣) قاعدة القيمة المتوقعة The Expected Value.

البدائل/الإحتمالات	ح ١ = ٠,٢٥	ح ٢ = ٠,١٥	ح ٣ = ٠,٦٠
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

ونلاحظ هنا أنه قد أضيف نسبة لكل حالة من الحالات أعلاه وهي تمثل نسبة وقوعها، وليس نسبة تفاؤل أو تشاؤم الشركة أو المنظمة نفسها كما هو الحال في قاعدة الأسف والندم.

(١) قاعدة مستوى الطموح The Aspiration Level.

وتبنى على أساس أن متخذ القرار يجمع في أن يحصل على مستوى معين من الربح أو قد لا يرغب في أن تكون خسارته أكبر من قدر معين. ولذا فلا بد أن يتوفر لدينا المستوى المرغوب الوصول إليه ومن ثم إختيار البديل الذي يعطي أكبر احتمال للوصول إلى المستوى المطلوب.

مثال (٨): لدينا المعلومات التالية والتي تمثل عائد البدائل المختلفة لمشروع ما، مع النسب المتوقعة لكل احتمال حسبما هو موضح أدناه.

والمطلوب: تطبيق مستوى الطموح، وأن المطلوب أن تكون أدنى ربح (أقل ربح) يرغب التاجر في تحقيقه هو (٢٠٠) وألا تزيد الخسارة على (٥٠). مع العلم بأن (ح): احتمال حالة طبيعة. و(ب): بديل أو خيار متوفر.

البدائل/الإحتمالات	ح ١ = ٠,٣٠	ح ٢ = ٠,٥٠	ح ٣ = ٠,٢٠
ب ١	٦٠٠	٧٠٠	٥٠٠
ب ٢	٤٠٠	٨٠٠	٦٠٠
ب ٣	٢٠٠	٣٠٠	١٠٠-

الحل: ينظر هنا إلى صف كل خيار ويطبق بحقه قاعدة أكبر من أو يساوي (٢٠٠) وأصغر من أو يساوي (٥٠). فنجد أن (ب ٣) يحقق شرط مستوى طموح الربح (٢٠٠) ولكن لا يحقق شرط مستوى طموح الخسارة، فالخسارة في البديل هي (١٠٠-) أي أكبر من المستوى المطلوب (٥٠)، وعليه يتم استبعاد هذا البديل. بينما يحقق (ب ١) و(ب ٢) شرط مستوى طموح الخسارة، وكذلك شرط مستوى طموح الربح (٢٠٠). ولكن أي من البديلين هو المطلوب؟.

البدائل/الإحتمالات	ح ١ = ٠,٣٠	ح ٢ = ٠,٥٠	ح ٣ = ٠,٢٠
ب ١	٦٠٠	٧٠٠	٥٠٠
ب ٢	٤٠٠	٨٠٠	٦٠٠
ب ٣	٢٠٠	٣٠٠	١٠٠-

هنا يأتي دور القاعدة الثانية والتي ستحدد أي من البديلين هو المطلوب بإعتبار أنهما يحققان نفس شروط مستويات الربح والخسارة.

(٢) قاعدة الأكثر احتمالاً The Most Probable.

وهي قاعدة مبنية بالكامل على القاعدة السابقة (قاعدة مستوى الطموح The Aspiration Level) وبعد استخراج النتائج يتم التفضيل بين الخيارات (البدائل) الناتجة وفق أعلى نسبة تم تحديدها سابقاً. وبالعودة للمثال السابق نجد أن (ب ٢) يحقق عند مستوى (٠,٥٠) أي (٥٠٪) أعلى ناتج وهو (٨٠٠).

قاعدة: في حالة العائدات يتم إختيار أعلى رقم وفي حالة التكاليف يتم إختيار أقل رقم.

(٢) قاعدة القيمة المتوقعة The Expected Value.

وهي قاعدة تبنى على تقييم كل البدائل (ب) في جميع حالاتها واحتمالاتها (ح) بعد إجراء عملية حسابية إضافية مع النسبة المحددة. بحث يتم ضرب كل عمود بالنسبة المحددة له ثم جمع جميع الأعمدة للوصول إلى أعلى رقم (ناتج) بين جميع البدائل. ويتضح ذلك من المثال السابق، حيث:

البدائل/الإحتمالات	ح ١ = ٠,٣٠	ح ٢ = ٠,٥٠	ح ٣ = ٠,٢٠	القيمة
ب ١	$١٨٠ = ٠,٣٠ \times ٦٠٠$	$٣٥٠ = ٠,٥٠ \times ٧٠٠$	$١٠٠ = ٠,٢٠ \times ٥٠٠$	٦٣٠
ب ٢	$١٢٠ = ٠,٣٠ \times ٤٠٠$	$٤٠٠ = ٠,٥٠ \times ٨٠٠$	$١٢٠ = ٠,٢٠ \times ٦٠٠$	٦٤٠
ب ٣	$٦٠ = ٠,٣٠ \times ٢٠٠$	$١٥٠ = ٠,٥٠ \times ٣٠٠$	$٢٠ = ٠,٢٠ \times ١٠٠$	١٩٠

إذاً: أفضل خيار (بديل) هو (ب ٢) لأنه يحقق أعلى قيمة متوقعة وهي (٦٤٠).

مثال (٨): لديك الجدول التالية لعائد بدائل تحت حالات الطبيعة المختلفة.

والمطلوب: احسب القرار مستخدماً قاعدة القيمة المتوقعة.

البدائل/الإحتمالات	ح ١ = ٢٥%	ح ٢ = ١٥%	ح ٣ = ٦٠%
ب ١	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠
ب ٢	٣٠٠-	١٥٠	٦٠٠
ب ٣	١٣٠	٢٠٠	٤٠٠
ب ٤	١٦٠	٣٠٠	٢٠٠

قاعدة: القيمة المتوقعة للبديل = (المقدار (١) × نسبة إحصائه) + (المقدار (٢) × نسبة إحصائه) + (المقدار (٣) × نسبة إحصائه) ... الخ.

قاعدة: البديل الأمثل في قاعدة القيمة المتوقعة هو البديل الذي يعطي أعلى قيمة متوقعة بين قيم البدائل في حالة العائدات، وأقل رقم في حالة التكاليف.

الحل: نقوم بحساب القيمة المتوقعة لكل بديل على حدة، ونأخذ بأعلى قيمة من تلك القيم:

$$\text{العائد المتوقع للبديل (ب ١)} = (١٠٠ \times ٠,٢٥) + (٢٠٠ \times ٠,١٥) + (٣٠٠ \times ٠,٦٠) = ٢٣٥.$$

$$\text{العائد المتوقع للبديل (ب ٢)} = (٣٠٠ \times ٠,٢٥) + (١٥٠ \times ٠,١٥) + (٦٠٠ \times ٠,٦٠) = ٣٠٧,٢.$$

$$\text{العائد المتوقع للبديل (ب ٣)} = (١٣٠ \times ٠,٢٥) + (٢٠٠ \times ٠,١٥) + (٤٠٠ \times ٠,٦٠) = ٨٩.$$

$$\text{العائد المتوقع للبديل (ب ٤)} = (١٦٠ \times ٠,٢٥) + (٣٠٠ \times ٠,١٥) + (٢٠٠ \times ٠,٦٠) = ٢٠٥.$$

إذاً... البديل (ب ٢) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

تمرين (١).

ترغب إحدى الشركات في معرفة تكاليف تدريب موظفيها، وبعد القيام بدراسة معينة اتضح للشركة أن هذه التكاليف تحدث طبقاً للإحتمالات الموضحة في الجدول التالي:

التكاليف (١٠٠٠) ريال	١٨٠	١٩٥	٢٠٥	٢٣٠	٢١٥
إحتمال حدوث التكاليف	٠,٢	٠,٣	٠,٢٥	٠,٢	٠,٠٥

- المطلوب:**
- تكاليف التدريب السنوية المتوقعة؟
 - التكاليف الأكثر احتمالاً؟
 - أقصى التكاليف التي يمكن أن تحدث بنسبة (٩٥٪)؟

تمرين (٢).

الجدول التالي سجل به صافي الأرباح لخمس مشاريع مختلفة طبقاً لإحتمالات حدوث حالات الطبيعة المتوقعة، وهي:

البدائل/الإحتمالات	ح ١ = ٠,٣٠	ح ٢ = ٠,٢٥	ح ٣ = ٠,٤٥
ب ١	٢٠٠	٢٠٠	٤٨٠
ب ٢	٣٠٠-	٢٦٠	٦٩٠
ب ٣	٠	٢٨٠	٦٠٠
ب ٤	٢١٠	٣٨٠	٣٠٠
ب ٥	٥٠٠	١٩٠	٢٨٠

المطلوب: تحديد البديل الذي يفضل اختياره بناء على قاعدة الأكثر احتمالاً وقاعدة القيمة المتوقعة، مفترضاً أن احتمالات حالة الطبيعة غير متوفرة الآن، فما هو البديل المفضل في ظل غياب هذه المعلومات.

تمرين (٣).

الجدول التالي يسجل العائد اليومي (موجب / سالب) لخمس بدائل طبقاً لنسبة حدوث حالات الطبيعة المتوفرة، وهي:

البدائل/الإحتمالات	٠,٢	٠,١٥	٠,٣	٠,٢٥	٠,١٠
ب ١	١١٢	١٠٨	٩٦-	١٠٠	١٠٩
ب ٢	١١٠	١٠٠	١٠٥	١١٠	١١٦
ب ٣	١٠٦	١٠٥	١١٠	١١٥	٨٦-
ب ٤	١٠٤	١١٤	١٢٠	١٠٦	١١٢
ب ٥	٩٢	١٢٢	١١٢	١٠٤	١٠٩

المطلوب: تحديد البديل الذي يجب اختياره حتى يكون احتمال حصول عائد يومي قدره ٩٠ ريال أقصى ما يمكن. وكذلك تحديد البديل الذي يفضل اختياره بناء على قاعدة الأكثر احتمالاً.

تمرين (٤).

المصفوفة التالية تسجل عائدات لثلاث بدائل مختلفة طبقاً لحالات الطبيعة المتوقعة حدوثها:

البدائل/الإحتمالات	ط ١	ط ٢	ط ٣
ب ١	٢٥٠	٢٨٠	٢٨٠
ب ٢	٢٦٠	٢٧٠	٢٢٠
ب ٣	٢٩٠	٢٣٠	٢٦٠

المطلوب:

١. تحديد البديل الذي يجب اختياره طبقاً للقواعد التالية: لابلأس، أقصى الأدنى، أقصى الأقصى.
٢. البديل المناسب باستخدام قاعدة هوروتس في حالة أن وزن حدوث الحدث المتقابل (أ = ٠.٦٥).
٣. ما هو البديل المناسب في حالة أن ح(ط١) = ٠,٦ / ح(ط٣) = ٠,١٥.

تمرين (٥).

يسجل الجدول التالي التكاليف الخاصة بكل خيار من الخيارات المتوفرة وطبقاً لحالات الطبيعة المتوقع حدوثها، وهي:

البدائل/الإحتمالات	ط١	ط٢	ط٣	ط٤
خ١	٥٣٥	٥٣٠	٥٢٥	٥٢٠
خ٢	٥٢٠	٥٤٠	٥٣٠	٥٤٠
خ٣	٥٢٥	٥٣٠	٥٦٠	٥١٠

المطلوب: تحديد الخيار المفضل اختياره طبقاً لقواعد حالة عدم التأكد، مع إعطاء وزن للحدث المتقابل (أ = ٠,٥) ثم وضح وجه الاختلاف بين اختيار البدائل في حالة التكاليف والاختيار في حالة لو أن الجدول أعلاه يعبر عن عائد وليس تكاليف.

تمرين (٦).

لديك الجدول التالي والذي يسجل الأرباح المتوقعة شهرياً بآلاف الريالات لكل استراتيجية طبقاً لكميات المبيعات المختلفة ك١، ك٢، ...، ك٥.

البدائل/الإحتمالات	ك١	ك٢	ك٣	ك٤	ك٥
س١	١١٠	١٥٠	١٣٠	١٤٠	١٢٠
س٢	١٢٠	١٣٥	١٢٥	١٣٠	١٢٥
س٣	١٥٠	١٢٠	١٠٥	١١٥	١٤٠
س٤	١٤٠	١٢٥	١٣٠	١٢٥	١٣٥
س٥	١١٠	١١٢	١٢٥	١٣٠	١٢٠

المطلوب: أوجد الاستراتيجية التسويقية التي يجب اختيارها طبقاً لقاعدة أقصى الأدنى، وأقصى الأقصى، وقاعدة هوروتس في حالة وزن حدوث الحدث المتقابل (أ = ٠,٤).

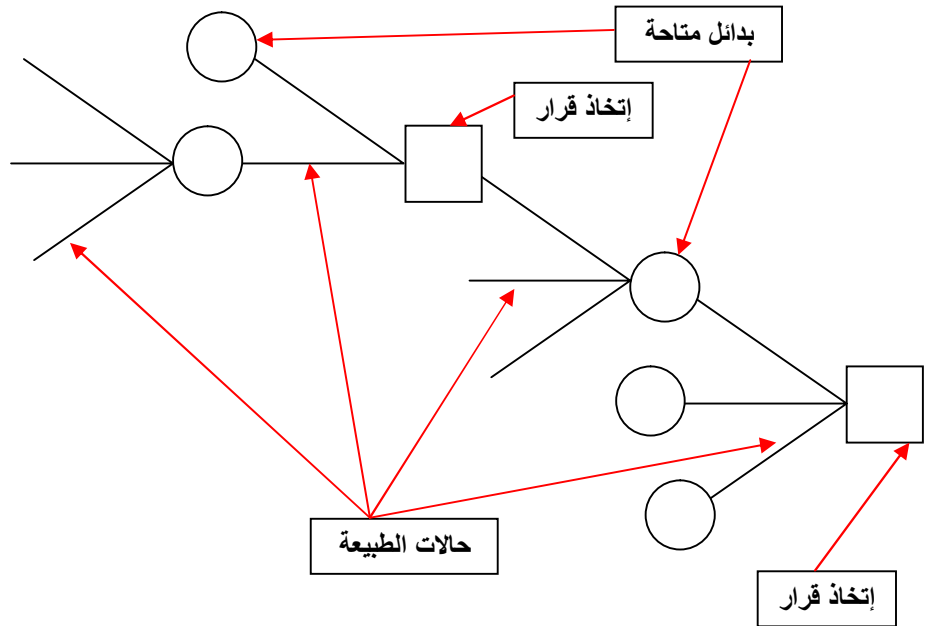
تمرين (٧).

استخدم الجدول المبين في التمرين (٦) أعلاه لرسم الأرباح المتوقعة طبقاً لقاعدة هوروتس لقيم مختلفة حيث (أ = ١:٠) ثم أكتب ما تستنتجه من الرسم.

الفصل الثاني: شجرة القرارات والمباريات

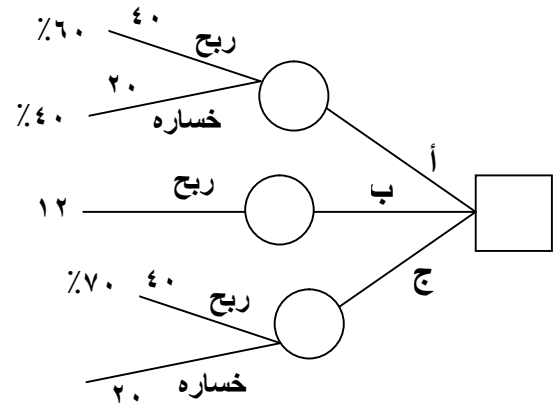
(الفصل السابع حسب ترتيب الكتاب المقرر)

شجرة القرارات هي ذات فكرة القيمة المتوقعة التي سبق التطرق لها، وهي تعطي نتائج عن حالة الشركة أو القطاع طوال العام وليس لفترة قصيرة محددة. وتتكون من مربع أو مستطيل وهو يمثل مكان إتخاذ القرار، تصدر منه خطوط تعبر عن البدائل (أ، ب، ج) ولكل بديل حالة طبيعة محددة تتصل بدائرة والتي تمثل البديل المتاح. ويوضح النموذج التالي شجرة قرارات مفترضة.



مثال (١): شخص يرغب في الاستثمار في إحدى البدائل (أ، ب، ج) تكلفة البديل الأول (٩) وتكلفة البديل الثاني (٧) وتكلفة البديل الثالث (٨) وكان البديل الأول يعطي ربح قدره (٥٠) بواقع (٦٠٪) وخسارة قدرها (٢٠) بواقع (٤٠٪) ويعطي البديل الثاني ربح قدره (١٢) ويعطي البديل الثالث ربح قدره (٤٠) بواقع (٧٠٪) وخسارة قدرها (٢٠).

المطلوب: رسم شجرة القرارات، والوصول إلى أفضل تكاليف وأفضل أرباح.



الحل: بعد رسم شجرة القرارات نقوم الآن بتقييم كل بديل على حدة، وذلك بطرح التكلفة من الأرباح.

أولاً: الأرباح الفعلية لكل بديل بعد خصم الخسارة من الربح وفقاً لنسبة كل منها:

$$\begin{aligned} \text{البديل (أ)} &= (٠,٦ \times ٥٠) - (٠,٤ \times ٢٠) = ٢٢ \text{ (ربح فعلي).} \\ \text{البديل (ب)} &= ١ \times ١٢ = ١٢ \text{ (حيث لا توجد خسائر) (ربح فعلي).} \\ \text{البديل (ج)} &= (٠,٧ \times ٤٠) - (٠,٣ \times ٢٠) = ٢٢ \text{ (ربح فعلي).} \end{aligned}$$

ثانياً: يجب علينا الآن طرح التكاليف من الأرباح الفعلية:

$$\begin{aligned} \text{البديل (أ)} &= ٢٢ \text{ (ربح فعلي)} - ٩ \text{ (تكلفة إنتاج)} = ١٣ \\ \text{البديل (ب)} &= ١٢ \text{ (ربح فعلي)} - ٧ \text{ (تكلفة إنتاج)} = ٥ \\ \text{البديل (ج)} &= ٢٢ \text{ (ربح فعلي)} - ٨ \text{ (تكلفة إنتاج)} = ١٤ \end{aligned}$$

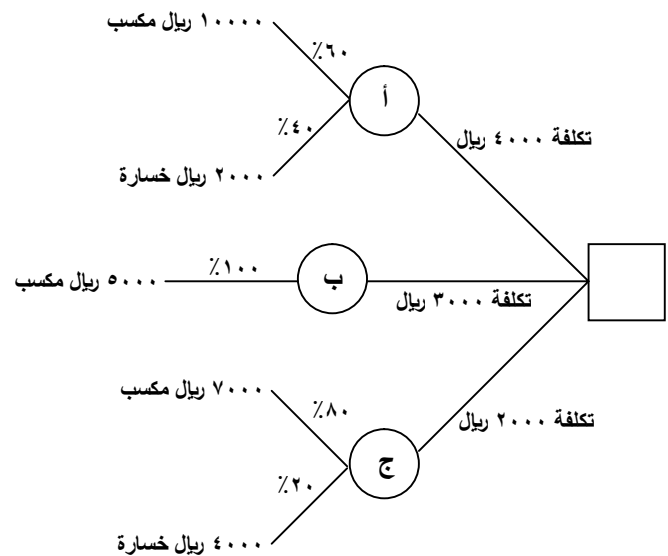
إذاً أفضل الخيارات من حيث التكاليف هو البديل (ب). وأفضل الخيارات من حيث الأرباح هو البديل (ج) وذلك وفقاً للقاعدة:

قاعدة: في حالة العائدات يتم اختيار أعلى رقم وفي حالة التكاليف يتم اختيار أقل رقم.

مثال (٢): يرغب مستثمر في اختيار أحد البدائل الاستثمارية المتاحة له وهي (أ، ب، ج) بتكلفة تنفيذ (٢، ٣، ٤) ألف ريال على الترتيب، ومن المتوقع أن يحقق البديل (أ) ربح قدره (١٠) آلاف ريال باحتمال حدوث قدره (٦٠٪) أو خسارة قدرها (٢) ألف ريال باحتمال حدوث قدره (٤٠٪). أما البديل (ب) فمن المتوقع الحصول على ربح مؤكد قدره (٥) آلاف ريال. أما البديل (ج) فمن المتوقع الحصول على ربح قدره (٧) آلاف ريال باحتمال حدوث قدره (٨٠٪) وخسارة قدرها (٤) آلاف ريال.

المطلوب: تحديد أي البدائل هي الأفضل مستخدماً في ذلك شجرة القرارات، مع العلم أن بإمكان المستثمر اختيار بديل واحد فقط من البدائل الثلاثة المتاحة.

الحل: نقوم الآن برسم شجرة القرارات استناداً على ما جاء من معطيات، وينتج عن ذلك:



بعد رسم شجرة القرارات نقوم الآن بتقييم كل بديل على حدة، وذلك وفقاً للقاعدة التالية:

قاعدة: العائد المتوقع للبديل = (نسبة الربح × مقدار الربح) + (نسبة الخسارة × مقدار الخسارة).

قاعدة: صافي الربح = العائد المتوقع للبديل – تكلفة البديل.

قاعدة: البديل الأمثل هو أعلى رقم ناتج في حالة العائدات، وأقل رقم ناتج في حالة التكاليف.

العائد المتوقع للبديل (أ) = $(10,000 \times 0,60) + (2,000 \times 0,40) = 5,200$ ريال.
صافي الربح البديل (أ) = $4,000 - 5,200 = 1,200$ ريال.

العائد المتوقع للبديل (ب) = $(5,000 \times 1) + (0 \times 0) = 5,000$ ريال.
صافي الربح البديل (ب) = $3,000 - 5,000 = 2,000$ ريال.

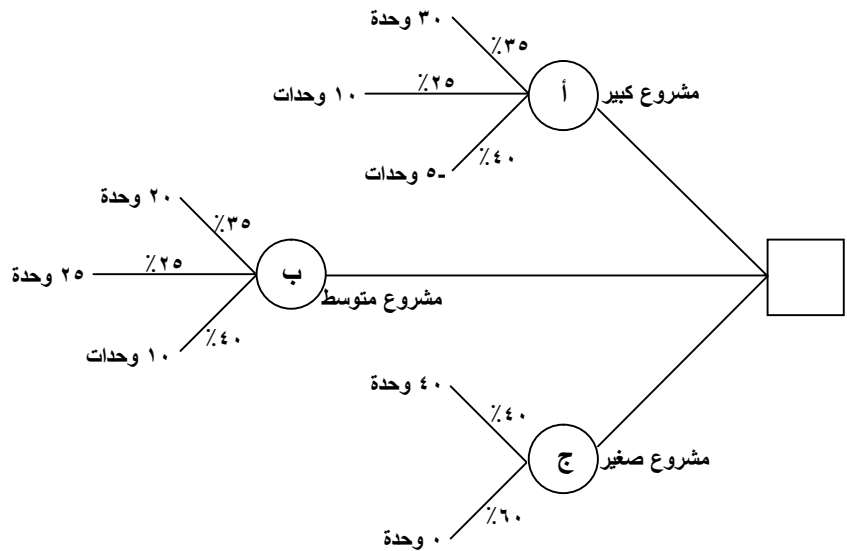
العائد المتوقع للبديل (ج) = $(7,000 \times 0,80) + (4,000 \times 0,20) = 4,800$ ريال.
صافي الربح البديل (ج) = $2,000 - 4,800 = 2,800$ ريال.

إذا... البديل (ج) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم باعتبار أن المسألة مسألة أرباح.

مثال (٣): ترغب إحدى المنشآت الإنتاجية في إقامة مشروع صناعي جديد لطرح منتج بنوعية مواصفات جديدة وتوفرت لهذه المنشأة ثلاثة أنواع من البدائل المتعلقة بهذا المشروع وذلك كما يلي: مشروع صناعي كبير ومشروع صناعي متوسط ومشروع صناعي صغير. علماً بأن المنتجات التي يتوقع أن تطرح من المشروع الصناعي الكبير والصناعي المتوسط يمكن أن تواجه ثلاث مستويات من الطلب وبإحتمالات على النحو التالي: طلب عالٍ بإحتمال (٣٥٪) طلب متوسط بإحتمال (٢٥٪) طلب ضعيف بإحتمال (٤٠٪)، أما المشروع الصناعي الصغير فيمكن أن يواجه إما طلباً عالياً بإحتمال (٤٠٪) أو طلب ضعيف. فإذا علمت أن اعتماد أي من البدائل الثلاث الوارد ذكرها يمكن أن يؤدي إلى نتائج مالية مختلفة وذلك على النحو التالي: اعتماد البديل الأول (مشروع صناعي كبير) يؤدي إلى تحقيق (٣٠) وحدة نقدية في حالة الطلب العالي، و(١٠) وحدات نقدية في حالة الطلب المتوسط، و(٥-) وحدات نقدية في حالة الطلب المنخفض، واعتماد البديل الثاني (مشروع صناعي متوسط) يؤدي إلى تحقيق نتائج كما يلي: (٢٠) وحدة نقدية في حالة الطلب العالي، و(٢٥) وحدة نقدية في حالة الطلب المتوسط، و(١٠) وحدات نقدية في حالة الطلب المنخفض. واعتماد البديل الثالث (مشروع صناعي صغير) يؤدي إلى تحقيق نتائج كما يلي: (٤٠) وحدة نقدية في حالة الطلب العالي، و(٠) وحدة نقدية في حالة الطلب المنخفض.

المطلوب: رسم شجرة القرارات وتثبيت البيانات عليها، وتحديد البديل الأفضل.

الحل: نقوم الآن برسم شجرة القرارات استناداً على ما جاء من معطيات، وينتج عن ذلك:



بعد رسم شجرة القرارات نقوم الآن بتقييم كل بديل على حدة، وذلك وفقاً للقاعدة التالية:

قاعدة: عائد البديل = (النسبة × مقدار الربح) + (النسبة × مقدار الربح) + (النسبة × مقدار الربح) + ... الخ.

قاعدة: البديل الأمثل هو أعلى رقم ناتج في حالة العائدات، وأقل رقم ناتج في حالة التكاليف.

عائد البديل (المشروع الصناعي الكبير)

$$١١ = (٣٠ \times ٠,٣٥) + (١٠ \times ٠,٢٥) + (٥ \times ٠,٤٠)$$

عائد البديل (المشروع الصناعي المتوسط)

$$١٧,٢٥ = (٢٠ \times ٠,٣٥) + (٢٥ \times ٠,٢٥) + (١٠ \times ٠,٤٠)$$

عائد البديل (المشروع الصناعي الصغير)

$$١٦ = (٤٠ \times ٠,٤٠) + (٠ \times ٠,٦٠)$$

إذاً... البديل (المشروع الصناعي المتوسط) هو البديل الأمثل لأنه أعطى أعلى رقم.

الفصل الثالث: نماذج البرمجة الخطية (الفصل الثاني حسب ترتيب الكتاب المقرر)

البرمجة الخطية.

هي عبارة عن برمجة الأشياء (المعطيات) المتكررة والتي يتم استخدامها والتعامل معها بشكل متكرر في كامل خط تحليل المعلومات. مع الأخذ في الاعتبار بأن القاعدة الرياضية تنص على أنه إذا حدث أي تغيير في طرف المعادلة فإنه لابد من أن يحدث ذات التغيير في الطرف الثاني من المعادلة. وسنتناول الحديث في هذا الفصل على دراسة:

١. الرسم البياني.

٢. الطريقة المبسطة (سمبلكس Simplex).

وتعتبر البرمجة الخطية من أحد الطرق الواسعة الاستخدام في التطبيقات الإدارية التي تبحث عن القرار الأمثل لحل المشكلة. وفي هذه المسائل يفترض أن جميع العلاقات الخطية – وإذا كانت العلاقات غير خطية – فيمكن أخذ مجال قصير للعمليات الحاصلة وتقرب العلاقات لتكون علاقات خطية. وبهذه الفرضيات يمكن تطبيق البرمجة الخطية على مسائل متنوعة تبحث عن القرار الأمثل.

ويعتبر بناء النموذج الرياضي من أهم الأمور الواجب عملها في أي مسألة تطرح لإختيار البديل الأفضل، حيث يتم التركيز أولاً على قراءة المسألة بعمق ثم كتابة النموذج الرياضي لها بدقة تامة. ويمكن تلخيص مراحل بناء النموذج الرياضي في الخطوات التالية:

(١) تعريف المشكلة.

(٢) بناء المشكلة. وتحتوي على:

- تحديد الشروط أو القيود التي لها علاقة بالمواد الخاصة بالمشكلة.
- تحديد أنواع وكمية الموارد المستخدمة.
- تحديد كمية الموارد المتوفرة وكمية الطلب على الموارد.
- تحديد المنتجات وأنواعها والكميات التي يحتاجها كل نوع من الموارد المختلفة.
- تحديد متغيرات القرارات الإدارية.

(٣) تحديد دالة الهدف ونوع المنفعة هل هي ربح أو خسارة.

إن أهم مرحلة في بناء معظم النماذج الرياضية هي مرحلة تحديد متغيرات القرارات حيث أن هذه المرحلة تحتاج إلى دقة وعناية شديتان. كما أنه يجب أن تكون هناك عناية وإنتباه عند بناء قيود النموذج حيث يجب أن تكون جميع حدود (عناصر) النموذج في كل قيد تعبر نفس الوحدات المستخدمة. فمثلاً لو كانت حدود أحد القيود هي (أ + ب + ج = ٩٠ يوم) فلا يمكن أن تكون وحدات (أ) دقيقة، ووحدات (ب) ساعة، ووحدات (ج) يوم.

ونستخلص من ذلك، أن المتغيرات هي تلك الأرقام التي تتغير وهي الربح والتكاليف بمختلف أنواعها، وهذه المتغيرات هي تلك التي تكون الشركة فتأتي الأرباح من البيع والخدمات والسلع، وتأتي التكاليف من تكلفة تلك السلع والخدمات.

فإذا كان لدينا ثلاث سلع فإن ذلك يعني أن لدينا ثلاث متغيرات هي (أ، ب، ج) أو (س١، س٢، س٣) وعليه فإن دالة الهدف (ده) تكون ربحية إن كان السهم إلى الأعلى (↑) وتكون تكاليف إن كان السهم إلى الأسفل (↓). وتكون دالة الهدف هي:

$$\text{ده} = \uparrow \downarrow = \text{س}١ + \text{س}٢ + \text{س}٣$$

فإذا افترضنا أن س١ = ٣ وأن س٢ = ٥ وأن س٣ = ٦ **فإن:**

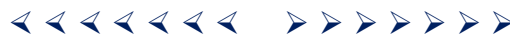
$$\text{ده} = \uparrow \downarrow = \text{س}١٣ + \text{س}٢٥ + \text{س}٦٣$$

بعد كتابة دالة الهدف، فإن لدينا قيود لابد من كتابتها، وتستخرج من المعطيات، وتكتب أسف الدالة مع ملاحظة أنه **لا يمكن أن تكون س١ أو س٢ أو س٣ بالسالب** لأنها تمثل الإنتاج ولا يمكن إنتاج سلع بالسالب بل إما بالصفر إن لم يتم إنتاج تلك السلعة أو أكبر من صفر عند الإنتاج.

وعليه فإن القيد الثالث لابد أن يكون: س١ (أو) س٢ أكبر من أو يساوي (≤) صفر (٠).

تكنيكات ونقاط يجب أخذها في الاعتبار: دائماً وأبداً:

١. لا تتعامل مع أي سؤال إلا بعد تحديد كافة القيم والمتغيرات والمجاهيل. حيث يمكن لك ذلك عن طريق رسم جدول خارجي تحدد فيه كافة معطيات السؤال وما هو المطلوب منه.
٢. كافة المطلوبات هي عبارة عن مجاهيل، وهي التي تحمل (س١، س٢، الخ).
٣. لا تبدأ بأي حل إلا بعد إجراء ما سبق.
٤. في الرسم البياني، لا تستخدم دالة الهدف إلا في آخر خطوة من الحل.
٥. إضافة وحذف المتغيرات الجديدة (راكد، فائض، وهمي) هو في نمط السمبلكس فقط، ولا يستخدم ذلك في نمط الرسم البياني.
٦. المعادلات التي يتم كتابتها هي التي تمثل الشروط والتعليمات في السؤال.
٧. لا تنسى مطلقاً كتابة (قيد اللاسلبية) أو ما يطلق عليه (قيد عدم السلبية)، فعليه درجات في الإختبارات، وهو دائماً وأبداً: **س١ (أو) س٢ ≤ (٠) (أو) س١، س٢ ≤ ٠**



الفصل الثالث: نماذج البرمجة الخطية - الرسم البياني

لتوضيح الرسم البياني، فإننا سنسوق المثال التالي لبيان ما سبق شرحه.

مثال (١): شركة لإنتاج العطور ترغب في إنتاج نوعين من علب العطور (أ) و(ب). سعة (أ) = ١ لتر. وسعة (ب) = ٢ لتر وكان كلا المنتجين يمران بمرحلتين للإنتاج. فإذا علمنا أن المنتج (أ) يستغرق (٣) دقائق في المرحلة الأولى (٥) دقائق في المرحلة الثانية. أما المنتج (ب) فيستغرق في المرحلة الأولى (٢) دقيقة وفي المرحلة الثانية (٤) دقائق. وكان الوقت المتاح الإجمالي للمرحلة الأولى هو (١٢) دقيقة وفي المرحلة الثانية (٢٠) دقيقة. وكان ربح المنتج (أ) هو (٣) ريالات والمنتج (ب) هو (٤) ريالات.

والمطلوب: معرفة الكمية التي يجب إنتاجها من كلا المنتجين لكي تكون أرباح الشركة أكبر ما يمكن.

الحل:

لتسهيل الحل، نقوم أولاً بكتابة جدول خارجي للمساعدة في الحل، ويؤخذ من معطيات السؤال.

الوقت المتاح	المنتج (ب)	المنتج (أ)	
١٢	٢	٣	مرحلة الإنتاج ١
٢٠	٤	٥	مرحلة الإنتاج ٢
	٤	٣	الأرباح

والآن... نكتب المعادلات قبل إجراء أي خطوات للحل، وينتج عن ذلك:

١. نفترض أن المنتج (أ) هو = س١ والمنتج (ب) = س٢، وذلك باعتبار أن كمية الإنتاج هي المجهولة لدينا، والمطلوب الوصول إلى ذلك العدد.

فتكون دالة الهدف (أي ما هو مطلوب تحقيقه)، أي أن معطياتها تؤخذ من الكمية التي تحقق لنا الأرباح المنشودة فتكون: **دھ↑ (لأنها ربحية) = ٣س١ + ٤س٢**

٢. والآن يتم كتابة القيود لكلا المنتجين بمرحلتين وكل مرحلة لها وقت محدد:

القيود (١) للمرحلة الأولى = ٣س١ + ٢س٢ ≥ ١٢

أي... أن في المرحلة الأولى: يستغرق س١ (٣) دقائق وس٢ (٢) دقيقة ويجب أن يكون الإنتاج في أقل من (١٢) دقيقة وهو المتوفر من الوقت.

القيود (٢) للمرحلة الثانية = ٥س١ + ٤س٢ ≥ ٢٠

أي... أن في المرحلة الثانية: يستغرق س١ (٥) دقائق وس٢ (٤) دقائق ويجب أن يكون الإنتاج في أقل من (٢٠) دقيقة وهو المتوفر من الوقت.

٣. والآن يتم كتابة القيد الثالث وهو (قيد عدم السلبية) والذي أشرنا إليه أنه لا يمكن أن يكون الإنتاج بالسالب، أي أنه إما صفر (٠) أو أكبر من الصفر (٠). فيكون القيد:

س١ (أو) س٢ ≤ (٠) (أو) س١، س٢ ≤ ٠

خطوات الحل:

يجب أن نقوم أولاً بتحويل المتراجحات (القيود) التي قمنا بكتابتها إلى معادلات رياضية، ولتحويل المتراجحات نقوم بعمل ما يلي، بحيث نضع البيانات موقع المتراجحات، وذلك بالتعويض عن (س١) مرة بالصفر، ونعوض عن (س٢) مرة أخرى بالصفر:

قاعدة: يقصد بحل المتراجحات وتحويلها إلى معادلات، تحويل إشارات أكبر من وأصغر من إلى تساوي بين طرفي المعادلة.

نقوم أولاً بتغيير إشارة (أصغر من أو يساوي) إلى (=) في المتراجحات، فتصبح:

القيود (١) = ٣س١ + ٢س٢ ≥ ١٢

القيود (٢) = ٥س١ + ٤س٢ ≥ ٢٠

نقوم الآن بحل المتراجحات وفق ما سبق شرحه، فسينتج لدينا:

القيود الأول: ٣س١ + ٢س٢ = ١٢

س١ = ٠

إدًا: ١٢ = ٢س٢ + (٠ × ٣) ≤ ١٢ = ٢س٢ ≤ ١٢ ÷ ٢ = س٢ ≤ ٦

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٠ ، ٦).

قاعدة: بعد استخراج قيمة س٢ فإنه يخطئ من يقوم بالتعويض عنها لإستخراج س١ ولكن ينبغي أن تكرر العملية على س٢ وإفتراضها على أنها (٠) لإستخراج قيمة س١.

نكرر العملية بإفتراض أن (س٢) هي التي ستساوي الصفر.

إذاً: $١٢ = (٠ \times ٢) + ١س٣ \Rightarrow ١٢ = ١س٣ \Rightarrow ١٢ \div ١ = ١٢ = ٣ \Rightarrow ١س٣ = ١٢ = ٤$
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٤ ، ٠).

الآن... نكرر العملية على القيد الثاني بنفس الطريقة، فينتج لدينا:

القيد الثاني: ٢٠ = ١س٤ + ٢س٥

٠ = ١س٤

إذاً: $٢٠ = ٢س٤ + (٠ \times ٥) \Rightarrow ٢٠ = ٢س٤ \Rightarrow ٢٠ \div ٢ = ١٠ = ٤ \Rightarrow ١س٤ = ١٠ = ٥$
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٥ ، ٠).

نكرر العملية بإفتراض أن (س٢) هي التي ستساوي الصفر.

إذاً: $٢٠ = (٠ \times ٤) + ١س٥ \Rightarrow ٢٠ = ١س٥ \Rightarrow ٢٠ \div ١ = ٢٠ = ٥ \Rightarrow ١س٥ = ٢٠ = ٤$
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٤ ، ٠).

قاعدة: تطبق قاعدة إفتراض أن س١ = ٠ ثم أن س٢ = ٠ ويطبق ذلك في المعادلة الأولى فقط، ثم تكرر ذات العملية في المعادلة الثانية، ومن الخطأ اعتبار القيم التي نتجت لدينا هي ما سيتم تطبيقه في كلا المعادلتين، فلكل س في كل معادلة قيمة مستقلة.

نقوم الآن بتمثيل ذلك على الشبكة، ورسمه بيانياً، فينتج لدينا:

قاعدة: بعد تطبيق قاعدة إفتراض الـ(س) بصفر، نطبق ذات القاعدة على قاعدة الهدف بإفتراض أن س١ = ٠ ثم بإفتراض أن س٢ = ٠ وفي الحالتين يتم إفتراض أن دالة الهدف سوف تساوي رقماً ما، وذلك لإستخراج دالة الهدف على الرسم.

نكرر العملية الآن على دالة الهدف، وذلك للوصول إلى إحداثيات نقطتي خط دالة الهدف على الرسم:

قاعدة: من مطلوباً استخراج قيم نقطتي خط الهدف أو رسمه في الرسم البياني، إلا إذا طلب منا رسم خط دالة الهدف، وإلا فإنه يكفي برسم خطوط القيود فقط.

ده١ (لأنها ربحية) = ١س٣ + ٢س٤ ونفترض (جدلاً) أن ده = ١٢ إذاً ١٢ = ١س٣ + ٢س٤ = ١٢

الآن... نطبق نفس القاعدة السابقة:

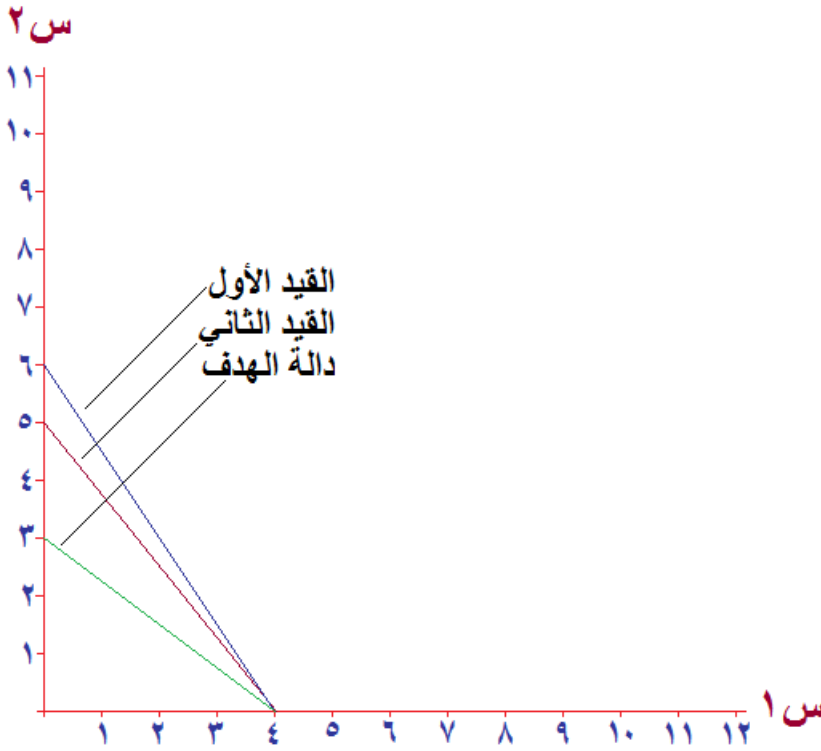
٠ = ١س٣

إذاً: $١٢ = ٢س٤ + (٠ \times ٣) \Rightarrow ١٢ = ٢س٤ \Rightarrow ١٢ \div ٢ = ٦ = ٤ \Rightarrow ١س٣ = ٦ = ٣$
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٣ ، ٠).

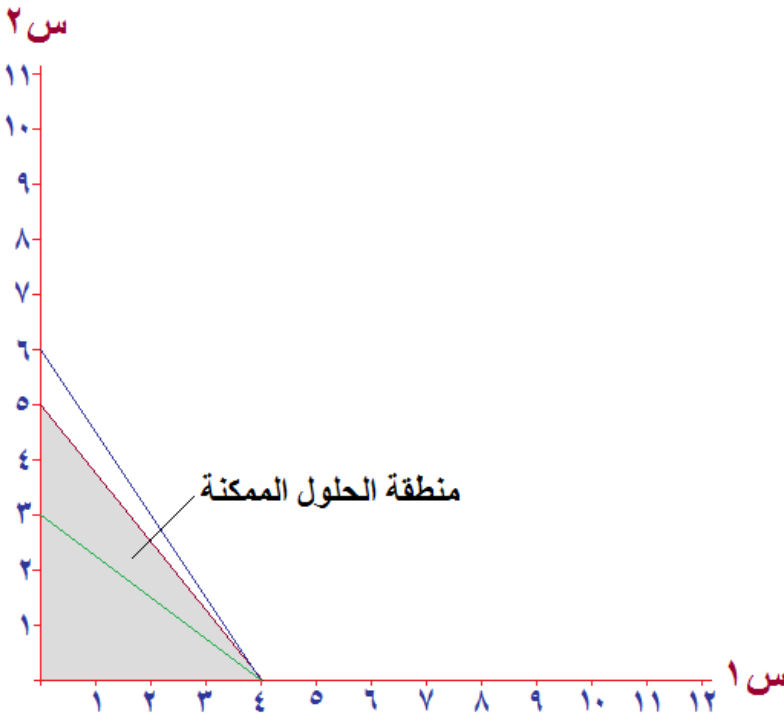
نكرر العملية بإفتراض أن (س٢) هي التي ستساوي الصفر.

إذاً: $١٢ = (٠ \times ٤) + ١س٣ \Rightarrow ١٢ = ١س٣ \Rightarrow ١٢ \div ١ = ١٢ = ٣ \Rightarrow ١س٣ = ١٢ = ٤$
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٤ ، ٠).

الآن نقوم بتمثيل هذه المعلومات (المتغيرات) على الرسم البياني، فينتج لدينا الشكل التالي:

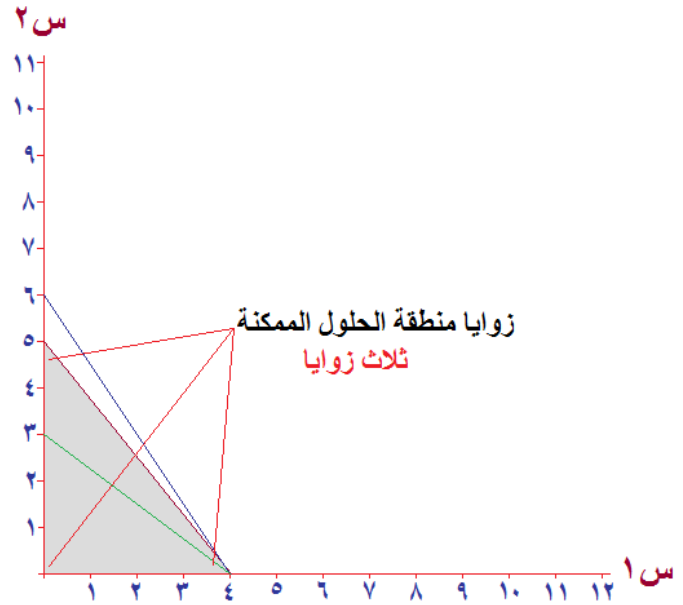
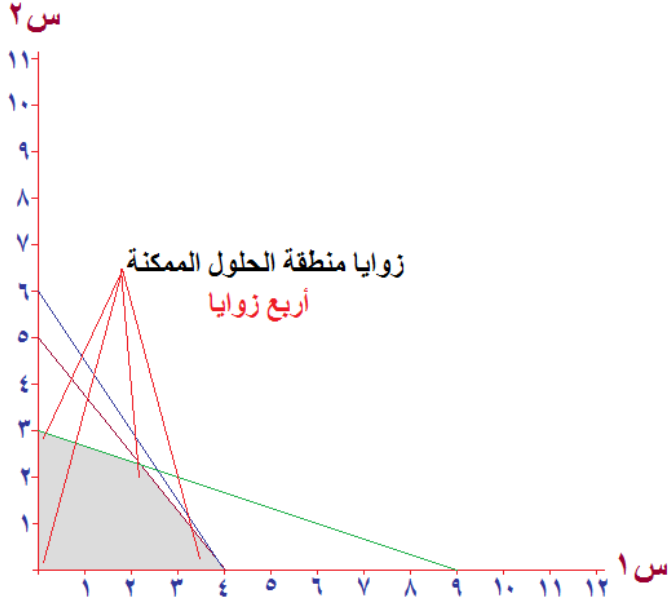


أما **منطقة الحلول الممكنة** فهي تلك المنطقة التي يمكن أن تحقق الشركة الحل ولا يخرج عن حدود القيد الأول والثاني مجتمعين، أي أنه حلاً ممكناً مع القيد الأول وهو كذلك حلاً ممكناً مع القيد الثاني. ويتبين من الرسم أن منطقة الحلول الممكنة هي تلك المنطقة المحصورة بين (٤س١) و(٥س٢) و(٠).

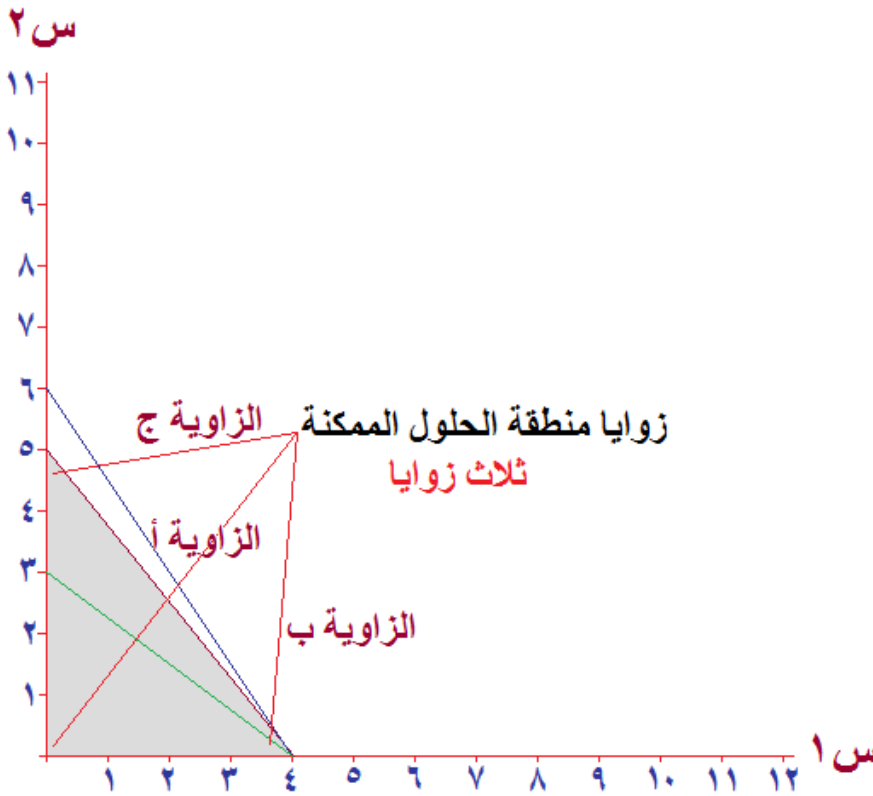


يلاحظ هنا أن دالة الهدف هي داخل منطقة الحلول الممكنة، ولذا فإنه ينبغي علينا أن نفترض أعداداً أخرى ونعيد التطبيق إلى أن نصل إلى أبعد نقطة ممكن (شريطة أن) تكون داخل جميع القيود.

وللوصول إلى الحل. ينبغي أن نأخذ قيمة الزوايا التي تشكلت لدينا في منطقة الحلول الممكنة، وهي قد تكون ثلاث زوايا أو أربع زوايا كما هو في المثال الموضح أدناه.



ومن ثم تطبق قيمة تلك الزوايا على دالة الهدف، ثم تجمع جميعها ويكون أفضل إنتاج هو أعلى رقم ظهر لدينا. وسيبين المثال التالي ذلك.



إحداثيات الزاوية (أ) هي (٠ ، ٠).
إحداثيات الزاوية (ب) هي (٠ ، ٤).
إحداثيات الزاوية (ج) هي (٥ ، ٠).

نقوم الآن بالعودة إلى دالة الهدف بعد أن تم تحديد قيم النقاط الأربع، وإحداثياتها، وذلك للوصول إلى أعلى قيمة (باعتبار أن المسألة ربح، وتكون أقل قيمة في حالة التكاليف)، فينتج لدينا:

النقطة	دالة الهدف = $٣س١ + ٤س٢$	كمية الإنتاج
أ (٠ ، ٠)	$= (٠ \times ٤) + (٠ \times ٣)$	٠
ب (٠ ، ٤)	$= (٠ \times ٤) + (٤ \times ٣)$	١٢
ج (٥ ، ٠)	$= (٥ \times ٤) + (٠ \times ٣)$	٢٠

وبالتالي، فإن أفضل وأعلى ناتج هو (٢٠) حقيقية، وهو عند النقطة (ج) والتي تنتج لنا:

أن تقوم الشركة بتصنيع (٥) علب من المنتج (ب) فقط والذي رمز له بـ(س٢) وعدم إنتاج أي علب من المنتج (أ) والذي رمز له بـ(س١) لتحقيق أعلى ربحية ممكنة.

إذا حدث تقاطع بين الدالتين، أي إذا حدث لدينا زاوية رابعة لمنطقة الحلول الممكنة نتيجة تقاطع خط القيد الأول مع خط القيد الثاني. وللوصول إلى قيم تلك النقطة، فإنه يتوجب علينا حل المعادلة للوصول إلى قيم (س١) و(س٢) وذلك وفق القاعدة الرياضية التالية:

١. نختار أي (س) سيتم شطبها.
٢. نقوم بعملية ضرب إحدى المعادلات بالعامل المشترك لتلك (س).
٣. وعليه يتم شطب إحداها والوصول إلى قيمة (س) الثانية.

ولشرح ذلك:

$$\text{القيد (١)} = ٣س١ + ٢س٢ = ١٢$$

$$\text{القيد (٢)} = ٤س١ + ٢س٢ = ٢٠$$

سنختار (س٢) كي نقوم بشطبها، ولذا فإن العامل المشترك بينهما هو (٤) وعليه فسقوم بضرب المعادلة (١) بـ(٢) لتصبح الأولى (-٤س) ونضرب المعادلة (٢) بـ(١) لتصبح الثانية (+٤س).

ولو أننا كنا قد اخترنا (س١) فإن العامل المشترك بينهما هو (١٥) وعليه فسقوم بضرب المعادلة (١) بـ(٥) لتصبح الأولى (-١٥س) ونضرب المعادلة (٢) بـ(٣) لتصبح الثانية (+١٥س).

$$\begin{aligned} \text{إدًا... المعادلة (١)} &= (-٢) \times (٣س١ + ٢س٢ = ١٢) & \leq & -٦س١ - ٤س٢ = ١٢ \\ \text{المعادلة (٢)} &= (١) \times (٤س١ + ٢س٢ = ٢٠) & \leq & ٤س١ + ٢س٢ = ٢٠ \end{aligned}$$

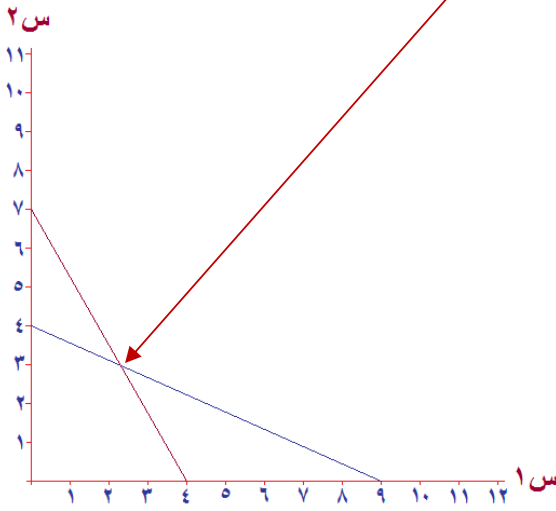
عليه تم شطب (س٢).

$$\text{إدًا... } -٦س١ + ٥س١ = ٢٠ + ٢٤ = -٤ \quad \leq \quad -١س١ = -٤ \quad \leq \quad ١س١ = ٤$$

نقوم الآن بالتعويض في المعادلة الأولى:

$$\text{إذا... } ١٢ = ٢س٢ + (٤ \times ٣) \quad \leq \quad ١٢ = ٢س٢ + ١٢ \quad \leq \quad ٠ = ٢س٢ \quad \leq$$

وعليه فإن أفضل إنتاج هو (٤) علب من (١)



مثال (٢): إدارة التسويق بشركة المراعي لديها الخيار في الإعلان عن منتجاتها، إما عن طريق التلفزيون ويشاهده (٤) مليون شخص لكل إعلان أسبوعياً، أو عن طريق المجلة الأسبوعية والتي يطلع عليها (٢) مليون شخص لكل إعلان. فإذا كانت تكلفة كل إعلان تلفزيوني هي (٧,٥٠٠) ريال، بينما كل إعلان في المجلة الأسبوعية هي (٤,٠٠٠) ريال، وترغب الشركة على الأقل في وضع (٢٠) إلان في المجلة، ولديها (٢٠٠,٠٠٠) ريال كميزانية لجميع الإعلانات خلال العام.

والمطلوب: كم إعلاناً يجب وضعه في كل من التلفزيون والمجلة خلال العام للحصول على أكبر عدد من المشاهدين.

الحل: لتسهيل الحل، نقوم أولاً بكتابة جدول خارجي للمساعدة في الحل، ويؤخذ من معطيات السؤال.

المجلة	التلفزيون	
٢	٤	عدد المشاهدين
٤,٠٠٠	٧,٥٠٠	تكلفة الإعلان

والآن... نكتب المعادلات قبل إجراء أي خطوات للحل، وينتج عن ذلك:

١. نفترض أن عدد إعلانات التلفزيون هو = س١ وأن عدد إعلانات المجلة هو = س٢

فتكون دالة الهدف (أي ما هو مطلوب تحقيقه)، أي أن معطياتها تؤخذ من عدد المشاهدين فتكون:

$$\text{د-هـ} \uparrow (\text{لأنها ربحية}) = ٢س٢ + ٤س١$$

٢. والآن يتم كتابة القيود، أي التعليمات المقررة علينا في السؤال:

$$\text{القيود (١)} = ٢س٢ \leq ٢٠$$

أي: أن لا يقل عدد إعلانات المجلة عن (٢٠) إعلاناً، أي (٢٠) إعلاناً وما فوق.

$$\text{القيود (٢)} = ٧,٥٠٠س١ + ٤,٠٠٠س٢ \geq ٢٠٠,٠٠٠$$

أي: أن يكون مجموع تكاليف الإعلانات أقل من أو تساوي ٢٠٠,٠٠٠ ريال وهي الميزانية التي تم رصدها للمشروع.

٣. والآن يتم كتابة القيد الثالث وهو (قيد عدم السلبية) والذي أشرنا إليه أنه لا يمكن أن يكون المطلوب بالسالب، أي أنه إما صفر (٠) أو أكبر من الصفر (٠). فيكون القيد:

$$\text{س ١ (أو) س ٢} \leq (٠) \quad (\text{أو}) \quad \text{س ١، س ٢} \geq ٠$$

خطوات الحل:

يجب أن نقوم أولاً بتحويل المترajحات التي قمنا بكتابتها إلى معادلات رياضية، ولتحويل المترajحات نقوم بعمل ما يلي، بحيث نضع البيانات موقع المترajحات، وذلك بالتعويض عن (س ١) مرة بالصفر، ونعوض عن (س ٢) مرة أخرى بالصفر.

وقد يسأل سائل: أن قيمة (س ٢) في السؤال محددة بـ (٢٠)، فلماذا عوض عنها بـ (٠)؟ **والجواب:** تلك القيمة إنما هي قيد بذاته وليس له علاقة بالقيد الثاني، أما التعويض بصفر فإنه يتم في القيد الثاني فقط باعتبار أن لدينا مجهولين هما (س ١) و (س ٢) للوصول إلى النقطتين التي سيتم توصيل الخط بينهما والذي سيمثل القيد الثاني على الرسم البياني. أما القيد الأول فإنه معلوم وقيمه (٢٠ ، ٠) ويتم تمثيله على الرسم بخط أفقي موازي للمحور س ١ لأنه قيد مستقل بذاته كما أسلفنا ذكره.

نقوم أولاً بتغيير إشارة (أصغر من أو يساوي) إلى (=) في المترajحات (القيود)، فتصبح:

$$\text{القيد (١)} \quad \text{س ٢} \leq ٢٠ \quad \Rightarrow \quad \text{س ٢} = ٢٠$$

$$\text{القيد (٢)} \quad ٧,٥٠٠ \text{ س ١} + ٤,٠٠٠ \text{ س ٢} \geq ٢٠٠,٠٠٠$$

نقوم الآن بحل المترajحات وفق ما سبق شرحه، فسينتج لدينا:

$$\text{القيد الأول: س ٢} \leq ٢٠ \quad \Rightarrow \quad \text{س ٢} = ٢٠$$

وهنا لن نقوم بأي عمليات تعويضية بإعتباره لا يحتوي إلا على مجهول واحد.

إذاً.. إحداثيات النقطة سوف تكون: (٢٠ ، ٠) وستمثل على الرسم البياني بخط أفقي.

$$\text{القيد الثاني: } ٧,٥٠٠ \text{ س ١} + ٤,٠٠٠ \text{ س ٢} = ٢٠٠,٠٠٠$$

$$\text{س ١} = ٠$$

$$\text{إذاً: } ٢٠٠,٠٠٠ = ٧,٥٠٠ (٠ \times ٧,٥٠٠) + ٤,٠٠٠ \text{ س ٢} \quad \Rightarrow \quad ٢٠٠,٠٠٠ = ٤,٠٠٠ \text{ س ٢}$$

$$\text{س ٢} = ٤,٠٠٠ \div ٢٠٠,٠٠٠ = ٥٠ \quad \Rightarrow \quad ٥٠ = ٤,٠٠٠ \div ٢٠٠,٠٠٠$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٥٠ ، ٠).

نكرر العملية بإقتراض أن (س ٢) هي التي ستساوي الصفر.

قاعدة: بعد استخراج قيمة س ٢ فإنه يخطئ من يقوم بالتعويض عنها لإستخراج س ١ ولكن ينبغي أن تكرر العملية على س ٢ وإفتراضها على أنها (٠) لإستخراج قيمة س ١.

$$\text{س ٢} = ٠$$

$$\text{إذاً: } ٢٠٠,٠٠٠ = ٧,٥٠٠ \text{ س ١} + ٤,٠٠٠ (٠ \times ٤,٠٠٠) \quad \Rightarrow \quad ٢٠٠,٠٠٠ = ٧,٥٠٠ \text{ س ١}$$

$$\text{س ١} = ٧,٥٠٠ \div ٢٠٠,٠٠٠ = ٣,٦ \quad \Rightarrow \quad ٣,٦ = ٧,٥٠٠ \div ٢٠٠,٠٠٠$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٣,٦ ، ٠).

نكرر العملية الآن على دالة الهدف، مع ملاحظة أن (س٢) في هذه المسألة قد تم تحديد قيمتها وتؤخذ من القيد الأول وتساوي (٢٠)، وبالتعويض عنها ينتج لدينا:

$$\text{دها} \uparrow (\text{لأنها ربحية}) = ١س٧,٥٠٠ + ٢س٤,٠٠٠ = ٢٠٠,٠٠٠$$

$$\text{س٢} = ٢٠$$

$$\text{إدًا: } ٢٠٠,٠٠٠ = (٢٠ \times ٤,٠٠٠) + ١س٧,٥٠٠$$

$$٢٠٠,٠٠٠ = ٨٠,٠٠٠ + ١س٧,٥٠٠ \quad \leq$$

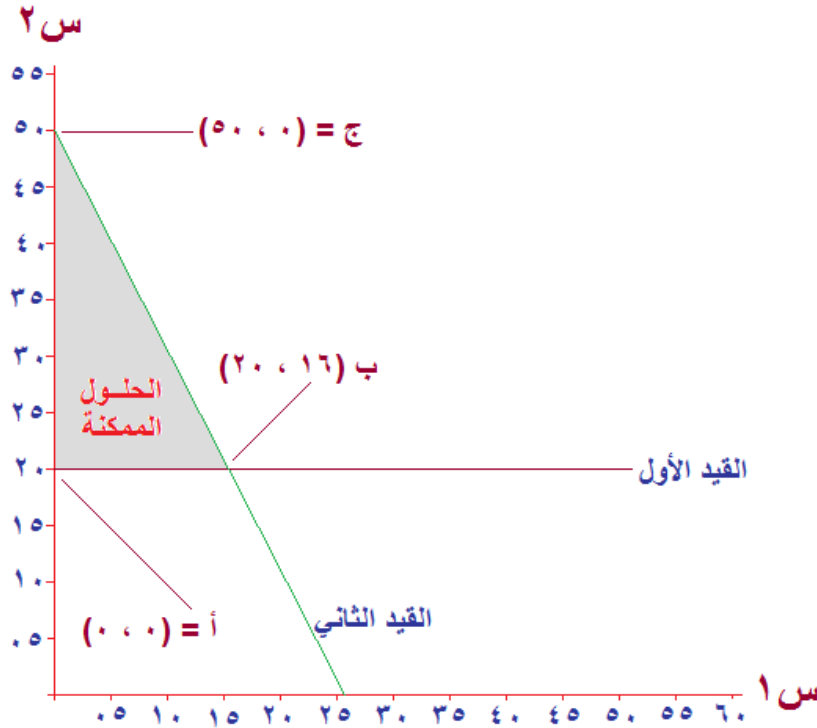
$$٨٠,٠٠٠ - ٢٠٠,٠٠٠ = ١س٧,٥٠٠ \quad \leq$$

$$٧,٥٠٠ \div ١٢٠,٠٠٠ = ١س \quad \leq \quad ١٢٠,٠٠٠ = ١س٧,٥٠٠ \quad \leq$$

$$١٦ = ١س \quad \leq$$

إدًا: في دالة الهدف فإن (س١) = (١٦) (و) (س٢) = (٢٠).

وعليه فإنه إحداثيات نقطة التقاطع بين القيدين هي قيمة دالة الهدف، وإحداثياتها قم تم إيجادها. ونقوم الآن بتمثيل هذه المعلومات (المتغيرات) على الرسم البياني، فينتج لدينا الشكل التالي:



نقوم الآن بالعودة إلى دالة الهدف بعد أن تم تحديد قيم النقاط الثلاث، وإحداثياتها، وذلك للوصول إلى أعلى قيمة (باعتبار أن المسألة ربح، وتكون أقل قيمة في حالة التكاليف)، فينتج لدينا:

عدد المشاهدتين	دالة الهدف = ٢س٢ + ٤س١	النقطة
٤٠,٠٠٠,٠٠٠	$= (٢٠ \times ٢) + (٠ \times ٤)$	أ (٢٠, ٠)
١٠٤,٠٠٠,٠٠٠	$= (٢٠ \times ٢) + (١٦ \times ٤)$	ب (٢٠, ١٦)
١٠٠,٠٠٠,٠٠٠	$= (٥٠ \times ٢) + (٠ \times ٤)$	ج (٥٠, ٠)

وبالتالي، فإن أفضل وأعلى ناتج هو (١٠٤,٠٠٠,٠٠٠) مشاهد، وهو عند النقطة (ب) والتي تنتج لنا:

أن تقوم الشركة بعمل (١٦) إعلان في (س١) وهو التلفزيون و(٢٠) إعلان في (س٢) وهو المجلة الأسبوعية، ليصل عدد المشاهدين إلى تحقيق دالة الهدف بمقدار (١٠٤,٠٠٠,٠٠٠) مشاهد.

=====

مثال (٣): تقوم شركة لصناعة الحقائب الجلدية بإنتاج نوعين من الحقائب، وتتم هذه الحقائب بمرحلتين إنتاجية هي التجميع والتغليف. حيث يبين الجدول التالي وقت وسعر البيع.

والمطلوب: أن توجد عدد الحقائب المنتجة من النوعين للحصول على أكبر عائد ممكن، وذلك بالرسم البياني وتمثيله على الشبكة.

نوع الحقيبة	تجميع	تغليف	سعر البيع
حقبية سفر	١٠	٥	٥٠
حقبية مدرسية	٥	٥	٤٠
الوقت متاح	٤٠	٣٠	

الحل:

في هذه المسألة لن نحتاج إلى عمل جدول للبيانات حيث أنه معطى في السؤال، وما علينا هو أن نكتب المعادلات قبل إجراء أي خطوات للحل، وينتج عن ذلك:

١. نفترض أن حقائب السفر هي = س١ وأن الحقائب المدرسية هي = س٢، وذلك باعتبار أن عدد الحقائب هو المجهول لدينا، والمطلوب الوصول إلى ذلك العدد.

فتكون دالة الهدف (أي ما هو مطلوب تحقيقه)، أي أن معطياتها تؤخذ من عدد الحقائب الذي نبحث عنه، والذي يحقق الربح الأعلى فتكون:

$$\text{د-١} \uparrow (\text{لأنها ربحية}) = ٥٠\text{س}١ + ٤٠\text{س}٢$$

٢. والآن يتم كتابة القيود، أي التعليمات المقررة علينا في السؤال، والتي نقيدها:

$$\text{القيد (١)} = ١٠\text{س}١ + ٥\text{س}٢ \geq ٤٠$$

أي... أن لا يزيد إستهلاك وقت إنتاج عدد من حقائب السفر والحقائب المدرسية في مرحلة التجميع عن (٤٠) دقيقة وهي المدة المتاحة.

$$\text{القيد (٢)} = ٥\text{س}١ + ٥\text{س}٢ \geq ٣٠$$

أي... أن لا يزيد إستهلاك وقت إنتاج عدد من حقائب السفر والحقائب المدرسية في مرحلة التغليف عن (٣٠) دقيقة وهي المدة المتاحة.

٣. والآن يتم كتابة القيد الثالث وهو (قيد عدم السلبية) والذي أشرنا إليه أنه لا يمكن أن يكون المطلوب بالسالب، أي أنه إما صفر (٠) أو أكبر من الصفر (٠). فيكون القيد:

$$\text{س}١ \text{ (أو) } ٢\text{س}٢ \leq (٠) \quad \text{(أو)} \quad \text{س}١, ٢\text{س}٢ \leq ٠$$

خطوات الحل:

يجب أن نقوم أولاً بتحويل المتراجحات (القيود) التي قمنا بكتابتها إلى معادلات رياضية، ولتحويل المتراجحات نقوم بعمل ما يلي، بحيث نضع البيانات موقع المتراجحات، وذلك بالتعويض عن (س١) مرة بالصفر، ونعوض عن (س٢) مرة أخرى بالصفر.

$$\text{القيد (١)} \quad ٤٠ \geq ٢س٥ + ١س١٠ =$$

$$\text{القيد (٢)} \quad ٣٠ \geq ٢س٥ + ١س٥ =$$

نقوم الآن بحل المتراجحات وفق ما سبق شرحه، فسينتج لدينا:

$$\text{القيد الأول: } ٤٠ = ٢س٥ + ١س١٠$$

$$٠ = ١س١٠$$

$$\text{إذاً: } ٤٠ = ٢س٥ + (٠ \times ١٠) \Rightarrow ٤٠ = ٢س٥ \Rightarrow ٤٠ \div ٢ = ٢٠ = س٢ \Rightarrow ٨ = س٢$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٨، ٠).

نكرر العملية بإقتراض أن (س٢) هي التي ستساوي الصفر.

$$\text{إذاً: } ٤٠ = (٠ \times ٥) + ١س١٠ \Rightarrow ٤٠ = ١س١٠ \Rightarrow ٤٠ \div ١ = ٤٠ = س١ \Rightarrow ٤ = س١$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٠، ٤).

الآن... نكرر العملية على القيد الثاني بنفس الطريقة، فينتج لدينا:

$$\text{القيد الثاني: } ٣٠ = ٢س٥ + ١س٥$$

$$٠ = ١س٥$$

$$\text{إذاً: } ٣٠ = ٢س٥ + (٠ \times ٥) \Rightarrow ٣٠ = ٢س٥ \Rightarrow ٣٠ \div ٢ = ١٥ = س٢ \Rightarrow ٦ = س٢$$

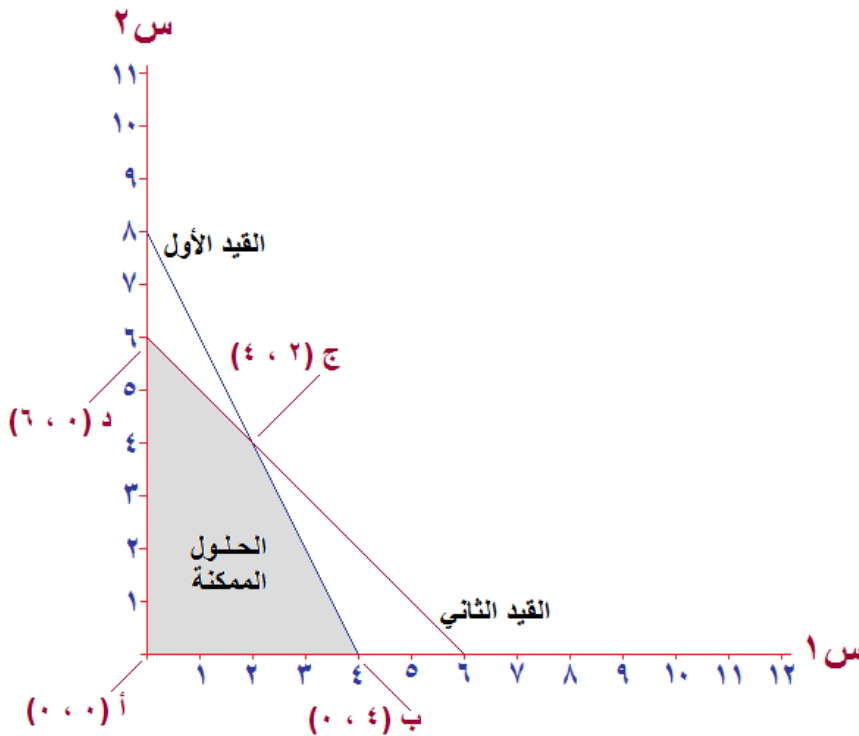
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٦، ٠).

نكرر العملية بإقتراض أن (س٢) هي التي ستساوي الصفر.

$$\text{إذاً: } ٣٠ = (٠ \times ٥) + ١س٥ \Rightarrow ٣٠ = ١س٥ \Rightarrow ٣٠ \div ١ = ٣٠ = س١ \Rightarrow ٦ = س١$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٠، ٦).

نقوم الآن بتمثيل ذلك على الشبكة، ورسمه بيانياً، فينتج لدينا:



حيث أن النقطة (ج) هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني، وللوصول لقيمتها، فإنه لابد من إيجاد إحداثي هذه النقطة جبرياً، وفق ما سبق شرحه، حيث **إذا حدث تقاطع بين الدالتين**. فإن الوصول إلى قيم تلك النقطة، يوجب حل المعادلة للوصول إلى قيم (س١) و (س٢) وفق القاعدة الرياضية التالية:

١. نختار أي (س) سيتم شطبها.
٢. نقوم بعملية ضرب إحدى المعادلات بالعامل المشترك لتلك (س).
٣. وعليه يتم شطب إحداها والوصول إلى قيمة (س) الثانية.

ولشرح ذلك:

$$\text{القيد (١)} = ١٠س١ + ٥س٢ = ٤٠$$

$$\text{القيد (٢)} = ٥س١ + ٥س٢ = ٣٠$$

سنختار (س٢) كي نقوم بشطبها، ولذا فإنهما متساويتان في القيدين إلا أنه ينبغي أن يكون إحداها بالسالب (-) والآخر بالموجب (+) ليتم شطبهما، ولذا فسيتم ضرب القيد الثاني بـ (-١).

ولو أننا كنا قد اخترنا (س١) فإن العامل المشترك بينهما هو (١٠) وعليه فسنعوم بضرب القيد (١) بـ (-١) والقيد الثاني بـ (-٢).

$$\begin{aligned} \text{إذا...} \quad \text{القيد (١)} = ١٠س١ + ٥س٢ = ٤٠ & \quad \leq \quad ١٠س١ + ٥س٢ = ٤٠ \\ \text{القيد (٢)} = (-١) \times (٥س١ + ٥س٢ = ٣٠) & \quad \leq \quad -٥س١ - ٥س٢ = -٣٠ \end{aligned}$$

عليه تم شطب (س٢).

$$\text{إذا...} \quad ١٠س١ - ٥س٢ = ٣٠ - ٤٠ = -١٠ \quad \leq \quad ١٠س١ = ١٠ \quad \leq \quad ١٠س١ = ١٠ \quad \leq \quad ١٠س١ = ١٠ \quad \leq \quad ١٠س١ = ١٠$$

نقوم الآن بالتعويض عن (س١) في المعادلة الأولى:

$$\begin{aligned} \text{إذا...} \quad ٤٠ = ١٠س١ + ٥س٢ & \quad \leq \quad ٤٠ = ١٠س١ + ٥س٢ \\ ٤٠ = ١٠س١ + ٥س٢ & \quad \leq \quad ٤٠ = ١٠س١ + ٥س٢ \\ ٤٠ = ١٠س١ + ٥س٢ & \quad \leq \quad ٤٠ = ١٠س١ + ٥س٢ \end{aligned}$$

إذا.. إحداثيات النقطة هي (س١ ، س٢) وهي: (٢ ، ٤).

نقوم الآن بالعودة إلى دالة الهدف بعد أن تم تحديد قيم النقاط الأربع، وإحداثياتها، وذلك للوصول إلى أعلى قيمة (باعتبار أن المسألة ربح، وتكون أقل قيمة في حالة التكاليف)، فينتج لدينا:

النقطة	دالة الهدف = ١٠س١ + ٥س٢	عدد الحقائق
أ (٠ ، ٠)	$(٠ \times ٤٠) + (٠ \times ٥٠) = ٠$	٠
ب (٠ ، ٤)	$(٠ \times ٤٠) + (٤ \times ٥٠) = ٢٠٠$	٢٠٠
ج (٤ ، ٢)	$(٤ \times ٤٠) + (٢ \times ٥٠) = ٢٦٠$	٢٦٠
د (٦ ، ٠)	$(٦ \times ٤٠) + (٠ \times ٥٠) = ٢٤٠$	٢٤٠

وبالتالي، فإن أفضل وأعلى ناتج هو (٢٦٠) حقيقية، وهو عند النقطة (ج) والتي تنتج لنا:

أن تقوم الشركة بتصنيع (٢) حقيبة سفر وهي التي رمز لها بـ (س١) وتصنيع (٤) حقائب مدرسية وهي التي رمز لها بـ (س٢) وخلال الأوقات التي تم تحديدها للمرحلتين (تجميع وتغليف) لتحقيق أعلى ربحية ممكنة.

مثال (٤): تتوفر لدى إحدى الشركات نوعين من المواد الأولية البديلة وذلك بكميات محدودة، وترغب هذه الشركة في إنتاج نوعين من المنتجات الغذائية وهما (المنتج أ، والمنتج ب). فإذا علمت أن المنتج (أ) يحتاج إلى (٢) وحدة من المادة الأولية الأولى، في حين يحتاج إلى (٦) وحدات من المادة الأولية الثانية حتى يمكن إنتاجه، أما المنتج الثاني (ب) فإنه يحتاج إلى (٤) وحدات من المادة الأولية الأولى، أما إذا قررت الشركة استخدام المادة الأولية الثانية فإن المنتج سوف يحتاج إلى (٣) وحدات. فإذا علمت أن كمية المواد الأولية المتوفرة من النوع الأول هي بحدود (٤٠) وحدة، ومن النوع الثاني (٦٠) وحدة، وأن الربح المتوقع الحصول عليه عند بيع المنتج (أ) هو (١٠) ريالاً، وعند بيع المنتج (ب) هو (٦) ريالاً.

والمطلوب: الحل بطريقة الرسم البياني لتحديد أفضل كمية من المنتج (أ) والمنتج (ب) بما يحقق أكبر كمية من الأرباح للشركة.

الحل: لتسهيل الحل، نقوم أولاً بكتابة جدول خارجي للمساعدة في الحل، ويؤخذ من معطيات السؤال.

الكمية المتاحة	المنتج (ب)	المنتج (أ)	
٤٠	٤	٢	المادة الأولية (١)
٦٠	٣	٦	المادة الأولية (٢)
	٦	١٠	الأرباح

والآن... نكتب المعادلات قبل إجراء أي خطوات للحل، وينتج عن ذلك:

١. نفترض أن المنتج (أ) هو = س١ والمنتج (ب) = س٢.

فتكون دالة الهدف (أي ما هو مطلوب تحقيقه)، أي أن معطياتها تؤخذ من كمية الأرباح فتكون:
د-١) (لأنها تعظيمية) = ١٠س١ + ٦س٢

٢. والآن يتم كتابة القيود لكلا المنتجين وفق ما هو متوفر من المواد الأولية:

$$\text{القيد (١)} = ٢س٢ + ٤س١ \geq ٤٠$$

أي أن: كمية المستهلك من المادة الأولية الأولى في إنتاج المنتج الأول (أ) هي (٢) وفي إنتاج المنتج الثاني (ب) هي (٤) وعلى أساس ألا يتجاوز ذلك ما هو متوفر وكميته (٤٠).

$$\text{القيد (٢)} = ٦س٢ + ٣س١ \geq ٦٠$$

أي أن: كمية المستهلك من المادة الأولية الثانية في إنتاج المنتج الأول (أ) هي (٦) وفي إنتاج المنتج الثاني (ب) هي (٣) وعلى أساس ألا يتجاوز ذلك ما هو متوفر وكميته (٦٠).

٣. والآن يتم كتابة القيد الثالث وهو (قيد عدم السلبية) والذي أشرنا إليه أنه لا يمكن أن يكون الإنتاج بالسالب، أي أنه إما صفر (٠) أو أكبر من الصفر (٠). فيكون القيد:

$$١س١ \text{ (أو) } ٢س٢ \leq (٠) \quad \text{(أو)} \quad ١س١, ٢س٢ \leq ٠$$

خطوات الحل:

يجب أن نقوم أولاً بتحويل المتراجحات (القيود) التي قمنا بكتابتها إلى معادلات رياضية، ولتحويل المتراجحات نقوم بعمل ما يلي، بحيث نضع البيانات موقع المتراجحات، وذلك بالتعويض عن (س١) مرة بالصفر، ونعوض عن (س٢) مرة أخرى بالصفر.

$$\text{القيد (١)} = ١س٢ + ٢س٤ \geq ٤٠ \quad \text{القيد (٢)} = ١س٦ + ٢س٣ \geq ٦٠$$

نقوم الآن بحل المتراجحات وفق ما سبق شرحه، فسينتج لدينا:

$$\text{القيد الأول: } ١س٢ + ٢س٤ = ٤٠$$

$$١س٢ = ٠$$

$$\text{إذاً: } ٤٠ = ٢س٤ + (٠ \times ١٠) \Rightarrow ٤٠ = ٢س٤ \Rightarrow ٢س٤ = ٤٠ \div ٢ = ٢٠ \Rightarrow ١س٢ = ٢٠ \leq ١٠$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (١٠، ٠).

نكرر العملية بإقتراض أن (٢س٢) هي التي ستساوي الصفر.

$$\text{إذاً: } ٤٠ = (٠ \times ٤) + ١س٢ \Rightarrow ٤٠ = ١س٢ \Rightarrow ١س٢ = ٤٠ \div ٢ = ٢٠ \Rightarrow ١س٢ = ٢٠ \leq ٢٠$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٠، ٢٠).

الآن... نكرر العملية على القيد الثاني بنفس الطريقة، فينتج لدينا:

$$\text{القيد الثاني: } ١س٦ + ٢س٣ = ٦٠$$

$$١س٦ = ٠$$

$$\text{إذاً: } ٦٠ = ٢س٣ + (٠ \times ٦) \Rightarrow ٦٠ = ٢س٣ \Rightarrow ٢س٣ = ٦٠ \div ٢ = ٣٠ \Rightarrow ١س٦ = ٣٠ \leq ٢٠$$

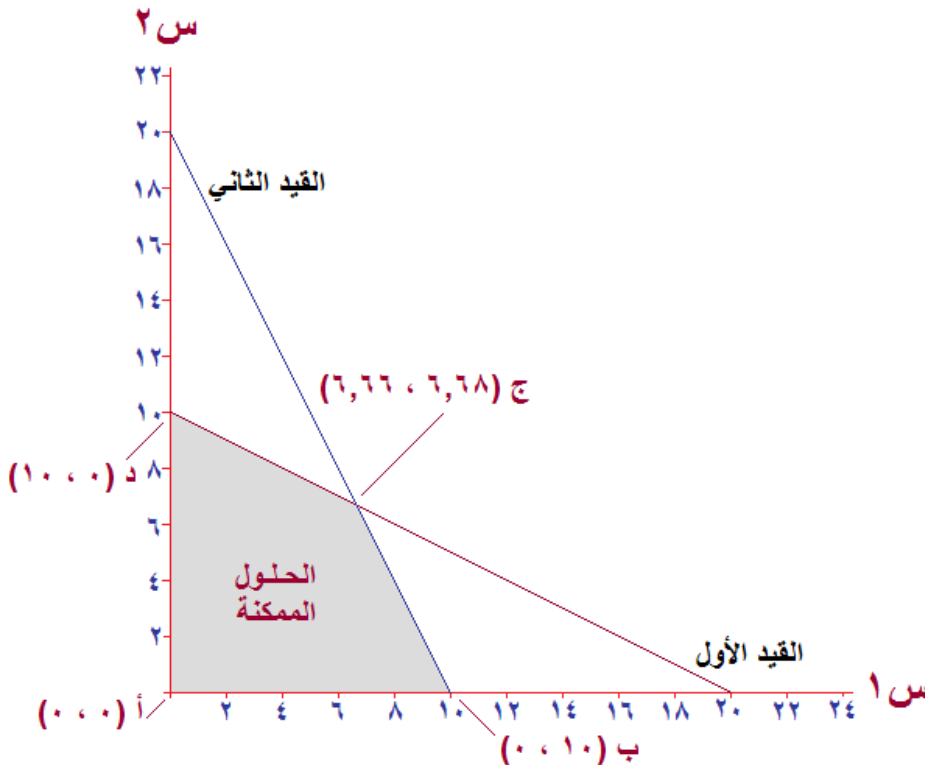
إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٢٠، ٠).

نكرر العملية بإقتراض أن (٢س٦) هي التي ستساوي الصفر.

$$\text{إذاً: } ٦٠ = (٠ \times ٣) + ١س٦ \Rightarrow ٦٠ = ١س٦ \Rightarrow ١س٦ = ٦٠ \div ٢ = ٣٠ \Rightarrow ١س٦ = ٣٠ \leq ١٠$$

إذاً.. إحداثيات النقطة الأولى سوف تكون: (٠، ١٠).

نقوم الآن بتمثيل ذلك على الشبكة، ورسمه بيانياً، فينتج لدينا:



حيث أن النقطة (ج) هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني، وللوصول لقيمتها، فإنه لابد من إيجاد إحداثي هذه النقطة جبرياً، وفق ما سبق شرحه، حيث **إذا حدث تقاطع بين الدالتين**. فإن الوصول إلى قيم تلك النقطة، يوجب حل المعادلة للوصول إلى قيم (س١) و (س٢) وفق القاعدة الرياضية التالية:

١. نختار أي (س) سيتم شطبها.
٢. نقوم بعملية ضرب إحدى المعادلات بالعامل المشترك لتلك (س).
٣. وعليه يتم شطب إحداها والوصول إلى قيمة (س) الثانية.

ولشرح ذلك:

$$\text{القيد (١)} = ١س٢ + ٢س٤ = ٤٠ \quad \text{القيد (٢)} = ١س٦ + ٢س٣ = ٦٠$$

سنختار (س١) كي نقوم بشطبها، ولذا فإن العامل المشترك بينهما هو (٦) لذا فإننا سنقوم بضرب القيد الأول بـ (٣+) وضرب القيد الثاني بـ (١-) للوصول إلى تساوي (س١) في القيدين مع إختلاف الإشارة. ولو أننا كنا قد اخترنا (س٢) فإن العامل المشترك بينهما هو (١٢) وعليه فسنعلم بضرب القيد (١) بـ (٣) والقيد الثاني بـ (٤-).

$$\begin{aligned} \text{إذا...} \quad \text{القيد (١)} \times ٣ &= (١س٢ + ٢س٤) \times ٣ = ٤٠ \times ٣ = ١٢٠ \\ \text{القيد (٢)} \times ١- &= (١س٦ + ٢س٣) \times ١- = ٦٠ \times ١- = -٦٠ \end{aligned}$$

عليه تم شطب (س١).

$$\text{إذا...} \quad ١٢٠ - ١٢٠ = ٢س٣ - ٢س٤ = ٦٠ - ١٢٠ \quad \Rightarrow \quad ٦٠ = ٢س٩ \quad \Rightarrow \quad ٦٠ = ٢س٩ \quad \Rightarrow \quad ٦٠ = ٢س٩ \quad \Rightarrow \quad ٦٠ = ٢س٩$$

نقوم الآن بالتعويض عن (س٢) في القيد الأول:

$$\begin{aligned} \text{إذا...} \quad ٤٠ &= (٦,٦٦ \times ٤) + ١س٢ \quad \Rightarrow \quad ٤٠ = ٢٦,٦٤ + ١س٢ \quad \Rightarrow \quad ١٣,٣٦ = ١س٢ \\ ١٣,٣٦ &= ١س٢ \quad \Rightarrow \quad ٢٦,٦٤ - ٤٠ = ١س٢ \quad \Rightarrow \quad ٢٦,٦٤ - ٤٠ = ١س٢ \quad \Rightarrow \quad ٢٦,٦٤ - ٤٠ = ١س٢ \end{aligned}$$

$$\text{إذا...} \quad ٦,٦٨ = ٢ \div ١٣,٣٦ = ١س٢$$

إذا.. إحداثيات النقطة هي (س١ ، س٢) وهي: (٦,٦٦ ، ٦,٦٨).

نقوم الآن بالعودة إلى دالة الهدف بعد أن تم تحديد قيم النقاط الأربع، وإحداثياتها، وذلك للوصول إلى أعلى قيمة (باعتبار أن المسألة ربح، وتكون أقل قيمة في حالة التكاليف)، فينتج لدينا:

النقطة	دالة الهدف = ١س١٠ + ٢س٦	إجمالي الإنتاج
أ (٠,٠)	$= (٠ \times ٦) + (٠ \times ١٠)$	٠
ب (٠,١٠)	$= (٠ \times ٦) + (١٠ \times ١٠)$	١٠٠
ج (٦,٦٦ ، ٦,٦٨)	$= (٦,٦٦ \times ٦) + (٦,٦٨ \times ١٠)$	١٠٦,٧٦
د (١٠,٠)	$= (١٠ \times ٦) + (٠ \times ١٠)$	٦٠

وبالتالي، فإن أفضل وأعلى ناتج هو (١٠٦,٧٦) وتقرّب إلى (١٠٦) وحدة، وهو عند النقطة (ج):

أي أن على الشركة أن تقوم بتصنيع (٦) وحدات من المنتج (أ) وهو الذي رمز له بـ (س١) وتصنيع (٦) وحدات من المنتج (ب) وهو الذي رمز له بـ (س٢) لتحقيق أعلى ربحية ممكنة، وفق ما توفر في المخازن من مواد أولية.

قاعدة: إذا وجد في السؤال أكثر من متغيرين، منتجين، ...الخ، أي (س١) و(س٢)، كان يوجد لدينا منتج ثالث (س٣) أو متغير رابع (س٤) ...الخ، فإنه لا يمكن حل السؤال بواسطة الرسم البياني، ويتوجب حلها باستخدام الطريقة المبسطة (سمبلكس Simplex).

◀◀◀◀◀◀ ▶▶▶▶▶▶▶▶

(ملحق التمارين)

تمرين (١).

يزمّع المصنع السعودي للأخشاب صناعة نوعين من المنتجات في خط إنتاجها لهذا الشهر وهي (دواليب ومقاعد). يباع الدولار بمبلغ (١,٢٠٠) ريال والمقعد بمبلغ (٢٠٠) ريال. ويكلف الدولار المصنع (٤٥٠) ريال للعمالة، و(١٥٠) ريال للمواد الأولية، ويكلف المقعد (٥٠) ريال للمواد الأولية، و(٣٠) ريال للعمالة، ويتطلب الدولار (٣) ساعات في قسم التجميع و(٢) ساعة في قسم التهيئة، ويتطلب المقعد (٢) ساعة في قسم التجميع و(١) ساعة في قسم التهيئة. فإذا كان الوقت المتاح لهذه المنتجات هو (٣٦) ساعة في قسم التجميع، و(٢٥) ساعة في قسم التهيئة، وأن على الشركة ألا يقل إنتاجها من المقاعد عن (٥) مقاعد.

والمطلوب: أوجد أعلى ربحية يمكن أن تحققها الشركة من مبيعاتها من خلال الرسم البياني.

◀◀◀◀◀◀ ▶▶▶▶▶▶▶▶

تمرين (٢).

يقوم مطعم الفلاح بتقديم وجبتين مختلفتين من الأطعمة، حيث يربح من الوجبة الأولى (٤٠) ريال ومن الوجبة الثانية (٥٠) ريال، وتحتوي كل وجبة على مقادير معينة من المواد الغذائية، بحيث أن الوجبة الأولى تحتوي على (١) كجم من لحم الغنم و(٢) كجم من الخضروات والفواكه، وعلى (١) كجم من النشويات. بينما تحتوي الوجبة الثانية على (٢) كجم من لحم الغنم و(١) كجم من النشويات، و(١) كجم من الخضروات والفواكه. إذا علمت أن ما يتوفر لدى المطعم هو (٤٠) كجم من لحم الغنم، ومثلها من الخضروات في حين يتوفر (٣٠) كجم من النشويات. ويرغب في الحصول على أكبر ربح ممكن.

والمطلوب: مجال الربح الذي يمكن الحصول عليه من الوجبة الأولى والوجبة الثانية وذلك من خلال الرسم البياني.

الفصل الثالث: نماذج البرمجة الخطية - الطريقة المبسطة سمبلكس Simplex

هي إمتداد لحل مسائل البرمجة الخطية عن طريق استخدام الطريقة المبسطة (سمبلكس Simplex)، وفي هذه الحالة، وتقوم هذه الطريقة بحل جميع المسائل سواء بمتغيرين أو أكثر، بخلاف الرسم البياني والذي يقوم بحل المسائل ذات المتغيرين فقط. ويقتضي في حالة الحل بالطريقة المبسطة الإنتباه الجيد أولاً، وكتابة جميع القيود كما سبق شرحه من قبل في الرسم البياني قبل البدء في أي عمل، إضافة إلى أن عمل جدول لبيانات المسألة والذي يساعد كثيراً لكتابة تلك القيود، ومن ثم ضرورة تحويل تلك المترajحات (القيود) إلى معادلات كما سبق، ولكن مع إختلاف بسيط يقضي بإدخال عناصر محددة بخلاف ما كان في الرسم البياني، وذلك باتتباع قواعد محددة وهامة جداً وهي:

١. عندما تكون المترajحة (أصغر من أو يساوي) (\geq) . فإنه من الضروري أن نقوم بإضافة (+) متغير جديد ويسمى (راكد).
٢. عندما تكون المترajحة (أكبر من أو يساوي) (\leq) . فإنه من الضروري أن نقوم بطرح (-) متغير جديد ويسمى (فائض) وإضافة (+) متغير جديد ويسمى (وهمي).
٣. عندما تكون المترajحة على شكل (تساوي) $(=)$. فإنه من الضروري أن نقوم بإضافة (+) متغير جديد ويسمى (وهمي).

أمثلة توضيحية.

١. إذا كان لدينا المترajحة التالية: $١٠ \geq ٢س٢ + ١س٣$ في المترajحة أصغر من أو يساوي (\geq) . إذاً **لا بد من إضافة متغير (راكد)**. بينما لم نكن نضيف أي متغيرات إضافية عند التعامل مع هذه المترajحة في الرسم البياني. فتكون المعادلة هي: $١٠ = ٢س٢ + ١س٣ + (راكد)س٣$
 ٢. إذا كان لدينا المترajحة التالية: $١٠ \leq ٢س٢ + ١س٣$ في المترajحة أكبر من أو يساوي (\leq) . إذاً **لا بد من طرح متغير (فائض) وإضافة متغير (وهمي)**. بينما لم نكن نضيف أي متغيرات إضافية عند التعامل مع هذه المترajحة في الرسم البياني. فتكون المعادلة هي: $١٠ = ٢س٢ + ١س٣ - (فائض)س٣ + (وهمي)س٥$
 ٣. إذا كان لدينا المترajحة التالية: $١٠ = ٢س٢ + ١س٣$ في المترajحة يساوي $(=)$. إذاً **لا بد من إضافة متغير (وهمي)**. بينما لم نكن نضيف أي متغيرات إضافية عند التعامل مع هذه المترajحة في الرسم البياني. فتكون المعادلة هي: $١٠ = ٢س٢ + ١س٣ + (وهمي)س٦$
- لاحظ أن الراكد ألحق به (س٣) والفائض ألحق به (س٤) والوهمي الملحق به ألحق به (س٥) والوهمي الأخير ألحق به (س٦) وذلك بسبب وجود متغيرين بالأصل هما (س١) و(س٢). أما في حالة وجود ثلاث متغيرات في السؤال (س١، س٢، س٣) فسيصبح المتغير الراكد (س٤) والفائض (س٥) والوهمي الملحق بالفائض (س٦) والوهمي الأخير (س٧).

قاعدة: دائماً وأبداً لتحويل المترajحات إلى معادلات رياضية:

١. إذا كان في المترajح أصغر من أو يساوي (\geq) يضاف (+) متغير راكد.
٢. إذا كان في المترajح أكبر من أو يساوي (\leq) يطرح (-) متغير فائض ويضاف (+) متغير وهمي.
٣. إذا كان في المترajح يساوي $(=)$ يضاف (+) متغير وهمي.

ولمزيد من التوضيح، نعود إلى المثال السابق (مثال ١)، ونقوم بحله بطريقة السمبلكس.

هذا العمل وقف لله تعالى لا يجوز بيعه أو الاتجار به، وهو حق لكل مسلم ومسلمة، ويسمح بنسخه وتداوله بشكل مجاني

مثال (١): شركة لإنتاج العطور ترغب في إنتاج نوعين من علب العطور (أ) و(ب). سعة (أ) = ١ لتر. وسعة (ب) = ٢ لتر وكان كلا المنتجين يمران بمرحلتين للإنتاج. فإذا علمنا أن المنتج (أ) يستغرق (٣) دقائق في المرحلة الأولى (٥) دقائق في المرحلة الثانية. أما المنتج (ب) فيستغرق في المرحلة الأولى (٢) دقيقة وفي المرحلة الثانية (٤) دقائق. وكان الوقت المتاح الإجمالي للمرحلة الأولى هو (١٢) دقيقة وفي المرحلة الثانية (٢٠) دقيقة. وكان ربح المنتج (أ) هو (٣) ريالات والمنتج (ب) هو (٤) ريالات.

والمطلوب: معرفة الكمية التي يجب إنتاجها من كلا المنتجين لكي تكون أرباح الشركة أكبر ما يمكن.

الحل:

لتسهيل الحل، نقوم أولاً بكتابة جدول خارجي للمساعدة في الحل، ويؤخذ من معطيات السؤال.

الوقت المتاح	المنتج (ب)	المنتج (أ)	
١٢	٢	٣	مرحلة الإنتاج ١
٢٠	٤	٥	مرحلة الإنتاج ٢
	٤	٣	الأرباح

والآن... نكتب المعادلات قبل إجراء أي خطوات للحل، وينتج عن ذلك:

١. نفترض أن المنتج (أ) هو = س١ والمنتج (ب) = س٢، وذلك باعتبار أن كمية الإنتاج هي المجهولة لدينا، والمطلوب الوصول إلى ذلك العدد.

فتكون دالة الهدف **(أي ما هو مطلوب تحقيقه)**، أي أن معطياتها تؤخذ من الكمية التي تحقق لنا الأرباح المنشودة فتكون:

$$\text{دھ} \uparrow (\text{لأنها ربحية}) = ٣س١ + ٤س٢$$

٢. والآن يتم كتابة القيود لكلا المنتجين بمرحلتين وكل مرحلة لها وقت محدد:

$$\text{القيود (١) للمرحلة الأولى} = ٣س١ + ٢س٢ \geq ١٢$$

أي... أن في المرحلة الأولى: يستغرق س١ (٣) دقائق وس٢ (٢) دقيقة ويجب أن يكون الإنتاج في أقل من (١٢) دقيقة وهو المتوفر من الوقت.

$$\text{القيود (٢) للمرحلة الثانية} = ٥س١ + ٤س٢ \geq ٢٠$$

أي... أن في المرحلة الثانية: يستغرق س١ (٥) دقائق وس٢ (٤) دقائق ويجب أن يكون الإنتاج في أقل من (٢٠) دقيقة وهو المتوفر من الوقت.

٣. والآن يتم كتابة القيد الثالث وهو (قيد عدم السلبية) والذي أشرنا إليه أنه لا يمكن أن يكون الإنتاج بالسالب، أي أنه إما صفر (٠) أو أكبر من الصفر (٠). فيكون القيد:

$$س١ \geq ٠ \quad (\text{أو}) \quad س٢ \geq ٠ \quad (\text{أو})$$

خطوات الحل:

يجب أن نقوم أولاً بتحويل المترajحات (القيود) التي قمنا بكتابتها إلى معادلات رياضية، ولتحويل المترajحات نقوم بعمل ما يلي، بحيث نضع البيانات موقع المترajحات، ونلاحظ هنا أن المترajحتين هما أصغر من أو يساوي (\geq) أي أنه لابد من **إضافة متغير (راكد)**. فينتج لدينا:

$$\text{القيد (١): } ١٢ = ٣ \text{ (راكد)س} + ٢ \text{س} + ١ \text{س} = ١٢$$

$$\text{القيد (٢): } ٢٠ = ٤ \text{ (راكد)س} + ٢ \text{س} + ١ \text{س} = ٢٠$$

- الآن، نقوم بإنشاء (الجدول المبدئي) وهو جدول يعبر عن الحالة الصفرية، ويتكون من:
١. المتغيرات الأساسية. وهي جميع المتغيرات المضافة (أي التي أضفناها لتكوين المعادلة) في القيود ماعدا المتغيرات التي تحمل الإشارة سالب (-). أي (الراكد والفائض والوهمي) ما لم يكن سالباً.
 ٢. المتغيرات الغير أساسية. هي جميع القيود (المتغيرات) التي توجد في المعادلتين الناتجة لدينا، وسواء أضفناها أو لم نصفها، أي جميع السينات (س١، س٢، س٣، س٤، ... الخ).
 ٣. الكمية. وهي الكمية التي يتم إنتاجها في المعادلة التي تم إضافة المتغير الجديد لها. بمعنى: الكمية في المعادلة التي تم تسجيل المتغير الأساسي في الجدول المبدئي. فمثلاً: س٣ ستكون كميتها ١٢، وس٤ ستكون الكمية ٢٠.
 ٤. الربح.
 ٥. النسبة.

إضافة إلى ذلك، فإنه يتم تعديل دالة الهدف (ده) بحيث يضاف لها جميع المتغيرات الجديدة (راكد) (فائض) (وهمي) بغرض الوصول إلى الربح والتكلفة.

قاعدة: عند تغيير دالة الهدف بعد إضافة جميع المتغيرات، فإننا نعطي المتغير (راكد) والمتغير (فائض) دائماً القيمة (صفر) أما (وهمي) فيعطى دائماً (م).

على ذلك فإن دالة الهدف سوف تصبح:

$$\text{ده} \uparrow (\text{لأنها ربحية}) = ٣ \text{س} + ١ \text{س} + ٢ \text{س} + ٣ \text{س} + ٤ \text{س}$$

لأن المتغيران المضافان هما (راكد) ولو أن أحدهما (وهمي) فيعطى القيمة (م).

قاعدة: بعد تعديل دالة الهدف (ده) بإضافة المتغيرات الجديدة لها، فيصبح رمزها (رل).

$$\text{إذاً: رل} = ٣ \text{س} + ١ \text{س} + ٢ \text{س} + ٣ \text{س} + ٤ \text{س}$$

قاعدة: قيمة الربح أو التكلفة في الجدول هي عبارة عن قيمة العنصر (س) في دالة الهدف (ده) وهي (=) (رل) وهي (=) الربح وهي (=) التكلفة.

عليه فإن (تكلفة أو ربح) (س٣) في الجدول هي قيمتها في الدالة، وقيمتها في الدالة هي (٠). وكذلك (س٤) فإن قيمتها هي (٠).

$$\text{القيد (١): } ١٢ = ٣ \text{ (راكد)س} + ٢ \text{س} + ١ \text{س} = ١٢$$

$$\text{القيد (٢): } ٢٠ = ٤ \text{ (راكد)س} + ٢ \text{س} + ١ \text{س} = ٢٠$$

ملاحظة: توضع معلومات (رل) في أعلى الجدول دائماً.

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
	٠	٠	١	٢	٣	س٣
	٠	١	٠	٤	٥	س٤

قاعدة: قيم الكمية في الجدول المبني فقط هي الطرف الأيسر من القيد.

يلاحظ أن المعلومات (القيم) أمام (س٣) و(س٤) أخذت من ذات المعادلة الأولى والثانية، أما الربح أو التكلفة فأخذت من قيمتها في دالة الهدف وهي نفسها في المعادلتين.

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

الآن... نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو (رج) وهو ما يسمى بـ(مجموع ربح الظل) وهو يساوي مجموع ربح الحالة في نفس الجدول. وذلك بضرب (الربح أو التكلفة) \times جميع القيم المقابلة له في ذلك الصف، ثم جمع كامل نتائج العمود. فينتج:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
٠	١٢	٠	١	٢	٣	س٣
٠	٢٠	١	٠	٤	٥	س٤
						ظل س٣

كرر نفس العملية على باقي قيم المتغيرات الأساسية

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
	١٢	٠	١	٢	٣	س٣
	٢٠	١	٠	٤	٥	س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٣
	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	رج

ربح الظل (ظل) للعنصر = قيم الربح أو التكلفة (رل★) \times عنصر ذلك الصف، أي أن نقوم بضرب قيم (رل★) ونضع النتائج في صف واحد وهو الذي سيمثل ربح الظل لذلك العنصر (العنصر).

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية	٠	٠	٤	٣	رل
			المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
			س ٤	س ٣	س ٢	س ١	
	٠	١٢	٠	١	٢	٣	س ٣
	٠	٢٠	١	٠	٤	٥	س ٤
		٠	٠	٠	٠	٠	ظل س ٣
		٠	٠ -	٠ -	٠ -	٠ -	ظل س ٤
		٠	٠	٠	٠	٠	رج
			= ٠	= ٠	= ٠	= ٠	رل - رج

الآن... نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو عبارة عن (رج) مطروحاً منه (رج). فينتج لدينا:

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل		
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س ٤	س ٣	س ٢	س ١			
	٠	١٢	٠	١	٢	٣	س ٣		
	٠	٢٠	١	٠	٤	٥	س ٤		
		٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س ٣		
		٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س ٤		
		٠	٠	٠	٠	٠	رج		
			٠	٠	٤	٣	رل - رج		

الآن... يجب علينا أن نخرج أحد العناصر (صف) ويسمى **(العنصر الخارج)** ونقوم بإدخال عنصر جديد (عمود) ويسمى **(العنصر الداخل)** حيث أن الناتج النهائي الذي حصلنا عليه من (رج - رج) هو ناتج موجب.

قاعدة: في حالة مسائل **الربحية** يجب أن نستمر في عمل الجداول إلى أن يكون كامل صف (رج - رج) إما صفر (٠) أو نتيجة سالبة (-). وفي حالة **التكاليف** إما صفر (٠) أو موجبة (+) وإلا وجب علينا تكرار العمل عدة مرات للوصول إلى هذه النتيجة.

الملاحظ في الصف الأخير من الجدول، هو أنه لا يزال لدينا عناصر موجبة، ويجب أن نصل إلى أن تكون جميع النتائج إما (٠) أو سالبة.

العنصر الداخل: هو العمود الذي أعطى أعلى نتيجة في حقل (رج - رج) باعتبار أن المسألة أرباح.
العنصر الخارج: هو الصف الذي أعطى أقل نتيجة في حقل (النسبة).

قاعدة: **العنصر الداخل** هو (العمود) الذي أعطى أعلى نتيجة في (رج - رج) في حالة الأرباح والأقل الأفضل في حالة التكاليف.

يحدد أولاً **العنصر الداخل**، وذلك للوصول إلى **العنصر الخارج**.

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
	١٢	٠	١	٢	٣	س٣
	٢٠	١	٠	٤	٥	س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٣
	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٤
		٠	٠	٠	٠	رج
		٠	٠	٤	٣	رل - رج

إذاً عنصر س٢ هو العنصر الداخل حيث أنه أعطى أعلى نتيجة موجبة (٤) في حقل (رل - رج). وعليه فإننا لنحدد العنصر الخارج يجب أن نقسم الكمية على مقدار ذلك العنصر في العمود المحدد. أي أن:

- نسبة س٣ ستكون (الكمية (١٢) ÷ العنصر المحدد في العمود الداخل (٢) = ٦).
- نسبة س٤ ستكون (الكمية (٢٠) ÷ العنصر المحدد في العمود الداخل (٤) = ٥).

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
=	١٢ ÷	٠	١	٢	٣	س٣
=	٢٠ ÷	١	٠	٤	٥	س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٣
	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٤
		٠	٠	٠	٠	رج
		٠	٠	٤	٣	رل - رج

قاعدة: العنصر الخارج هو (الصف) الذي أعطى أقل نتيجة في (النسبة) سواء كان ذلك في الأرباح أو التكاليف.

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
٦	١٢	٠	١	٢	٣	س٣
٥	٢٠	١	٠	٤	٥	س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٣
	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٤
		٠	٠	٠	٠	رج
		٠	٠	٤	٣	رل - رج

وبناء على ذلك يمكننا الآن أن نحدد العنصر الخارج، وسيكون (س٤) لأنه أعطى أقل نتيجة.

قاعدة: النسبة = الكمية ÷ القيمة المقابلة لها في العنصر الداخل، ثم نختار المتغير الذي يحتوي على أقل نسبة.

إذاً سيخرج (س٤) من صفوف الجدول وسيحل محله (س٢). ولكن ... كيف سيحدث ذلك؟

قاعدة: لإخراج العنصر الخارج وإدخال العنصر الداخل فيجب قسمة جميع القيم في الصف الخارج على نقطة الإرتكاز للوصول إلى قيم الصف الداخل. أي (قيم العنصر الخارج ÷ نقطة الإرتكاز).

نقطة الإرتكاز: هي النقطة التي يتقاطع عندها عمود العنصر الداخل مع صف العنصر الخارج، ويطلق في هذه العملية على العنصر الداخل (س) اسم الصف المحوري الجديد.

الربح أو التكلفة (رل*)	الكمية	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
٥	٢٠	١	٠	٤	٥	العنصر الخارج

÷ ÷ ÷ ÷ ÷

نقطة الإرتكاز ٤

الربح أو التكلفة (رل*)	الكمية	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
						العنصر الداخل

عليه فإن نقطة الإرتكاز في الجدول هو الرقم (٤) ويجب علينا أن نقسم جميع عناصر (س٤) على (٤) لنصل إلى عناصر (قيم الصف للعنصر (س٢) الجديد).

الربح أو التكلفة (رل*)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
٤	٤/٢٠	٤/١	٤/٠	٤/٤	٤/٥	س٢

طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر الداخل:

١. سجل جميع قيم صف العنصر الخارج (المستبعد) كما هي متبوعة بعلامة (÷).

٢. سجل بعد علامة (÷) قيمة نقطة الإرتكاز.

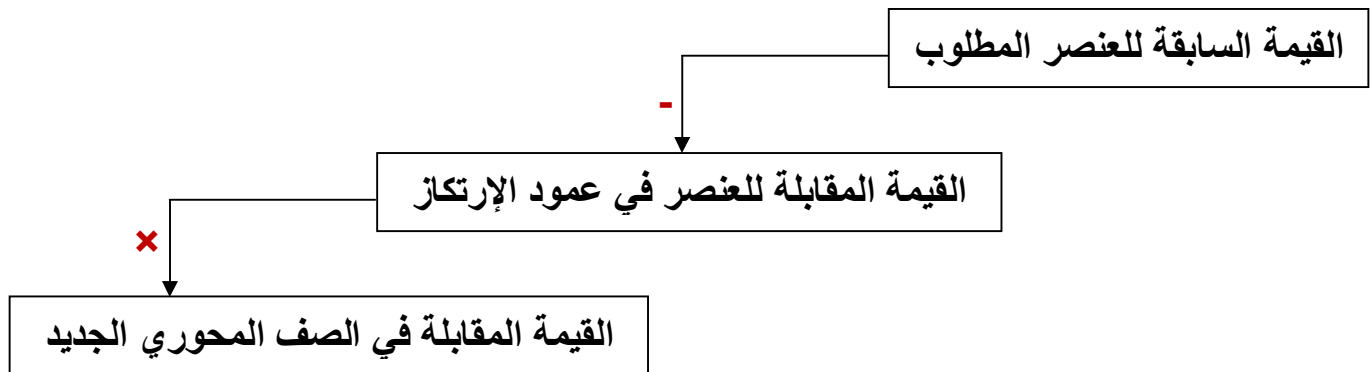
٣. أوجد ناتج هذه العملية في كل خانة صف على حدة.

يجب الآن استخراج قيم العنصر الذي لم يتم إخراجها ويكون ذلك وفقاً للقاعدة التالية.

قيم العنصر القديم الذي سيظل في الجدول = القيمة القديمة في ذلك الصف - (القيمة المقابلة لنقطة الارتكاز \times القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد) وعلى أن يتم استخراج الناتج بين القوسين ثم يطرح من القيمة القديمة في ذلك الصف.

طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) الذي لم يتم استبعاده:

١. سجل جميع القيم السابقة كما هي متبوعة بعلامة (-) ثم افتح قوس.
٢. سجل بعد القوس القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز السابق متبوعاً بعلامة (x).
٣. سجل بعد (x) جميع قيم الصف الجديد الذي تم إدخاله (الصف المحوري) ثم أغلق القوس.
٤. هام جداً .. أوجد ناتج ما بين القوسين ثم أطرح ذلك الناتج من الرقم السابق للقوسين.

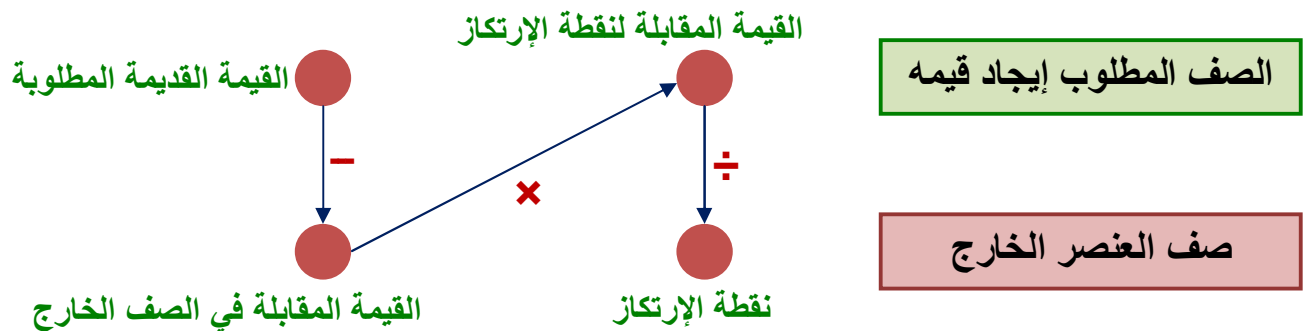


طريقة مبسطة أخرى لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم):

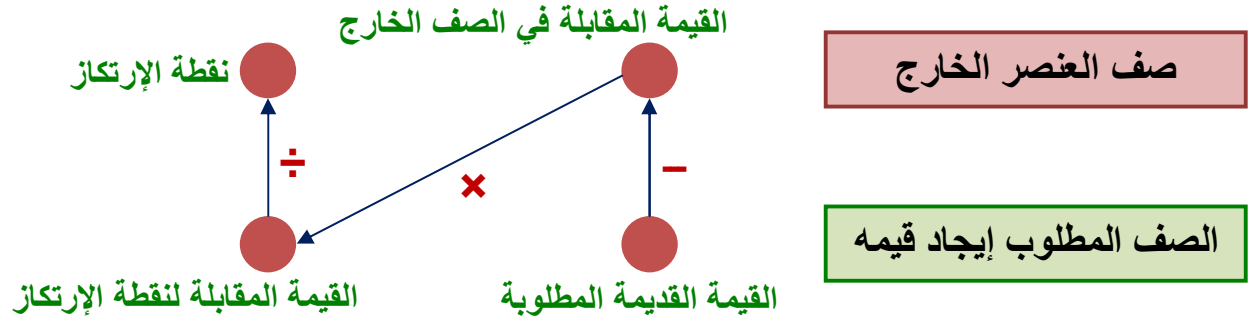
القيمة القديمة للعنصر - القيمة المقابلة لها في الصف الخارج \times القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز \div نقطة الارتكاز

وهي طريقة أبلغني بها أحد الزملاء نقلاً عن الأستاذ أحمد الغزالي ويطلق عليها طريقة (N) المقلوبة. ويوضح الرسم كيفية استخراج قيمة صف العنصر القديم (الصف القديم) الذي لم يتم استبعاده

في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أسفل الصف المطلوب إيجاد قيمه:



في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أعلى الصف المطلوب إيجاد قيمه:



ووفق هذه الطريقة: فإن قيمة الخلية التي يتقاطع عندها العنصر الداخل (الصف المحوري الجديد) مع العمود الداخل (السابق) لابد وأن تساوي (١) دائماً وأبداً، وتكون كافة قيم العناصر الأخرى (الصفوف الأخرى) في ذلك العمود (٠) بشكل دائم ومباشر.

الحل بالطريقة الأولى وفق القانون:

رل	٣	٤	٠	٠	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية							
	س١	س٢	س٣	س٤	س٤			
س٢	٤/٥	١	٠	٤/١	٤/١	٥	٤	
س٣	(٤/٥×٢) ٢/١ =	(٤/٤×٢) ٠ =	(٤/٠×٢) ١ =	(٤/١×٢) ٢/١ =	(٤/١×٢) ٢/١ =	-١٢ (٤/٢×٢) ٢ =	٠	

الحل بالطريقة الثانية (N) المقلوبة:

رل	٣	٤	٠	٠	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية							
	س١	س٢	س٣	س٤	س٤			
س٣	٤/٢× ٢/١ =	٠	٤/٢× ١ =	٤/٢× ٢/١ =	٤/٢× ٢/١ =	٢٠-١٢ ٤/٢× ٢ =	٠	
س٢	٤/٥	١	٠	٤/١	٤/١	٥	٤	

ونجد أن الطريقتان قد أدت إلى نفس النتيجة.

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

حيث أن الربح أو التكلفة لـ (س٢) وهي (٤) موضحة في (رل). والربح والتكلفة لـ (س٣) هي (٠) من دالة الهدف باعتبارنا أضفناه وهو غير واقع.

الآن... نقوم باستخراج متغير (رج) وهو ما يسمى بـ (مجموع ربح الظل) وهو يساوي مجموع ربح الحالة في نفس الجدول. وذلك بضرب (الربح أو التكلفة) \times جميع القيم المقابلة له في ذلك الصف، ثم جمع كامل نتائج العمود. فينتج:

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية				الربح أو التكلفة (رج)	النسبة (0)
	س ١	س ٢	س ٣	س ٤		
س ١	٠	٠	٠	٠	٠	٠
س ٢	٠	٠	٠	٠	٠	٠
س ٣	٠	٠	٠	٠	٠	٠
س ٤	٠	٠	٠	٠	٠	٠
ظل س ١	٠	٠	٠	٠	٠	٠

كرر نفس العملية على باقي قيم المتغيرات الأساسية

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية				الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
	س ١	س ٢	س ٣	س ٤			
س ٢	٤/٥	١	٠	٤/١	٥	٤	
س ٣	٢/١	٠	١	٢/١-	٢	٠	
ظل س ٢	$(٤/٥) \times ٤$	١×٤	٠×٤	$(٤/١) \times ٤$	٥×٤		
ظل س ٣	$(٢/١) \times ٠$	٠×٠	١×٠	$(٢/١-) \times ٠$	٢×٠		

ربح الظل (ظل) للعنصر = قيم الربح أو التكلفة (رج) \times عنصر ذلك الصف، أي أن نقوم بضرب قيم (رج) ونضع النتائج في صف واحد وهو الذي سيمثل ربح الظل لذلك العنصر (العنصر).

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير أساسية				الكمية	الربح أو التكلفة (رج★)	النسبة (0)
	س١	س٢	س٣	س٤			
سX							
سY							
ظل سX							
ظل سY	-	-	-	-			
رج							
رج - رج							

المتغيرات الأساسية	١س	٢س	٣س	٤س	المتغيرات غير الأساسية		
					٠	٠	٠
					رل	٣	٤
س٢	٤/٥	١	٠	٤/١	٥	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (٥)
س٣	٢/١	٠	١	-٢/١	٢		
ظ.ل س٢	٥	٤	٠	١	٢٠		
ظ.ل س٣	٠	٠	٠	٠	٠		
رج	٥=٠+٥	٤=٠+٤	٠=٠+٠	١=٠+١	٢٠=٠+٢٠		

الآن... نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو عبارة عن (رل) مطروحاً منه (رج). فينتج لدينا:

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٤	٣	رل		
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٤	س٣	س٢	س١			
	٤	٥	٤/١	٠	١	٤/٥	س٢		
	٠	٢	٢/١-	١	٠	٢/١	س٣		
		٢٠	١	٠	٤	٥	ظب س٢		
		٠	٠	٠	٠	٠	ظب س٣		
		٢٠	١	٠	٤	٥	رج		
			١- = ١-٠	٠ = ٠-٠	٠ = ٤-٤	٢- = ٥-٣	رل - رج		

نلاحظ هنا أننا وصلنا إلى نتائج (نهاية الجدول) وهي إما (٠) صفر أو (-) سالب. وبالتالي تكون المسألة قد إنتهت بإعتبارها أرباح. أما في حالة التكاليف فيجب أن نصل إلى نتائج إما (٠) أو موجب (+) لتنتهي المسألة، وإلا فإننا سنضطر إلى عمل جدول ثاني وثالث إلى أن نصل للنتائج المحددة.

وبالتالي فإن ما هو واضح من الجدول يدل على أن من المفترض أن ينتج المصنع (٥) عبوات من (س٢) لتحقيق أعلى معدل ربح حسبما هو موضح في الجدول، أما إنتاجه من (س٣) فسيؤدي إلى أرباح قدرها (٠) وبالتالي فإن إنتاج (س٢) هو الأفضل.

مثال (٢): شركة ترغب في صناعة نوع من العطور مكون من عنصرين بمقدار ١٥٠ كيلوغرام، علماً بأن تكلفة الكيلوغرام من العنصر الأول (أ) هي (٥) ريال ومن العنصر الثاني (ب) هي (٨) ريال، وكانت الشركة ترغب في أن تستخدم على الأقل (٦٠) كيلوغرام من العنصر (ب) وألا تزيد الكمية المستخدمة من العنصر (أ) عن (٨٠) كيلوغرام.

والمطلوب: معرفة الكميات التي يجب استخدامها من (أ) و(ب) إذا ما أرادت الشركة تقليل التكاليف.

الحل: كما سبق شرحه. لابد أولاً من القيام بثلاث خطوات (كتابة الدالة) (كتابة المتراجحات) (كتابة قيد عدم السلبية). ويجب هنا الانتباه إلى أن المطلوب هو تكاليف وليس ربح.

١. نفترض أن المنتج (أ) هو = س ١ والمنتج (ب) = س ٢

فتكون دالة الهدف هي: $5س١ + ٨س٢$ ↓ (لأنها تكاليف)

٢. والآن يتم كتابة القيود ولكن يجب ملاحظة أن الكمية المطلوب إنتاجها هي (١٥٠) كيلو غرام. إذاً فإن مجموع (أ) و (ب) يجب أن يكون مساوي لـ (١٥٠) كيلو غرام. وتكون القيود:

$$\text{القيود (١)} = \text{س}١ + \text{س}٢ = ١٥٠$$

أي أن: المجموع الكلي للإنتاج يساوي (١٥٠) كيلو غرام.

$$\text{القيود (٢)} = \text{س}٢ \leq ٦٠$$

وذلك حسبما جاء في السؤال: ترغب في أن تستخدم على الأقل (٦٠) كيلو غرام من العنصر (ب).

$$\text{القيود (٣)} = \text{س}١ \geq ٨٠$$

وذلك حسبما جاء في السؤال: وألا تزيد الكمية المستخدمة من العنصر (أ) عن (٨٠) كيلو غرام.

٣. الآن... يتم كتابة القيد الثالث وهو (قيد عدم السلبية) والذي أشرنا إليه أنه لا يمكن أن يكون الإنتاج بالسالب، أي أنه إما صفر (٠) أو أكبر من الصفر (٠). فيكون القيد:

$$\text{س}١ \geq ٠ \text{ (أو) } \text{س}٢ \geq ٠.$$

خطوات الحل:

يجب أن نقوم أولاً بتحويل المترajحات التي قمنا بكتابتها إلى معادلات رياضية، ونلاحظ هنا أن المترajحة الأولى (القيد الأول) فهي تساوي (=) فلا بد من **إضافة متغير وهمي**. أما المترajحة الثانية (القيد الثاني) فهي أكبر من (\leq) فلا بد من **حذف (-) متغير (فائض) وإضافة (+) متغير (وهي)**. أما المترajحة الثالثة (القيد الثالث) فهي أصغر من (\geq) فلا بد من **إضافة متغير (راكد)**. فتكون النتيجة:

قاعدة: دائماً وأبداً لتحويل المترajحات إلى معادلات رياضية:

١. إذا كان في المترajح أصغر من أو يساوي (\geq) يضاف (+) متغير راكد.
٢. إذا كان في المترajح أكبر من أو يساوي (\leq) يطرح (-) متغير فائض ويضاف (+) متغير وهمي.
٣. إذا كان في المترajح يساوي (=) يضاف (+) متغير وهمي.

$$\begin{aligned} \text{القيود (١)}: \text{س}١ + \text{س}٢ &= ١٥٠ & \text{س}١ + \text{س}٢ + \text{س}٣(\text{وهي}) &= ١٥٠ \\ \text{القيود (٢)}: \text{س}٢ &\leq ٦٠ & \text{س}٢ - \text{س}٤(\text{فائض}) + \text{س}٥(\text{وهي}) &= ٦٠ \\ \text{القيود (٣)}: \text{س}١ &\geq ٨٠ & \text{س}١ + \text{س}٦(\text{راكد}) &= ٨٠ \end{aligned}$$

أما دالة الهدف فتصبح:

$$\text{رل} = ٥\text{س}١ + ٨\text{س}٢ + ٣\text{س}٣(\text{وهي}) - ٤\text{س}٤(\text{فائض}) + ٥\text{س}٥(\text{وهي}) + ٦\text{س}٦(\text{راكد})$$

الآن، نقوم بإنشاء (الجدول المبدئي) وهو جدول يعبر عن الحالة الصفرية الذي سبق شرح محتوياته.

قاعدة: عند تغيير دالة الهدف بعد إضافة جميع المتغيرات، فإننا نعطي المتغير (راكد) والمتغير (فائض) دائماً القيمة (صفر) أما (وهي) فيعطى دائماً (م).

$$\text{وستصبح قيم رل} = ٥\text{س}١ + ٨\text{س}٢ + ٣\text{س}٣(\text{م}) - ٤\text{س}٤(\text{م}) + ٥\text{س}٥(\text{م}) + ٦\text{س}٦(\text{م})$$

قاعدة: المتغيرات الأساسية هي جميع المتغيرات المضافة (التي أضفناها لتكوين المعادلة) في القيود ماعدا المتغيرات التي تحمل الإشارة سالب (-). أي (الراكد والفائض والوهي) ما لم يكن سالباً.

على ذلك، فإن المتغيرات الأساسية التي هي على يمين الجدول سوف تكون (س٣) و (س٥) و (س٦) ولا يشمل ذلك (س٤). أما أعلى الجدول (رل) فتضاف كافة قيم جميع دالة الهدف بما فيها السالب.

قاعدة: قيم الكمية في الجدول المبني فقط هي الطرف الأيسر من القيد.

المتغيرات الأساسية	رل	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣ س	١	١	١	٠	٠	٠	٠	١٥٠	م	
٥ س	٠	١	٠	١	٠	١	٠	٦٠	م	
٦ س	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٠	

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

يلاحظ أن (القيم) أمام (س٣) و (س٥) و (س٦) وكذلك الكمية، قد أخذت من ذات القيود، الأول والثاني والثالث.

قاعدة: في حالة الأرباح فإن (م) سالبة (-) وفي حالة التكاليف فتكون موجبة (+).

الآن... نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو (رج) وهو ما يسمى بـ (مجموع ربح الظل) وهو يساوي مجموع ربح الحالة في نفس الجدول. وذلك بضرب (الربح أو التكلفة) \times جميع القيم المقابلة له في ذلك الصف، ثم جمع كامل نتائج العمود. فينتج:

المتغيرات الأساسية	رل	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	الكمية	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
س٣	X	1	1	1	0	150	0	X
س٥		0	1	0	1	60	0	
ظل س٣	X	1	1	1	0	150	0	X

كرر نفس العملية على باقي قيم المتغيرات الأساسية

قاعدة: الربح أو التكلفة هي قيمة ذلك المتغير الأساسي، ويؤخذ من المعادلات (رل) بحيث تكون قيمة الربح أو التكاليف (٠) للمتغير الراكذ أو الفائض، و (م) للمتغير الوهمي.

من قيم رل = $٥س١ + ٨س٢ + (م)س٣ - (٠)س٤ + (م)س٥ + (٠)س٦$
سيكون ربح أو تكلفة (س٣) = $(م) / (٥س١) = (٠) / (٠) = (س٦) / (٠)$

ربح الظل (ظل) للعنصر = قيم الربح أو التكلفة (رل★) \times عنصر ذلك الصف، أي أن نقوم بضرب قيم (رل★) ونضع النتائج في صف واحد وهو الذي سيمثل ربح الظل لذلك العنصر (العنصر).

الربح أو التكلفة (★رل)	الكمية (ب)	رل	٥	٨	م	٠	م	٠
النسبة (Ø)		المتغيرات الأساسية	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س
م	١٥٠	٣ س	١	١	١	٠	٠	٠
م	٦٠	٥ س	٠	١	٠	١-	١	٠
٠	٨٠	٦ س	١	٠	٠	٠	٠	١
		ظل ٣ س	١×م	١×م	١×م	٠×م	٠×م	٠×م
		ظل ٥ س	٠×م	١×م	٠×م	١×م	١×م	٠×م
		ظل ٦ س	١×٠	٠×٠	٠×٠	٠×٠	٠×٠	١×٠

ملاحظة: حسب شرح الدكتور محمد الإدريسي فإن الأمر لا يستدع حساب ظل الكمية.

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

الربح أو التكلفة (★رل)	الكمية (ب)	رل	٥	٨	م	٠	م	٠
النسبة (Ø)		المتغيرات الأساسية	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س
م	١٥٠	٣ س	١	١	١	٠	٠	٠
م	٦٠	٥ س	٠	١	٠	١-	١	٠
٠	٨٠	٦ س	١	٠	٠	٠	٠	١
		ظل ٣ س	م	م	م	٠	٠	٠
		ظل ٥ س	٠	م	٠	م-	م	٠
		ظل ٦ س	٠	٠	٠	٠	٠	٠
		رج	م	م ^٢	م	م-	م	٠

الآن... نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو عبارة عن (رل) مطروحاً منه (رج). فينتج لدينا:

الربح أو التكلفة (★رل)	الكمية (ب)	رل	٥	٨	م	٠	م	٠
النسبة (Ø)		المتغيرات الأساسية	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س
م	١٥٠	٣ س	١	١	١	٠	٠	٠
م	٦٠	٥ س	٠	١	٠	١-	١	٠
٠	٨٠	٦ س	١	٠	٠	٠	٠	١
		ظل ٣ س	م	م	م	٠	٠	٠
		ظل ٥ س	٠	م	٠	م-	م	٠
		ظل ٦ س	٠	٠	٠	٠	٠	٠
		رج	م	م ^٢	م	م-	م	٠
		رل - رج	٥ - م	٨ - م ^٢	م - م	٠ - (م-)	م - م	٠ - ٠

الآن... نقوم بالتعويض عن (م) بأي رقم إفتراضي على أن يكون رقم كبير وليس صغير كـ (١٠٠) أو (٢٠٠) مثلاً لأننا نرغب في إستبعاده، ومن ثم التعويض عن ك بذلك الرقم. وسنفترض أن $م = ١٠٠$

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
		س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
م	١٥٠	٠	٠	٠	١	١	١	س٣
م	٦٠	٠	١	١-	٠	١	٠	س٥
٠	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س٦
		٠	٠	٠	م	م	م	ظل س٣
		٠	م	م-	٠	م	٠	ظل س٥
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٦
		٠	م	م-	م	م٢	م	رج
		٠	-١٠٠ ١٠٠ ٠=	١٠٠+٠ ١٠٠=	-١٠٠ ١٠٠ ٠=	٢٠٠-٨ ١٩٢=-	١٠٠-٥ ٩٥=-	رل - رج

قاعدة: العنصر الداخل هو (العمود) الذي أعطى أعلى نتيجة في (رل - رج) في حالة الأرباح والأقل الأفضل في حالة التكاليف.

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
		س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
م	١٥٠	٠	٠	٠	١	١	١	س٣
م	٦٠	٠	١	١-	٠	١	٠	س٥
٠	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س٦
		٠	٠	٠	م	م	م	ظل س٣
		٠	م	م-	٠	م	٠	ظل س٥
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٦
		٠	م	م-	م	م٢	م	رج
		٠	٠	١٠٠	٠	-١٩٢	-٩٥	رل - رج

وبناء على ذلك يمكننا الآن أن نحدد العنصر الداخل، وسيكون (س٢) لأنه أعطى أعلى نتيجة (-١٩٢) حيث أن المسألة تكاليف وليست أرباح. ففي الأرباح نأخذ أعلى رقم موجب، وفي التكاليف نأخذ أعلى رقم سالب.

الآن... يجب علينا استخراج العنصر الخارج باستخراج النسبة وفق القاعدة:

النسبة = الكمية ÷ القيمة المقابلة لها في العنصر الداخل

المتغيرات الأساسية	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	الكمية	الربح أو التكلفة (رل ★)	النسبة (Ø)
س ١							
س ٢							
س ٣							
س ٤							
ظ.ل س ١							
ظ.ل س ٢							
رج							
رل - رج							

$$\text{إذا: } 150 = 1 \div 150$$

$$60 = 1 \div 60$$

$$0 \div 80 = \text{مالا نهائية } (\infty)$$

قاعدة: **العنصر الخارج** هو (الصف) الذي يعطى أقل نتيجة في (النسبة) سواء في مسائل الأرباح أو التكاليف.

وعليه فإن **العنصر الخارج** هو **العنصر الذي يعطي النسبة الأقل** لأن **المسألة مسألة تكاليف**، وهذا يعني أن **العنصر الخارج** هو **العنصر (س ٥) وهو يساوي (٦٠)**.

المتغيرات الأساسية	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل ★)	النسبة (Ø)
س ٣	١	١	١	٠	٠	٠	١٥٠	م	١٥٠
س ٥	٠	١	٠	١	٠	٠	٦٠	م	٦٠
س ٦	١	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٠	∞
رج	م	م ^٢	م	م ⁻	م	٠			
رل - رج	٩٥-	١٩٢-	٠	١٠٠	٠	١٠٠-			

إذا سيخرج (س ٥) من صفوف الجدول وسيحل محله (س ٢)، وقيمة نقطة الإرتكاز هي (١). ولكن كيف سيتم إخراج العنصر الخارج وإدخال العنصر الداخل؟

قاعدة: لإخراج **العنصر الخارج** وإدخال **العنصر الداخل** فيجب قسمة جميع القيم في الصف الخارج على نقطة الإرتكاز للوصول إلى قيم الصف الداخل. أي (قيم العنصر الخارج ÷ نقطة الإرتكاز).

نقطة الإرتكاز: هي النقطة التي يتقاطع عندها عمود العنصر الداخل مع صف العنصر الخارج، ويطلق في هذه العملية على العنصر الداخل (س) اسم الصف المحوري الجديد.

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية				الكمية	الربح أو التكلفة (رل*)	النسبة (Ø)			
	س١	س٢	س٣	س٤						
العنصر الخارج	○	○	○	○	○					

نقطة الارتكاز

رل					المتغيرات الأساسية	الكمية	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
	المتغيرات غير الأساسية							
	س١	س٢	س٣	س٤				
العنصر الداخل	○	○	○	○				

عليه فإن نقطة الارتكاز في الجدول هو الرقم (١) ويجب علينا أن نقسم جميع عناصر (س٥) عليه لنصل إلى عناصر (قيم الصف للعنصر (س٢) الجديد).

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية						الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦			
س٣									
س٢	١/٠	١/١	١/٠	١/١-	١/١	١/٠	١/٦٠	٨	
س٦									

قيم العنصر القديم الذي سيظل في الجدول = القيمة القديمة في ذلك الصف - (القيمة المقابلة لنقطة الارتكاز x القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد) وعلى أن يتم استخراج الناتج بين القوسين أولاً ثم يطرح الناتج من القيمة القديمة في ذلك الصف.

طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر الداخل:

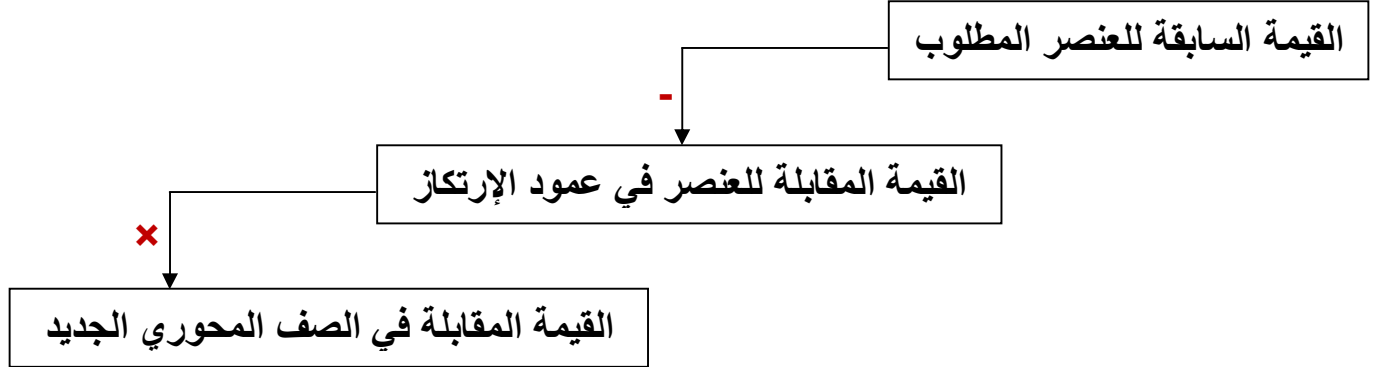
١. سجل جميع قيم صف العنصر الخارج (المستبعد) كما هي متبوعة بعلامة (÷).
٢. سجل بعد علامة (÷) قيمة نقطة الارتكاز.
٣. أوجد ناتج هذه العملية في كل خانة صف على حدة.

يجب الآن استخراج قيم العنصر الذي لم يتم إخراجها وهو هنا (س٣) ويكون ذلك وفقاً للقاعدة التالية.

قيم العنصر القديم الذي سيظل في الجدول = القيمة القديمة في ذلك الصف - (القيمة المقابلة لنقطة الارتكاز x القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد) وعلى أن يتم استخراج الناتج بين القوسين ثم يطرح من القيمة القديمة في ذلك الصف.

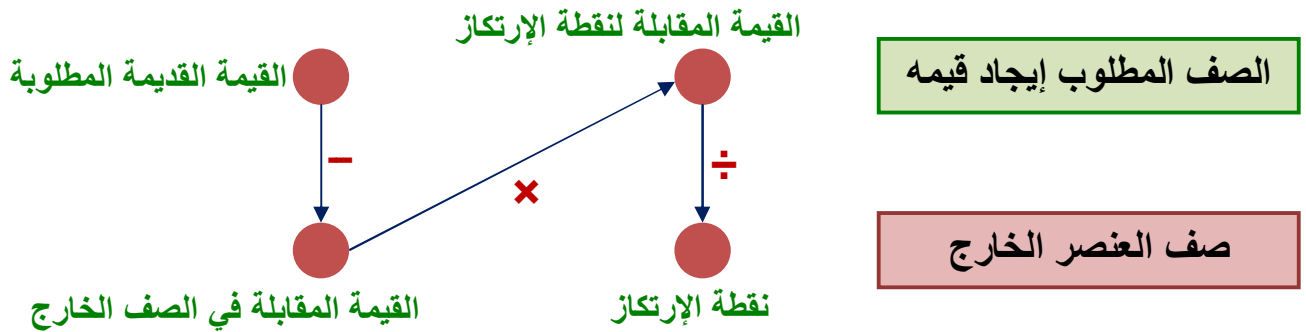
طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) الذي لم يتم استبعاده:

١. سجل جميع القيم السابقة كما هي متبوعة بعلامة (-) ثم افتح قوس.
٢. سجل بعد القوس القيمة المقابلة للعنصر في عمود الإرتكاز السابق متبوعاً بعلامة (x).
٣. سجل بعد (x) جميع قيم الصف الجديد الذي تم إدخاله (الصف المحوري) ثم أغلق القوس.
٤. هام جداً .. أوجد ناتج ما بين القوسين ثم أطرح ذلك الناتج من الرقم السابق للقوسين.

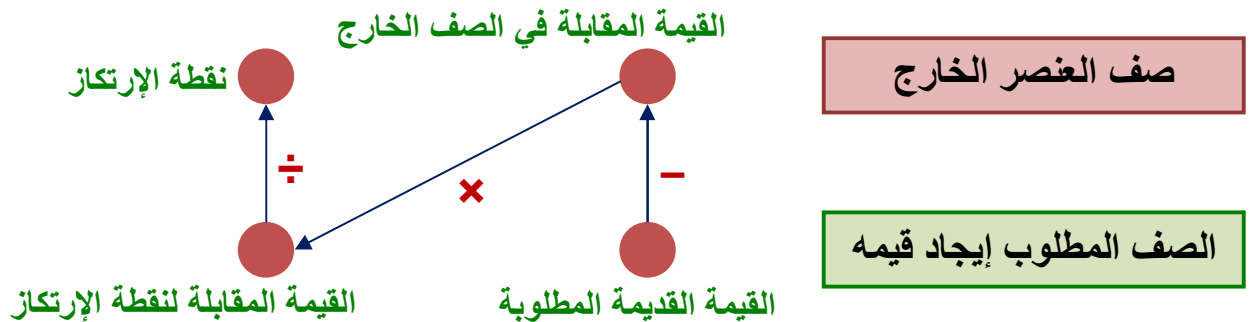


طريقة مبسطة أخرى لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) طريقة (N) المقلوبة:
 القيمة القديمة للعنصر - القيمة المقابلة لها في الصف الخارج x القيمة المقابلة للعنصر في عمود الإرتكاز ÷ نقطة الإرتكاز

في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أسفل الصف المطلوب إيجاد قيمه:



في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أعلى الصف المطلوب إيجاد قيمه:



ووفق هذه الطريقة: فإن قيمة الخلية التي يتقاطع عندها العنصر الداخل (الصف المحوري الجديد) مع العمود الداخل (السابق) لابد وأن تساوي (١) دائماً وأبداً، وتكون كافة قيم العناصر الأخرى (الصفوف الأخرى) في ذلك العمود (٠) بشكل دائم ومباشر.

الحل بالطريقة الأولى وفق القانون:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
		س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
م	$\begin{matrix} \times 1 \\ 150 \\ 90 = 60 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1 \\ 1 = 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1 \\ 1 = 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1 \\ 1 = 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1 \\ 0 = 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1 \\ 1 = 0 \end{matrix}$	س٣
٨	٦٠	٠	١	١	٠	١	٠	س٢
٠	$\begin{matrix} \times 0 \\ 80 \\ 80 = 60 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 0 \\ 1 \\ 1 = 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 0 \\ 0 \\ 0 = 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 0 \\ 0 \\ 0 = 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 0 \\ 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 0 \\ 0 \\ 0 = 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 0 \\ 1 \\ 1 = 0 \end{matrix}$	س٦

الحل بالطريقة الثانية (N) المقلوبة:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
		س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
م	$\begin{matrix} -150 \\ 1/1 \times 60 \\ 90 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/1 \times 0 \\ 0 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/1 \times 1 \\ 1 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1/1 \\ 1 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/1 \times 0 \\ 1 = \end{matrix}$	٠	$\begin{matrix} 1/1 \times 0 \\ 1 = \end{matrix}$	س٣
٨	١/٦٠	١/٠	١/١	١/١	١/٠	١/١	١/٠	س٢
٠	$\begin{matrix} -80 \\ 1/0 \times 60 \\ 80 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/0 \times 0 \\ 1 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/0 \times 1 \\ 0 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} \times 1 \\ 1/0 \\ 0 = \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/0 \times 0 \\ 0 = \end{matrix}$	٠	$\begin{matrix} 1/0 \times 0 \\ 1 = \end{matrix}$	س٦

ونجد أن الطريقتان قد أدت إلى نفس النتيجة.

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
		س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
م	٩٠	٠	١	١	١	٠	١	س٣
٨	٦٠	٠	١	١	٠	١	٠	س٢
٠	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س٦

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل*)	الكمية	المتغيرات غير الأساسية				رل
							المتغيرات الأساسية
			س٤	س٣	س٢	س١	
	٠						س١ X
	.						س
							ظل س١ X

كرر نفس العملية على باقي قيم المتغيرات الأساسية

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
	م	٩٠	٠	١-	١	١	٠	١	س٣
	٨	٦٠	٠	١	١-	٠	١	٠	س٢
	٠	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س٦
			٠×م ٠=	١×م م=	١×م م=	١×م م=	٠×م ٠=	١×م م=	ظل س٣
			٠×٨ ٠=	١×٨ ٨=	١×٨ ٨=	٠×٨ ٠=	١×٨ ٨=	٠×٨ ٠=	ظل س٢
			٠×٠ ٠=	٠×٠ ٠=	٠×٠ ٠=	٠×٠ ٠=	٠×٠ ٠=	١×٠ ٠=	ظل س٦

ملاحظة: حسب شرح الدكتور محمد الإدريسي فإن الأمر لا يستدع حساب ظل الكمية.

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
	م	٩٠	٠	١-	١	١	٠	١	س٣
	٨	٦٠	٠	١	١-	٠	١	٠	س٢
	٠	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س٦
			٠	م-	م	م	٠	م	ظل س٣
			٠	٨	٨-	٠	٨	٠	ظل س٢
			٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٦
			٠	٨-م	٨-م	م	٨	م	رج

الآن .. نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو عبارة عن (رل) مطروحاً منه (رج). فينتج لدينا:

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣س	٢س	١س	٢س	٣س	٤س	٥س	٦س			
١	٠	١	١	١	١	١	٠	٩٠	م	
٠	١	٠	٠	٠	١	١	٠	٦٠	٨	
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٠	
م	٨	م	م	٨-م	٨-م	٨-م	٠			
٨-٨	٥-م	م-م	٨-٨	٨-٨	٨-٨	٨-٨	٠			

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

الآن... نقوم بالتعويض عن (م) بأي رقم إفتراضي على أن يكون رقم كبير وليس صغير كـ (١٠٠) أو (٢٠٠) مثلاً لأننا نرغب في إستبعاده، ومن ثم التعويض عن ك بذلك الرقم. وسنفترض أن م = ١٠٠

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣س	٢س	١س	٢س	٣س	٤س	٥س	٦س			
١	٠	١	١	١	١	١	٠	٩٠	م	
٠	١	٠	٠	٠	١	١	٠	٦٠	٨	
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٠	
م	٨	م	م	٨-م	٨-م	٨-م	٠			
١٠٠-٥	٨-٨	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠	٠			

وسينتج عن ذلك بعد إجراء الحسابات اللازمة:

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣س	٢س	١س	٢س	٣س	٤س	٥س	٦س			
١	٠	١	١	١	١	١	٠	٩٠	٨	٩٠
٠	١	٠	٠	٠	١	١	٠	٦٠	م	∞
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٠	٨٠
م	٨	م	م	٨-م	٨-م	٨-م	٠			
٩٥-	٠	٠	٠	٩٢-	٩٢-	٩٢-	٠			

قاعدة: العنصر الداخل هو (العمود) الذي أعطى أعلى نتيجة في (رل - رج) في حالة الأرباح والأقل الأفضل في حالة التكاليف.

وعليه فإن **العنصر الداخل** هو **العنصر الذي يعطي النسبة الأقل الأفضل لأن المسألة مسألة تكاليف، (أي: أفضل تخفيض ممكن)** وهذا يعني أن **العنصر الداخل هو العنصر (س١) وهو يساوي (-٦٠).**

والآن يجب علينا استخراج **العنصر الخارج** باستخراج النسبة وفق القاعدة:

النسبة = الكمية ÷ القيمة المقابلة لها في العنصر الداخل

إذًا: $٩٠ = ١ ÷ ٩٠$

$٦٠ ÷ ٠ =$ مالا نهائية (∞)

$٨٠ = ١ ÷ ٨٠$

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية					رل
			المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
			س٤	س٣	س٢	س١	
=		÷					س٣ X
=		÷					س٢ Y
							ظ.ل س٣ X
							ظ.ل س٢ Y
							رج
							رل - رج

قاعدة: **العنصر الخارج** هو (الصف) الذي أعطى أقل نتيجة في (النسبة) سواء في مسائل الأرباح أو التكاليف.

قاعدة: في تحديد **العنصر الخارج**، وبعد حساب التكاليف، فإننا **نستبعد فوراً كل القيم التي تكون سالبة (-)** وكذلك النسبة التي تكون نتيجتها **مالا نهائية (∞)** ونختار أقل نسبة.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل	
			المتغيرات غير الأساسية							المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١		
٩٠	٨	٩٠	٠	١-	١	١	٠	١	س٣	
∞	م	٦٠	٠	١	١-	٠	١	٠	س٢	
٨٠	٠	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س٦	
			٠	٨-م	٨-م	م	٨	م	رج	
			٠	١٩٢	٩٢-	٠	٠	٩٥-	رلرج	

وعليه فإن **العنصر الخارج** بعد إستبعاد النسبة السالبة وكذلك النسبة التي تعطينا (مالا نهائية) هو **العنصر الذي يعطي النسبة الأقل، وهذا يعني أن العنصر الخارج هو العنصر (س٦) ويساوي (-٨٠).**

قاعدة: في حالة مسائل الربحية يجب أن نستمر في عمل الجداول إلى أن يكون كامل صف (رل - رج) إما صفر (٠) أو نتيجة سالبة (-). وفي حالة التكاليف إما صفر (٠) أو موجبة (+) وإلا يجب علينا تكرار العمل عدة مرات للوصول إلى هذه النتيجة.

وبذلك سيكون: **العنصر المحوري الجديد هو (س ١) (و) نقطة الارتكاز هي (١)**

قاعدة: لإخراج **العنصر الخارج** وإدخال **العنصر الداخل** فيجب قسمة جميع القيم في الصف الخارج على نقطة الارتكاز للوصول إلى قيم الصف الداخل. أي (قيم **العنصر الخارج** ÷ نقطة الارتكاز).

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل*)	الكمية	المتغيرات غير الأساسية				رل
							المتغيرات الأساسية
			س٤	س٣	س٢	س١	
		○	○	○	○	○	العنصر الخارج

نقطة الارتكاز

النسبة (θ)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية					رل	
			المتغيرات غير الأساسية					المتغيرات الأساسية
			س٤	س٣	س٢	س١		
							العنصر الداخل	

عليه فإن نقطة الارتكاز في الجدول هو الرقم (١) ويجب علينا أن نقسم جميع عناصر (س٥) عليه لنصل إلى عناصر (قيم الصف للعنصر (س٢) الجديد).

المتغيرات الأساسية	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠	١٠١	١٠٢	١٠٣	١٠٤	١٠٥	١٠٦	١٠٧	١٠٨	١٠٩	١١٠	١١١	١١٢	١١٣	١١٤	١١٥	١١٦	١١٧	١١٨	١١٩	١٢٠	١٢١	١٢٢	١٢٣	١٢٤	١٢٥	١٢٦	١٢٧	١٢٨	١٢٩	١٣٠	١٣١	١٣٢	١٣٣	١٣٤	١٣٥	١٣٦	١٣٧	١٣٨	١٣٩	١٤٠	١٤١	١٤٢	١٤٣	١٤٤	١٤٥	١٤٦	١٤٧	١٤٨	١٤٩	١٥٠	١٥١	١٥٢	١٥٣	١٥٤	١٥٥	١٥٦	١٥٧	١٥٨	١٥٩	١٦٠	١٦١	١٦٢	١٦٣	١٦٤	١٦٥	١٦٦	١٦٧	١٦٨	١٦٩	١٧٠	١٧١	١٧٢	١٧٣	١٧٤	١٧٥	١٧٦	١٧٧	١٧٨	١٧٩	١٨٠	١٨١	١٨٢	١٨٣	١٨٤	١٨٥	١٨٦	١٨٧	١٨٨	١٨٩	١٩٠	١٩١	١٩٢	١٩٣	١٩٤	١٩٥	١٩٦	١٩٧	١٩٨	١٩٩	٢٠٠	٢٠١	٢٠٢	٢٠٣	٢٠٤	٢٠٥	٢٠٦	٢٠٧	٢٠٨	٢٠٩	٢١٠	٢١١	٢١٢	٢١٣	٢١٤	٢١٥	٢١٦	٢١٧	٢١٨	٢١٩	٢٢٠	٢٢١	٢٢٢	٢٢٣	٢٢٤	٢٢٥	٢٢٦	٢٢٧	٢٢٨	٢٢٩	٢٣٠	٢٣١	٢٣٢	٢٣٣	٢٣٤	٢٣٥	٢٣٦	٢٣٧	٢٣٨	٢٣٩	٢٤٠	٢٤١	٢٤٢	٢٤٣	٢٤٤	٢٤٥	٢٤٦	٢٤٧	٢٤٨	٢٤٩	٢٥٠	٢٥١	٢٥٢	٢٥٣	٢٥٤	٢٥٥	٢٥٦	٢٥٧	٢٥٨	٢٥٩	٢٦٠	٢٦١	٢٦٢	٢٦٣	٢٦٤	٢٦٥	٢٦٦	٢٦٧	٢٦٨	٢٦٩	٢٧٠	٢٧١	٢٧٢	٢٧٣	٢٧٤	٢٧٥	٢٧٦	٢٧٧	٢٧٨	٢٧٩	٢٨٠	٢٨١	٢٨٢	٢٨٣	٢٨٤	٢٨٥	٢٨٦	٢٨٧	٢٨٨	٢٨٩	٢٩٠	٢٩١	٢٩٢	٢٩٣	٢٩٤	٢٩٥	٢٩٦	٢٩٧	٢٩٨	٢٩٩	٣٠٠	٣٠١	٣٠٢	٣٠٣	٣٠٤	٣٠٥	٣٠٦	٣٠٧	٣٠٨	٣٠٩	٣١٠	٣١١	٣١٢	٣١٣	٣١٤	٣١٥	٣١٦	٣١٧	٣١٨	٣١٩	٣٢٠	٣٢١	٣٢٢	٣٢٣	٣٢٤	٣٢٥	٣٢٦	٣٢٧	٣٢٨	٣٢٩	٣٣٠	٣٣١	٣٣٢	٣٣٣	٣٣٤	٣٣٥	٣٣٦	٣٣٧	٣٣٨	٣٣٩	٣٤٠	٣٤١	٣٤٢	٣٤٣	٣٤٤	٣٤٥	٣٤٦	٣٤٧	٣٤٨	٣٤٩	٣٥٠	٣٥١	٣٥٢	٣٥٣	٣٥٤	٣٥٥	٣٥٦	٣٥٧	٣٥٨	٣٥٩	٣٦٠	٣٦١	٣٦٢	٣٦٣	٣٦٤	٣٦٥	٣٦٦	٣٦٧	٣٦٨	٣٦٩	٣٧٠	٣٧١	٣٧٢	٣٧٣	٣٧٤	٣٧٥	٣٧٦	٣٧٧	٣٧٨	٣٧٩	٣٨٠	٣٨١	٣٨٢	٣٨٣	٣٨٤	٣٨٥	٣٨٦	٣٨٧	٣٨٨	٣٨٩	٣٩٠	٣٩١	٣٩٢	٣٩٣	٣٩٤	٣٩٥	٣٩٦	٣٩٧	٣٩٨	٣٩٩	٤٠٠	٤٠١	٤٠٢	٤٠٣	٤٠٤	٤٠٥	٤٠٦	٤٠٧	٤٠٨	٤٠٩	٤١٠	٤١١	٤١٢	٤١٣	٤١٤	٤١٥	٤١٦	٤١٧	٤١٨	٤١٩	٤٢٠	٤٢١	٤٢٢	٤٢٣	٤٢٤	٤٢٥	٤٢٦	٤٢٧	٤٢٨	٤٢٩	٤٣٠	٤٣١	٤٣٢	٤٣٣	٤٣٤	٤٣٥	٤٣٦	٤٣٧	٤٣٨	٤٣٩	٤٤٠	٤٤١	٤٤٢	٤٤٣	٤٤٤	٤٤٥	٤٤٦	٤٤٧	٤٤٨	٤٤٩	٤٥٠	٤٥١	٤٥٢	٤٥٣	٤٥٤	٤٥٥	٤٥٦	٤٥٧	٤٥٨	٤٥٩	٤٦٠	٤٦١	٤٦٢	٤٦٣	٤٦٤	٤٦٥	٤٦٦	٤٦٧	٤٦٨	٤٦٩	٤٧٠	٤٧١	٤٧٢	٤٧٣	٤٧٤	٤٧٥	٤٧٦	٤٧٧	٤٧٨	٤٧٩	٤٨٠	٤٨١	٤٨٢	٤٨٣	٤٨٤	٤٨٥	٤٨٦	٤٨٧	٤٨٨	٤٨٩	٤٩٠	٤٩١	٤٩٢	٤٩٣	٤٩٤	٤٩٥	٤٩٦	٤٩٧	٤٩٨	٤٩٩	٥٠٠	٥٠١	٥٠٢	٥٠٣	٥٠٤	٥٠٥	٥٠٦	٥٠٧	٥٠٨	٥٠٩	٥١٠	٥١١	٥١٢	٥١٣	٥١٤	٥١٥	٥١٦	٥١٧	٥١٨	٥١٩	٥٢٠	٥٢١	٥٢٢	٥٢٣	٥٢٤	٥٢٥	٥٢٦	٥٢٧	٥٢٨	٥٢٩	٥٣٠	٥٣١	٥٣٢	٥٣٣	٥٣٤	٥٣٥	٥٣٦	٥٣٧	٥٣٨	٥٣٩	٥٤٠	٥٤١	٥٤٢	٥٤٣	٥٤٤	٥٤٥	٥٤٦	٥٤٧	٥٤٨	٥٤٩	٥٥٠	٥٥١	٥٥٢	٥٥٣	٥٥٤	٥٥٥	٥٥٦	٥٥٧	٥٥٨	٥٥٩	٥٦٠	٥٦١	٥٦٢	٥٦٣	٥٦٤	٥٦٥	٥٦٦	٥٦٧	٥٦٨	٥٦٩	٥٧٠	٥٧١	٥٧٢	٥٧٣	٥٧٤	٥٧٥	٥٧٦	٥٧٧	٥٧٨	٥٧٩	٥٨٠	٥٨١	٥٨٢	٥٨٣	٥٨٤	٥٨٥	٥٨٦	٥٨٧	٥٨٨	٥٨٩	٥٩٠	٥٩١	٥٩٢	٥٩٣	٥٩٤	٥٩٥	٥٩٦	٥٩٧	٥٩٨	٥٩٩	٦٠٠	٦٠١	٦٠٢	٦٠٣	٦٠٤	٦٠٥	٦٠٦	٦٠٧	٦٠٨	٦٠٩	٦١٠	٦١١	٦١٢	٦١٣	٦١٤	٦١٥	٦١٦	٦١٧	٦١٨	٦١٩	٦٢٠	٦٢١	٦٢٢	٦٢٣	٦٢٤	٦٢٥	٦٢٦	٦٢٧	٦٢٨	٦٢٩	٦٣٠	٦٣١	٦٣٢	٦٣٣	٦٣٤	٦٣٥	٦٣٦	٦٣٧	٦٣٨	٦٣٩	٦٤٠	٦٤١	٦٤٢	٦٤٣	٦٤٤	٦٤٥	٦٤٦	٦٤٧	٦٤٨	٦٤٩	٦٥٠	٦٥١	٦٥٢	٦٥٣	٦٥٤	٦٥٥	٦٥٦	٦٥٧	٦٥٨	٦٥٩	٦٦٠	٦٦١	٦٦٢	٦٦٣	٦٦٤	٦٦٥	٦٦٦	٦٦٧	٦٦٨	٦٦٩	٦٧٠	٦٧١	٦٧٢	٦٧٣	٦٧٤	٦٧٥	٦٧٦	٦٧٧	٦٧٨	٦٧٩	٦٨٠	٦٨١	٦٨٢	٦٨٣	٦٨٤	٦٨٥	٦٨٦	٦٨٧	٦٨٨	٦٨٩	٦٩٠	٦٩١	٦٩٢	٦٩٣	٦٩٤	٦٩٥	٦٩٦	٦٩٧	٦٩٨	٦٩٩	٧٠٠	٧٠١	٧٠٢	٧٠٣	٧٠٤	٧٠٥	٧٠٦	٧٠٧	٧٠٨	٧٠٩	٧١٠	٧١١	٧١٢	٧١٣	٧١٤	٧١٥	٧١٦	٧١٧	٧١٨	٧١٩	٧٢٠	٧٢١	٧٢٢	٧٢٣	٧٢٤	٧٢٥	٧٢٦	٧٢٧	٧٢٨	٧٢٩	٧٣٠	٧٣١	٧٣٢	٧٣٣	٧٣٤	٧٣٥	٧٣٦	٧٣٧	٧٣٨	٧٣٩	٧٤٠	٧٤١	٧٤٢	٧٤٣	٧٤٤	٧٤٥	٧٤٦	٧٤٧	٧٤٨	٧٤٩	٧٥٠	٧٥١	٧٥٢	٧٥٣	٧٥٤	٧٥٥	٧٥٦	٧٥٧	٧٥٨	٧٥٩	٧٦٠	٧٦١	٧٦٢	٧٦٣	٧٦٤	٧٦٥	٧٦٦	٧٦٧	٧٦٨	٧٦٩	٧٧٠	٧٧١	٧٧٢	٧٧٣	٧٧٤	٧٧٥	٧٧٦	٧٧٧	٧٧٨	٧٧٩	٧٨٠	٧٨١	٧٨٢	٧٨٣	٧٨٤	٧٨٥	٧٨٦	٧٨٧	٧٨٨	٧٨٩	٧٩٠	٧٩١	٧٩٢	٧٩٣	٧٩٤	٧٩٥	٧٩٦	٧٩٧	٧٩٨	٧٩٩	٨٠٠	٨٠١	٨٠٢	٨٠٣	٨٠٤	٨٠٥	٨٠٦	٨٠٧	٨٠٨	٨٠٩	٨١٠	٨١١	٨١٢	٨١٣	٨١٤	٨١٥	٨١٦	٨١٧	٨١٨	٨١٩	٨٢٠	٨٢١	٨٢٢	٨٢٣	٨٢٤	٨٢٥	٨٢٦	٨٢٧	٨٢٨	٨٢٩	٨٣٠	٨٣١	٨٣٢	٨٣٣	٨٣٤	٨٣٥	٨٣٦	٨٣٧	٨٣٨	٨٣٩	٨٤٠	٨٤١	٨٤٢	٨٤٣	٨٤٤	٨٤٥	٨٤٦	٨٤٧	٨٤٨	٨٤٩	٨٥٠	٨٥١	٨٥٢	٨٥٣	٨٥٤	٨٥٥	٨٥٦	٨٥٧	٨٥٨	٨٥٩	٨٦٠	٨٦١	٨٦٢	٨٦٣	٨٦٤	٨٦٥	٨٦٦	٨٦٧	٨٦٨	٨٦٩	٨٧٠	٨٧١	٨٧٢	٨٧٣	٨٧٤	٨٧٥	٨٧٦	٨٧٧	٨٧٨	٨٧٩	٨٨٠	٨٨١	٨٨٢	٨٨٣	٨٨٤	٨٨٥	٨٨٦	٨٨٧	٨٨٨	٨٨٩	٨٩٠	٨٩١	٨٩٢	٨٩٣	٨٩٤	٨٩٥	٨٩٦	٨٩٧	٨٩٨	٨٩٩</
--------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-------

طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر الداخل:

١. سجل جميع قيم صف العنصر الخارج (المستبعد) كما هي متبوعة بعلامة (\div) .
٢. سجل بعد علامة (\div) قيمة نقطة الارتكاز.

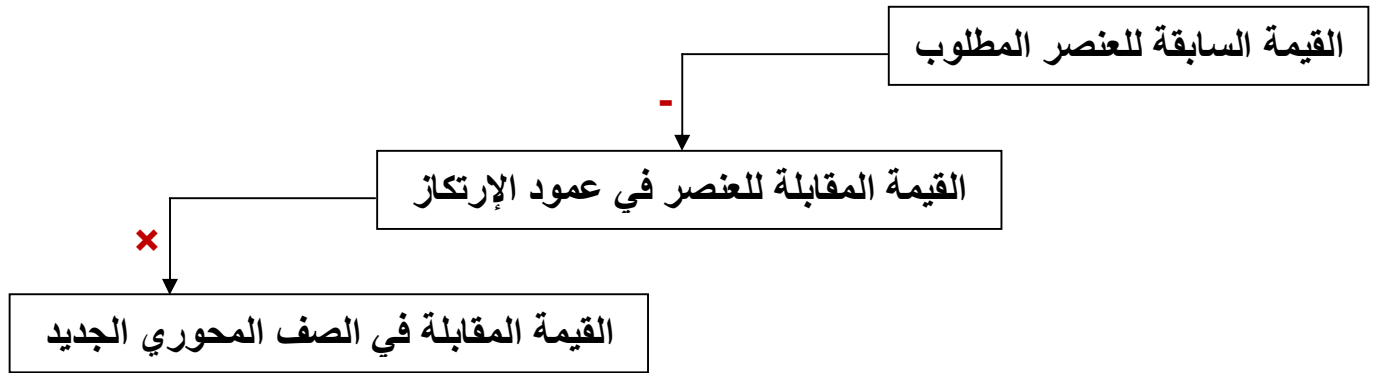
٣. أوجد ناتج هذه العملية في كل خانة صف على حدة.

يجب الآن استخراج قيم العنصر الذي لم يتم إخراجها ويكون ذلك وفقاً للقاعدة التالية.

قيم العنصر القديم الذي سيظل في الجدول = القيمة القديمة في ذلك الصف - (القيمة المقابلة لنقطة الارتكاز x القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد) وعلى أن يتم استخراج الناتج بين القوسين ثم يطرح من القيمة القديمة في ذلك الصف.

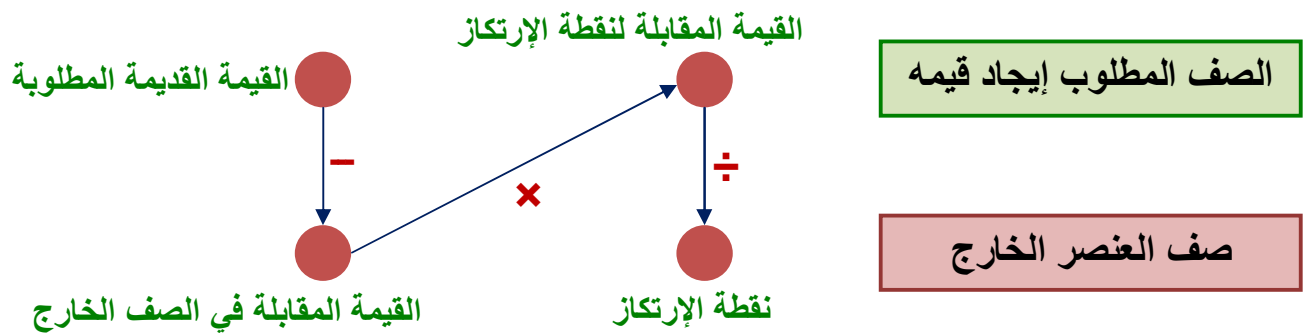
طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) الذي لم يتم استبعاده:

١. سجل جميع القيم السابقة كما هي متبوعة بعلامة (-) ثم افتح قوس.
٢. سجل بعد القوس القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز السابق متبوعاً بعلامة (x).
٣. سجل بعد (x) جميع قيم الصف الجديد الذي تم إدخاله (الصف المحوري) ثم أغلق القوس.
٤. **هام جداً .. أوجد ناتج ما بين القوسين ثم أطرح ذلك الناتج من الرقم السابق للقوسين.**

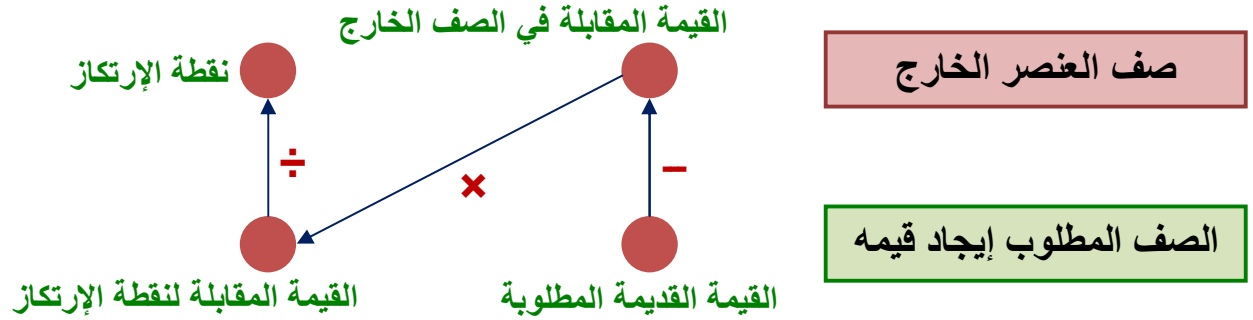


طريقة مبسطة أخرى لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) طريقة (N) المقلوبة:
 القيمة القديمة للعنصر - القيمة المقابلة لها في الصف الخارج x القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز ÷ نقطة الارتكاز

في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أسفل الصف المطلوب إيجاد قيمه:



في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أعلى الصف المطلوب إيجاد قيمه:



ووفق هذه الطريقة: فإن قيمة الخلية التي يتقاطع عندها العنصر الداخل (الصف المحوري الجديد) مع العمود الداخل (السابق) لابد وأن تساوي (١) دائماً وأبداً، وتكون كافة قيم العناصر الأخرى (الصفوف الأخرى) في ذلك العمود (٠) بشكل دائم ومباشر.

الحل بالطريقة الأولى وفق القانون:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						
		٦س	٥س	٤س	٣س	٢س	١س	المتغيرات الأساسية
م	-٩٠ (٨٠×١) ١٠=	-٠ (١×١) ١-=	-١- (٠×١) ١-=	-١ (٠×١) ١=	-١ (٠×١) ١=	-٠ (٠×١) ٠=	-١ (١×١) ٠=	٣س
٨	-٦٠ (٨٠×٠) ٦٠=	-٠ (١×٠) ٠=	-١ (٠×٠) ١=	-١- (٠×٠) ١-=	-٠ (٠×٠) ٠=	-١ (٠×٠) ١=	-٠ (١×٠) ٠=	٢س
٥	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	١س

الحل بالطريقة الثانية (N) المقلوبة:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية						
		٦س	٥س	٤س	٣س	٢س	١س	المتغيرات الأساسية
م	×٨٠-٩٠ =١/١ ١٠	×١-٠ =١/١ ١-	×٠-١- =١/١ ١-	×٠-١ =١/١ ١	×٠-١ =١/١ ١	×٠-٠ =١/١ ٠	٠	٣س
٨	٨٠-٦٠ =١/٠× ٦٠	×٠-٠ =١/٠ ٠	×٠-١ =١/٠ ١	×٠-١- =١/٠ ١-	×٠-٠ =١/٠ ٠	×٠-١ =١/٠ ١	٠	٢س
٥	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	١س

ونجد أن الطريقتان قد أدت إلى نفس النتيجة.

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣س	٠	٠	٠	١	١	١	١	١٠	م	
٢س	٠	١	٠	١	١	٠	٠	٦٠	٨	
١س	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥	

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣س	X								٠	
س									٠	
ظل س	X									

كرر نفس العملية على باقي قيم المتغيرات الأساسية

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
٣س	٠	٠	٠	١	١	١	١	١٠	م	
٢س	٠	١	٠	١	١	٠	٠	٦٠	٨	
١س	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥	
ظل س٣	0×5	0×8	0×0	1×0	1×0	1×0	1×0			
ظل س٢	0×8	1×8	0×0	1×0	1×0	0×0	0×0			
ظل س١	1×0	0×0	0×0	0×0	0×0	0×0	1×0			

ملاحظة: حسب شرح الدكتور محمد الإدريسي فإن الأمر لا يستدع حساب ظل الكمية.

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠
		المتغيرات غير الأساسية					
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦
س٣	٠	٠	١	١	١-	١-	١٠
س٢	٠	١	٠	١-	١	٠	٦٠
س١	١	٠	٠	٠	٠	١	٨٠
ظل س٣	٠	٠	م	م	م-	م-	
ظل س٢	٠	٨	٠	٨-	٨	٠	
ظل س١	٥	٠	٠	٠	٠	٥	
رج	٥	٨	م	م-٨	٨-م	٥-م	

الآن .. نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو عبارة عن (رل) مطروحاً منه (رج). فينتج لدينا:

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦			
س٣	٠	٠	١	١	١	-١	١٠	م		
س٢	٠	١	٠	-١	١	٠	٦٠	٨		
س١	١	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥		
ظل س٣	٠	٠	م	م	م	-م				
ظل س٢	٠	٨	٠	-٨	٨	٠				
ظل س١	٥	٠	٠	٠	٠	٥				
رج	٥	٨	م	م-٨	٨-م	٥-م				
رل-رج	٠	٠	٠	م-٨	٨-م	م-٥-م				

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

الآن... نقوم بالتعويض عن (م) بأي رقم إفتراضي على أن يكون رقم كبير وليس صغير كـ (١٠٠) أو (٢٠٠) مثلاً لأننا نرغب في إستبعاده، ومن ثم التعويض عن ك بذلك الرقم. وسنفترض أن $م = ١٠٠$.

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦			
س ٣	٠	٠	١	١	١	-١	١٠	م		
س ٢	٠	١	٠	-١	١	٠	٦٠	٨		
س ١	١	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥		
ظل س ٣	٠	٠	م	م	م	-م				
ظل س ٢	٠	٨	٠	-٨	٨	٠				
ظل س ١	٥	٠	٠	٠	٠	٥				
رج	٥	٨	م	-٨-م	٨-م	-٥-م				
رل-رج	٠	٠	٠	-١٠٨-	-٨-	-٥-				

وعليه فإن العنصر الداخل هو العنصر الذي يعطي النسبة الأقل الأفضل لأن المسألة مسألة تكاليف، (أي: أفضل تخفيض ممكن) وهذا يعني أن العنصر الداخل هو العنصر (س٤) وهو يساوي (١٠٨-).
والآن يجب علينا استخراج العنصر الخارج باستخراج النسبة وفق القاعدة:

النسبة = الكمية ÷ القيمة المقابلة لها في العنصر الداخل

$$\text{إذاً: } ١٠- = ١ \div ٠١$$

$$٦٠- = ١- \div ٦٠$$

$$٨٠ \div ٠ = \text{مالا نهائية } (\infty)$$

المتغيرات الأساسية	رل	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	الكمية	الربح أو التكلفة (رل ★)	النسبة (Ø)
س٣ X						÷		=
س٢ Y						÷		=
ظل س٣ X								
ظل س٢ Y								
رج								
رل-رج								

قاعدة: العنصر الخارج هو (الصف) الذي أعطى أقل نتيجة في (النسبة) سواء في مسائل الأرباح أو التكاليف.

قاعدة: في تحديد العنصر الخارج، وبعد حساب التكاليف، فإننا نستبعد فوراً كل القيم التي تكون سالبة (-) وكذلك النسبة التي تكون نتيجتها مالانهاية (∞) ونختار أقل نسبة.

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦			
س ٣	٠	٠	١	١	١	- ١	- ١	١٠	م	١٠
س ٢	٠	١	٠	- ١	١	٠	١	٦٠	٨	- ٦٠
س ١	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥	∞
ظل س ٣	٠	٠	م	م	م	- م	- م			
ظل س ٢	٠	٨	٠	- ٨	٨	٠	٨			
ظل س ١	٥	٠	٠	٠	٠	٠	٥			
رج	٥	٨	م	م- ٨	٨- م	٥- م	٨- م			
رل رج	٠	٠	٠	- ١٠ ٨	- ٨	- ٥	- ٥			

وعليه فإن العنصر الخارج بعد إستبعاد النسبة السالبة هو العنصر الذي يعطي النسبة الأقل، وهذا يعني أن العنصر الخارج هو العنصر (س٣) ويساوي (١٠).

قاعدة: في حالة مسائل الربحية يجب أن نستمر في عمل الجداول إلى أن يكون كامل صف (رل - رج) إما صفر (٠) أو نتيجة سالبة (-). وفي حالة التكاليف إما صفر (٠) أو موجبة (+) وإلا وجب علينا تكرار العمل عدة مرات للوصول إلى هذه النتيجة.

يلاحظ هنا أنه لا يزال لدينا نتائج سالبة في نهاية الجدول (رل-رج)، والمسألة مسألة تكاليف، أي أنه لا بد لنا من مواصلة العمل وعمل جدول جديد إلى أن نصل إلى أن تكون النتائج (٠) أو (+). وبذلك سيكون: العنصر المحوري الجديد هو (س٤) (و) نقطة الارتكاز هي (١)

إذاً سيخرج (س٣) من صفوف الجدول وسيحل محله (س٤)، وقيمة نقطة الارتكاز هي (١). ولكن كيف سيتم إخراج العنصر الخارج وإدخال العنصر الداخل؟

قاعدة: لإخراج العنصر الخارج وإدخال العنصر الداخل فيجب قسمة جميع القيم في الصف الخارج على نقطة الارتكاز للوصول إلى قيم الصف الداخل. أي (قيم العنصر الخارج ÷ نقطة الارتكاز).

نقطة الارتكاز: هي النقطة التي يتقاطع عندها عمود العنصر الداخل مع صف العنصر الخارج، ويطلق في هذه العملية على العنصر الداخل (س) اسم الصف المحوري الجديد.

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية				الكمية	الربح أو التكلفة (رل*)	النسبة (Ø)			
	س ١	س ٢	س ٣	س ٤						
العنصر الخارج	○	○	○	○	○					

نقطة الارتكاز

رل					المتغيرات الأساسية	الكمية	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
	المتغيرات غير الأساسية							
	س١	س٢	س٣	س٤				
العنصر الداخل	○	○	○	○				

عليه فإن نقطة الارتكاز في الجدول هو الرقم (١) ويجب علينا أن نقسم جميع عناصر (س٣) عليه لنصل إلى عناصر (قيم الصف للعنصر (س٤٥) الجديد).

المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية						الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
	س ١	س ٢	س ٣	س ٤	س ٥	س ٦			
س ٤	١/٠	١/٠	١/١	١/١	١/١-	١/١-	١/١٠	٠	
س ٢								٨	
س ١								٥	

يجب الآن استخراج قيم العنصر الذي لم يتم إخراجهِ ويكون ذلك وفقاً للقاعدة التالية.

قيم العنصر القديم الذي سيظل في الجدول = القيمة القديمة في ذلك الصف - (القيمة المقابلة لنقطة الارتكاز x القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد) وعلى أن يتم استخراج الناتج بين القوسين ثم يطرح من القيمة القديمة في ذلك الصف.

طريقة مبسطة لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) الذي لم يتم استبعاده:

١. سجل جميع القيم السابقة كما هي متبوعة بعلامة (-) ثم افتح قوس.
٢. سجل بعد القوس القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز السابق متبوعاً بعلامة (x).
٣. سجل بعد (x) جميع قيم الصف الجديد الذي تم إدخاله (الصف المحوري) ثم أغلق القوس.
٤. هام جداً .. أوجد ناتج ما بين القوسين ثم أطرح ذلك الناتج من الرقم السابق للقوسين.

القيمة السابقة للعنصر المطلوب

-

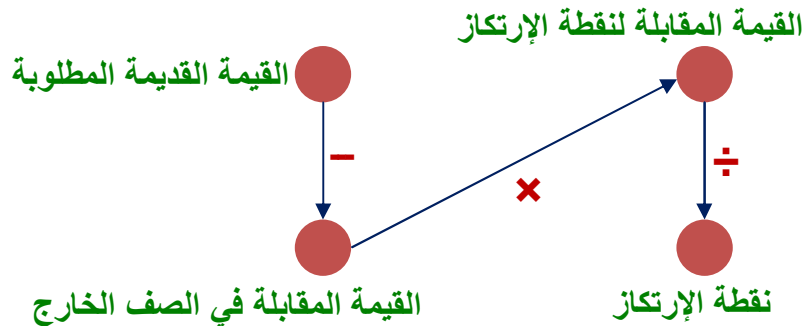
القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز

x

القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد

طريقة مبسطة أخرى لاستخراج وتحديد قيم صف العنصر القديم (الصف القديم) طريقة (N) المقلوبة:
 القيمة القديمة للعنصر - القيمة المقابلة لها في الصف الخارج x القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز ÷ نقطة الارتكاز

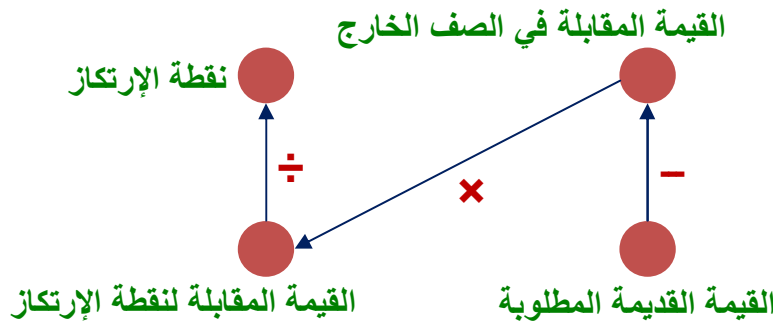
في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أسفل الصف المطلوب إيجاد قيمه:



الصف المطلوب إيجاد قيمه

صف العنصر الخارج

في حالة ما إذا كان صف العنصر الخارج أعلى الصف المطلوب إيجاد قيمه:



صف العنصر الخارج

الصف المطلوب إيجاد قيمه

ووفق هذه الطريقة: فإن قيمة الخلية التي يتقاطع عندها العنصر الداخل مع ذاته في المتغيرات غير الأساسية لا بد وأن تساوي (١)، أي بإفتراض أن الصف الداخل هو (س٢) فإنه الخلية التي يتقاطع عندها صف (س٢) مع عمود (س٢) لا بد وأن تكون (١) دائماً وأبداً. وتكون كافة قيم العناصر الأخرى في ذلك العمود (٠) بشكل دائم ومباشر.

الحل بالطريقة الأولى وفق القانون:

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦			
س٤	٠	٠	١	١	١	١-	١-	١٠	٠	
س٢	$-(\cdot \times 1)$ ٠	$-(\cdot \times 1)$ ١	$-(\cdot \times 1)$ ١	$-(\cdot \times 1)$ ١	$-(\cdot \times 1)$ ١	$-(\cdot \times 1)$ ١	$-(\cdot \times 1)$ ١	$-(\cdot \times 1)$ ١٠	٨	
س١	$(\cdot \times \cdot)-1$ ١	$(\cdot \times \cdot)-\cdot$ ٠	$(1 \times \cdot)-\cdot$ ٠	$(1 \times \cdot)-\cdot$ ٠	$(1 \times \cdot)-\cdot$ ٠	$(1 \times \cdot)-1$ ١	$(1 \times \cdot)-1$ ١	$(1 \times \cdot)-1$ ٨٠	٥	

الحل بالطريقة الثانية (N) المقلوبة:

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦			
س٤	٠	٠	١	١	١-	١-	١٠	٠		
س٢	$-x_{٠-٠}$ = ١/١ ٠	$-x_{٠-١}$ = ١/١ ١	$-x_{١-٠}$ = ١/١ ١	٠	$-x_{١(-)-٠}$ = ١/١ ١-	$-x_{١(-)-٠}$ = ١/١ ١-	$-x_{١٠-٦٠}$ = ١/١ ٧٠	٨		
س١	$١/٠ \times ٠$ = ١	$١/٠ \times ٠-٠$ = ٠	$١/٠ \times ١-٠$ = ٠	٠	$١/٠ \times ١$ = ٠	$١/٠ \times ١$ = ١	$١/٠ \times ١٠$ = ٨٠	٥		

ونجد أن الطريقتان قد أدت إلى نفس النتيجة.

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦			
س٤		٠	٠	١	١	١-	١-	١٠	٠	
س٢		٠	١	١	٠	٠	١-	٧٠	٨	
س١		١	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥	

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل*)	الكمية	المتغيرات غير الأساسية				رل
			المتغيرات الأساسية				
			س٤	س٣	س٢	س١	
	٠						س٤ X
	.						س
							ظل س٤ X

كرر نفس العملية على باقي قيم المتغيرات الأساسية

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
	٠	١٠	١-	١-	١	١	٠	٠	س٤
	٨	٧٠	١-	٠	٠	١	١	٠	س٢
	٥	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س١
			$=1 \times 0$	$=1 \times 0$	$=1 \times 0$	$=1 \times 0$	$=0 \times 0$	$=0 \times 0$	ظل س٤
			$=1 \times 8$	$=0 \times 8$	$=0 \times 8$	$=1 \times 8$	$=1 \times 8$	$=0 \times 8$	ظل س٢
			$=1 \times 5$	$=0 \times 5$	$=0 \times 5$	$=0 \times 5$	$=0 \times 5$	$=1 \times 5$	ظل س١

ملاحظة: حسب شرح الدكتور محمد الإدريسي فإن الأمر لا يستدع حساب ظل الكمية.

قاعدة: مجموع ربح الظل (رج) هو مجموع ظل العناصر الأساسية (ظل) في العمود.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
	٠	١٠	١-	١-	١	١	٠	٠	س٤
	٨	٧٠	١-	٠	٠	١	١	٠	س٢
	٥	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س١
			٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٤
			٨-	٠	٠	٨	٨	٠	ظل س٢
			٥	٠	٠	٠	٠	٥	ظل س١
			٣-	٠	٠	٨	٨	٥	رج

الآن .. نقوم باستخراج متغير أساسي جديد هو عبارة عن (رل) مطروحاً منه (رج). فينتج لدينا:

المتغيرات الأساسية	رل	٥	٨	م	٠	م	٠	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)
		المتغيرات غير الأساسية								
		س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦			
س٤	٠	٠	١	١	١	-١	-١	١٠	٠	
س٢	٠	١	١	٠	٠	٠	-١	٧٠	٨	
س١	١	٠	٠	٠	٠	٠	١	٨٠	٥	
ظل س٤	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠			
ظل س٢	٠	٨	٨	٠	٠	٠	-٨			
ظل س١	٥	٠	٠	٠	٠	٠	٥			
رج	٥	٨	٨	٠	٠	٠	-٣			
رل-رج	٠	٠	م-٨	٠	م	٣				

قاعدة: تنقل قيم عمود الربح أو التكلفة (رل★) كما هي من صف (رل) لكل عنصر على حدة.

الآن... نقوم بالتعويض عن (م) بأي رقم إفتراضي على أن يكون رقم كبير وليس صغير كـ (١٠٠) أو (٢٠٠) مثلاً لأننا نرغب في إستبعاده، ومن ثم التعويض عن ك بذلك الرقم. وسنفترض أن م = ١٠٠

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	م	٠	م	٨	٥	رل
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
	٠	١٠	١-	١-	١	١	٠	٠	س٤
	٨	٧٠	١-	٠	٠	١	١	٠	س٢
	٥	٨٠	١	٠	٠	٠	٠	١	س١
			٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٤
			٨-	٠	٠	٨	٨	٠	ظل س٢
			٥	٠	٠	٠	٠	٥	ظل س١
			٣-	٠	٠	٨	٨	٥	رج
			٣	١٠٠	٠	٩٢	٠	٠	رل-رج

يلاحظ هنا أن جميع قيم (رل-رج)، قد أصبحت بالـ (٠) وبالموجب (+)، وبالتالي تكون المسألة قد إنتهت. ويتضح من ذلك أن أفضل إنتاج يحقق أقل تكاليف سوف يكون بإنتاج عطر مكون من، (٧٠) وحدة من المنتج (ب) والذي رمز له بالرمز (س٢) وبتكلفة قدرها (٨)، وخلطه مع (٨٠) وحدة من المنتج (أ) والذي رمز له بالرمز (س١) وبتكلفة قدرها (٥). وهو يحقق الشرط المطلوب في السؤال.

<<<<<<<< >>>>>>>>

سنقوم الآن بحل عدد من الأمثلة دون الخوض في تفاصيل الحل حيث ينصح بحلها خارجياً ثم العودة للمذكرة للتأكد من الحل ويمكن للجميع العودة لما سبق شرحه للإطلاع على تفاصيل حل المسائل

مثال (٣): وفقاً للقيود التالية:

$$ده \uparrow = ٧س١ + ٥س٢$$

$$\text{القيود (١)} = ٦ \geq ٢س١ + ١س٢$$

$$\text{القيود (٢)} = ٠ \geq ٢س١ - ١س٢$$

$$\text{قيود عدم السلبية} = ١س \geq ٠ \text{ (أو) } ٢س \geq ٠$$

والمطلوب: أوجد قيمة (س١) وقيمة (س٢) مستخدماً طريقة السمبلكس.**الحل:** نقوم بتحويل الدالة والقيود إلى الشكل المعياري الموحد (الكونيكال).

$$ده \uparrow = ٧س١ + ٥س٢ + ٣س٣ + ٤س٤$$

$$\text{القيود (١)} = ٦ = ٣س٣ + ٢س٢ + ١س١$$

$$\text{القيود (٢)} = ٠ = ٤س٤ + ٢س٢ - ١س١$$

$$\text{قيود عدم السلبية} = ١س \geq ٠, ٢س \geq ٠, ٣س \geq ٠, ٤س \geq ٠$$

الجدول المبدئي:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٥	٧	رل
النسبة (٥)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
٦	٠	٠	١	١	١	س٣
١	٠	١	٠	١-	١	س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	ظيل س٣
	٠	٠	٠	٠	٠	ظيل س٤
	٠	٠	٠	٠	٠	رج
	٠	٠	٠	٥	٧	رل - رج

الجدول الأول:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٥	٧	رل
النسبة (٥)		المتغيرات غير الأساسية				المتغيرات الأساسية
		س٤	س٣	س٢	س١	
٣	٠	١-	١	٢	٠	س٣
٠	٧	١	٠	١-	١	س١
	٠	٠	٠	٠	٠	ظيل س٣
	٠	٧	٠	٧-	٧	ظيل س١
	٠	٧	٠	٧-	٧	رج
	٠	٧-	٠	١٢	٠	رل - رج

ملاحظة: العنصر الخارج أعلاه هو (س٣) بالرغم من أن (س١) أقل منه من حيث النتيجة إلا أن (س١) تم إهماله لقسمته على عدد سالب الواقع في العمود الداخل عند استخراج النسبة.

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٥	٧	رل		
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٤	س٣	س٢	س١			
	٥	٣	٢/١-	٢/١	١	٠	س٢		
	٧	٣	٢/١	٢/١	٠	١	س١		
		١٥	٢/٥-	٢/٥	٥	٠	ظيل س٢		
		٢١	٢/٧	٢/٧	٠	٧	ظيل س١		
		٣٦	١	٦	٥	٧	رج		
		٣٦-	١-	٦-	٠	٠	رل - رج		

الجدول المبدئي:

[illegible]

[illegible]

الجدول المبدئي:

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٠	٣٨	٨٤	٤٨	رل
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٦	س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
٤٥	٠	٤٥	٠	٠	١	٢	١	٣	س٤
١٥	٠	٦٠	٠	١	٠	١	٤	٢	س٥
٣٠	٠	١٢٠	١	٠	٠	٣	٤	٣	س٦
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظيل س٤
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظيل س٥
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظيل س٦
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	رج
		٠	٠	٠	٠	٣٨	٨٤	٤٨	رل-رج

العنصر الداخل هو (س٢) لأنه أعطى أعلى نتيجة موجبة في الصف الأخير (رل-رج)، والعنصر الخارج هو (س٥) لأنه أعطى أقل نتيجة موجبة في عمود النسبة.

الجدول الأول:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	المتغيرات الأساسية	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س	النسبة (Ø)
رل	٤٨	٨٤	٣٨	٠	٠	٠	٠	٠	
المتغيرات الأساسية	١ س	٢ س	٣ س	٤ س	٥ س	٦ س			
٤ س	٢/٥	٠	٤/٧	١	٤/١	٠	٠	٠	∞
٢ س	٢/١	١	٤/١	٠	٤/١	٠	٠	٠	١٥
٦ س	٢/١	١	٤/١	٠	٤/١	٠	٠	٠	٦٠
ظل ٤ س	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
ظل ٢ س	٤٢	٨٤	٢١	٠	٢١	٠	٠	٠	
ظل ٦ س	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
رج	٦	٠	١٧	٠	٢١	٠	٠	٠	
رل-رج	٤٢	٨٤	٢١	٠	٢١	٠	٠	٠	

العنصر الداخل هو (٢ س) لأنه أعطى أعلى نتيجة موجبة في الصف الأخير (رل-رج)، والعنصر الخارج هو (٢ س) لأنه أعطى أقل نتيجة موجبة في عمود النسبة. وأما الحل فهو ليس هو الحل الأمثل، لوجود قيم موجبة في الصف الأخير.

<<<<<<< >>>>>>>

مثال (٥): وفقاً للقيود التالية:

$$ده \uparrow = ١٠س١ + ٢س٢$$

$$القيد (١) = ١٥٠٠ \geq ٢س٣ + ١س٢$$

$$القيد (٢) = ١٥٠٠ \geq ٢س٢ + ١س٣$$

$$القيد (٣) = ٦٠٠ \geq ٢س + ١س$$

$$قيد عدم السلبية = ١س (أو) ٢س \leq (٠)$$

والمطلوب: أوجد قيمة (١ س) وقيمة (٢ س) مستخدماً طريقة السمبلكس.

الحل: نقوم بتحويل الدالة والقيود إلى الشكل المعياري الموحد (الكونيكال).

$$ده \uparrow = ١٠س١ + ٢س٢ + ٣س٣ + ٤س٤ + ٥س٥$$

$$القيد (١) = ١٥٠٠ = ٣س٣ + ٢س٢ + ١س٢$$

$$القيد (٢) = ١٥٠٠ = ٤س٤ + ٢س٢ + ١س٣$$

$$القيد (٣) = ٦٠٠ = ٥س٥ + ٢س + ١س$$

$$قيد عدم السلبية = ١س (أو) ٢س \leq (٠)$$

الجدول المبدئي:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٠	١٢	١٠	رل	
		المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
		س٥	س٤	س٣	س٢	س١		
٥٠٠	٠	١٥٠٠	٠	٠	١	٣	٢	س٣
٧٥٠	٠	١٥٠٠	٠	١	٠	٢	٣	س٤
٦٠٠	٠	٦٠٠	١	٠	٠	١	١	س٥
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٣
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٤
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٥
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	رج
		٠	٠	٠	٠	١٢	١٠	رل-رج

الجدول الأول:

النسبة (Ø)	الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٠	١٢	١٠	رل	
			المتغيرات غير الأساسية						المتغيرات الأساسية
			س٥	س٤	س٣	س٢	س١		
٧٥٠	١٢	٥٠٠	٠	٠	٣/١	١	٣/٢	س٢	
٣٠٠	٠	٥٠٠	٠	١	٣/٢-	٠	٣/٥	س٤	
٣٠٠	٠	١٠٠	١	٠	٣/١-	٠	٣/١	س٥	
		٦٠٠٠	٠	٠	٤	١٢	٨	ظ.ل س٣	
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٤	
		٠	٠	٠	٠	٠	٠	ظ.ل س٥	
		٦٠٠٠	٠	٠	٤	١٢	٨	رج	
		٦٠٠٠-	٠	٠	٤-	٠	٢	رل-رج	

يلاحظ هنا أن النسبة قد أخرجت لنا عنصرين متساويين وجميعهما أقل ما في العمود، ولذا فقد يسأل سائل، أي منهما سيتم إخراجها؟ والجواب: أي عنصر سيتم إخراجها فلا بأس في ذلك. ولذا سيتم إخراج العنصر (س٥) باعتباره أن كميته أقل من كمية العنصر (س٤). وهذا لا يمنع من إخراج العنصر الآخر دون النظر إلى الكمية أو أي ناتج آخر.

الجدول الثاني:

الربح أو التكلفة (رل★)	الكمية (ب)	٠	٠	٠	١٢	١٠	رل
النسبة (Ø)		المتغيرات غير الأساسية					المتغيرات الأساسية
		س٥	س٤	س٣	س٢	س١	
	١٢	٣٠٠	٢-	٠	١	١	س٢
	٠	٠	٥-	١	١	٠	س٤
	١٠	٣٠٠	٣	٠	١-	٠	س١
		٣٦٠٠	٢٤-	٠	١٢	١٢	ظل س٣
		٠	٠	٠	٠	٠	ظل س٤
		٣٠٠٠	٣٠	٠	١٠-	٠	ظل س٥
		٦٦٠٠	٦	٠	٢	١٢	رج
		٦٦٠٠-	٦-	٠	٢-	٠	رل-رج

عليه فقد إنتهت الإجابة حيث أصبحت جميع قيم الصف الأخير (رل-رج) أصفاً أو نتائج سالبة، ويكون أفضل إنتاج هو عند (س١) بمقدار (٣٠٠) و(س٢) بمقدار (٣٠٠).

<<<<<<< >>>>>>>

مثال (٦): بالعودة إلى المثال السابق في الرسم البياني. المطلوب هو إعادة الحل بطريقة سمبلكس.

نوع الحقبة	تجميع	تغليف	سعر البيع
حقبة سفر	١٠	٥	٥٠
حقبة مدرسية	٥	٥	٤٠
الوقت المتاح	٤٠	٣٠	

الحل:

نفترض أن حقبة السفر = س١ والحقبة المدرسية = س٢، ونقوم بكتابة الدالة والقيود:

$$\text{د-} \uparrow 50س١ + 40س٢$$

$$\text{القيود (١)} = 10س١ + 5س٢ \geq 40$$

$$\text{القيود (٢)} = 5س١ + 5س٢ \geq 30$$

$$\text{قيود عدم السالبة} = س١ \geq 0 \text{ (أو)} س٢ \geq 0 \text{ (أو)} س١, س٢ \leq 0$$

نقوم بتحويل الدالة والقيود إلى الشكل المعياري الموحد (الكونيكال).

$$\text{د-} \uparrow 50س١ + 40س٢ + 3س٣ + ٤س٤$$

$$\text{القيود (١)} = 10س١ + 5س٢ + ٥س٣ + ٣س٤ = 40$$

$$\text{القيود (٢)} = 5س١ + 5س٢ + ٥س٣ + ٤س٤ = 30$$

$$\text{قيود عدم السالبة} = س١, س٢, س٣, س٤ \geq 0$$

الجدول المبدئي:

المتغيرات الأساسية	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)	رل	٥٠	٤٠	٠	٠
				المتغيرات غير الأساسية				
				س١	س٢	س٣	س٤	
س٣	١٠	٥	١	٠	٠	٤٠٠	٠	
س٤	٥	٥	٠	١	٠	١٥٠	٠	
ظل س٣	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
ظل س٤	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
رج	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
رل-رج	٥٠	٤٠	٠	٠	٠	٠	٠	

الجدول الأول:

المتغيرات الأساسية	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)	رل	١٠	٦	٠	٠
				المتغيرات غير الأساسية				
				س١	س٢	س٣	س٤	
س٣	٠	٥-	١	٢-	٢٠-	٣	٤	
س١	١	١	٠	١	٥/١	٦	١٠	
ظل س٣	٠	١٥-	٣	٦-	٦٠-	١٠	١٠	
ظل س١	١٠	١٠	٠	٢	٦٠	٠	٠	
رج	١٠	٥-	٣	٤-	٠	٠	٠	
رل-رج	٠	١١	٣-	٤	٠	٠	٠	

الجدول الثاني:

المتغيرات الأساسية	الكمية (ب)	الربح أو التكلفة (رل★)	النسبة (Ø)	رل	١٠	٦	٠	٠
				المتغيرات غير الأساسية				
				س١	س٢	س٣	س٤	
س٢	٠	١	٠	٥/١-	٥/٢	٤	٦	
س١	١	٠	٠	٥/١	٥/١-	٢	١٠	
ظل س٢	٠	٦	٥/٦-	٥/١٢	٢٤	٠	٠	
ظل س١	١٠	٠	٢	٥/٢	٤٤	٤٤-	٠	
رج	١٠	٦	٥/٤	٥/٢	٤٤	٤٤-	٠	
رل-رج	٠	٠	٥/٤-	٥/٢-	٤٤-	٤٤-	٠	

عليه فقد إنتهت الإجابة حيث أصبحت جميع قيم الصف الأخير (رل-رج) أصفاراً أو نتائج سالبة، ويكون أفضل إنتاج هو عند (س١) بمقدار (٢) و(س٢) بمقدار (٤).

ملخص لقواعد وقوانين الطريقة المبسطة (سمبلكس Simplex)

قاعدة: دائماً وأبداً لتحويل المتراجحات إلى معادلات رياضية:

١. إذا كان في المتراجح أصغر من أو يساوي (\geq) يضاف (+) متغير راكد.
٢. إذا كان في المتراجح أكبر من أو يساوي (\leq) يطرح (-) متغير فائض ويضاف (+) متغير وهمي.
٣. إذا كان في المتراجح يساوي (=) يضاف (+) متغير وهمي.

قاعدة: عند تغيير دالة الهدف بعد إضافة جميع المتغيرات، فإننا نعطي المتغير (راكد) والمتغير (فائض) دائماً القيمة (صفر) أما (وهي) فيعطى دائماً (م).

قاعدة: بعد تعديل دالة الهدف (ده) بإضافة المتغيرات الجديدة لها، فيصبح رمزها (رل).

قاعدة: المتغيرات الأساسية هي جميع المتغيرات المضافة (أي: التي أضفناها لتكوين المعادلة) في القيود ماعدا المتغيرات التي تحمل الإشارة سالب (-). أي (الراكد والفائض والوهي) ما لم يكن سالباً.

قاعدة: قيمة الربح أو التكلفة في الجدول هي عبارة عن قيمة العنصر (س) في دالة الهدف (ده) وهي (=) (رل) وهي (=) الربح وهي (=) التكلفة.

قاعدة: العنصر الداخل هو (العمود) الذي أعطى أعلى نتيجة في (رل - رج) في حالة الأرباح والأقل الأفضل في حالة التكاليف.

قاعدة: العنصر الخارج هو (الصف) الذي أعطى أقل نتيجة في (النسبة) سواء في مسائل الأرباح أو التكاليف.

قاعدة: في تحديد العنصر الخارج، وبعد حساب التكاليف، فإننا نستبعد فوراً كل القيم التي تكون سالبة (-) وكذلك النسبة التي تكون نتيجتها مالانهاية (∞) ونختار أقل نسبة.

قاعدة: لإخراج العنصر الخارج وإدخال العنصر الداخل فيجب قسمة جميع القيم في الصف الخارج على نقطة الارتكاز للوصول إلى قيم الصف الداخل.

نقطة الارتكاز: هي النقطة التي يتقاطع عندها عمود العنصر الداخل مع صف العنصر الخارج، ويطلق في هذه العملية على العنصر الداخل (س) اسم الصف المحوري الجديد.

قيم العنصر القديم الذي سيظل في الجدول = القيمة القديمة في ذلك الصف - (القيمة المقابلة لنقطة الارتكاز \times القيمة المقابلة في الصف المحوري الجديد) وعلى أن يتم استخراج الناتج بين القوسين ثم يطرح من القيمة القديمة في ذلك الصف.

ربح الظل (ظ.ل) للعنصر = قيم الربح أو التكلفة (رل \star) \times عنصر ذلك الصف، أي أن نقوم بضرب قيم (رل \star) ونضع النتائج في صف واحد وهو الذي سيمثل ربح الظل لذلك العنصر (العنصر).

مجموع ربح الظل (رج) = (قيم الربح أو التكلفة (رل \star) \times العنصر في العمود) ثم جمع جميع النتائج في ذلك العمود. أي: مجموع ربح الظل (ظ.ل) لكل عمود على حدة.

قاعدة: **الربح أو التكلفة** هي قيمة ذلك المتغير الأساسي، ويؤخذ من المعادلات (رل) بحيث تكون قيمة الربح أو التكاليف (٠) للمتغير الراكد أو الفائض، و(م) للمتغير الوهمي.

قاعدة: **قيم الربح أو التكلفة (رل★)** في الجدول هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف، أي أنها قيمة ذلك المتغير في الدالة، ولذا فإنها تنقل نقلاً ولا تحسب بأي قاعدة رياضية.

قاعدة: **النسبة (Ø) = الكمية ÷ القيمة المقابلة لها في العنصر الداخل**، ثم نختار المتغير الذي يحتوي أقل نسبة.

قاعدة: **لا تستخرج النسبة** إلا بعد تحديد العنصر الداخل، أي أنها آخر عملية يتم إجراؤها في الجدول ويتم على إثرها تحديد العنصر الخارج، وهي أقل رقم غير سالب أو غير مقسوم على رقم سالب.

قاعدة: **قيم الكمية في الجدول المبدئي فقط هي الطرف الأيسر من القيد.**

قاعدة: **في حالة الأرباح فإن (م) سالبة (-) وفي حالة التكاليف فتكون موجبة (+).**

قاعدة: **في حالة مسائل الربحية** يجب أن نستمر في عمل الجداول إلى أن يكون كامل صف (رل - رج) إما صفر (٠) أو نتيجة سالبة (-). وفي حالة **التكاليف** إما صفر (٠) أو موجبة (+) وإلا وجب علينا تكرار العمل عدة مرات للوصول إلى هذه النتيجة.

طرق مبسطة مقترحة لحل المسائل بطريقة (سمبلكس Simplex)

لمعرفة وتحديد قيم صف العنصر الداخل بعد تسجيله، قم بما يلي:

١. سجل جميع قيم صف العنصر الخارج (المستبعد) كما هي متبوعة بعلامة (-).
٢. سجل بعد علامة (-) قيمة نقطة الارتكاز.
٣. أوجد ناتج هذه العملية في كل خانة صف على حدة.

لمعرفة وتحديد قيم العنصر القديم (الصف القديم) الذي لم يتم استبعاده أو إخراج، قم بما يلي:

١. سجل جميع القيم السابقة كما هي متبوعة بعلامة (-) ثم افتح قوس.
٢. سجل بعد القوس القيمة المقابلة للعنصر في عمود الارتكاز السابق متبوعاً بعلامة (x).
٣. سجل بعد (x) جميع قيم الصف الجديد الذي تم إدخاله ثم أغلق القوس.
٤. أوجد ناتج ما بين القوسين ثم أخرج ذلك الناتج من الرقم السابق للقوسين.

لمعرفة وتحديد قيم (رج) قم بما يلي:

١. سجل قيمة (الربح أو التكلفة) في جميع خانات الصف متبوعاً بعلامة (x).
٢. سجل بعد (x) جميع القيم الموجودة في صف المتغير الأساسي الأول.
٣. كرر العملية (١) و (٢) لبقية المتغيرات الأساسية الموجودة لديك.
٤. أوجد ناتج عمليات الضرب ثم اجمع هذه النواتج في كل عمود مع بعضها.

تذكر دائماً:

١. يجب التعويض عن (م) ولكن يتم التعويض عنها برقم مرتفع إفتراضي (١٠٠) أو (٢٠٠) ويكون ذلك بعد استخراج قيمة (رل-رج) وليس قبله كي يتم معرفة العنصر الداخل.
٢. استخراج النسبة شرط أساسي لمعرفة العنصر الخارج، وهي آخر عملية تقوم بها، وتكون بعد تحديد العنصر الدخول وليس قبله.
٣. لاستخراج النسبة، اقسم (الكمية) على القيمة المقابلة لها في العنصر الداخل.
٤. دائماً وأبداً، اختر أقل نسبة وذلك في حالتي التكاليف أو الأرباح لإستخراج العنصر الخارج.
٥. دائماً وأبداً لتحديد العنصر الخارج في حالة التكاليف، استبعد أولاً النتائج السالبة (-) أو مالانهاية (∞) ثم اختر أقل نسبة لديك.
٦. دائماً وأبداً، العنصر الداخل هو أعلى رقم خرج لك في (رل-رج) في حالة الأرباح، وأقل وأفضل رقم في حالة التكاليف. (أقل أفضل يعني: أصغر رقم يعطي أكبر تخفيض مثلاً).
٧. ابدأ في أي عملية حسابية بضرب ما بين القوسين ثم القسمة ثم الجمع أو الطرح.

**هذه الأفكار غير إلزامية، ويمكنك الحل بالطريقة التي تراها مناسبة لك
وعليك التركيز على حفظ القوانين، والإكثار من حل المسائل للتدريب عليها**

الفصل الرابع: مشاكل النقل والتخصيص - طرق الحل المختلفة (الفصل الخامس حسب ترتيب الكتاب المقرر)

أولاً: النقل.

تعريفها.

هي حالة من حالات البرمجة الخطية، ولكنها لا تعتمد على الطرق العادية، فهي خاصة بالنقل كنقل البضائع والركاب وما شابه فقط وذلك بأقل تكلفة ممكنة. أي أن النقل يقوم بحل مسائل التكلفة وليس مسائل الأرباح. وللحل فهناك طريقتين للحل هما الحل المبدئي والحل الأمثل، ولكل منها طريقتين:

١. **الحل المبدئي.** ويمكن أن يتم الحل بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ- الشرق للغرب.

ب- أقل التكاليف.

قاعدة: إذا لم يحدد في السؤال الطريقة المطلوب الحل بها، فتحل المسألة بطريقة أقل التكاليف لأنها أسرع في الحل.

٢. **الحل الأمثل.** ويطلق عليها (محسّنات الحل) ويمكن أن يتم الحل بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ- خانات التحسين. ويطلق عليها (مؤشرات خانات التحسين) و(المسار المغلق).

ب- توزيع المعدل.

حالة التوازن هي الحالة التي يتساوى بها العرض مع الطلب، ولا يعني ذلك تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف.

قبل إجراء أي حل. إذا لم تعط معلومات السؤال في جدول يسمى (جدول تكاليف النقل)، فلا بد من وضع كافة تلك المعلومات المعطاة في السؤال في جدول يتكون من المعلومات أدناه.

دائماً وأبداً يكتب في الزاوية اليمنى السفلية للجدول (الطلب) وتسجل في ذلك الصف كامل الكميات المطلوب نقلها لكل نقطة. وفي الزاوية اليسرى العلوية للجدول (العرض) وتسجل في ذلك العمود كامل الكميات المتوفرة في المواقع المراد النقل منها.

لا يشترط في جدول النقل أن يتساوى عدد الأعمدة مع عدد الصفوف، ولكن يجب أن يتساوى الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة. وفي حالة عدم تساوي المعروض مع المطلوب نقوم **بأي مما يلي**:

١. إضافة صف في أسفل الجدول قبل صف (الطلب) ويطلق عليه (العرض الوهمي) وتكون كافة قيم تكاليف نقله (٠) ويسجل في آخر خانة به (خانة العرض) الكمية التي يتساوى بها العرض مع الطلب.

٢. (أو) إضافة عمود في يسار الجدول قبل عمود (العرض) ويطلق عليه (الطلب الوهمي) وتكون كافة قيم تكاليف نقله (٠) ويسجل في آخر خانة به (خانة الطلب) الكمية التي يتساوى بها الطلب مع العرض.

دائماً وأبداً يجب قبل إجراء أي حل أن يتوفر لدينا جدول تكلفة النقل وهو إما أن يعطى في السؤال أو يتم تصميمه وفقاً لمعلومات السؤال.

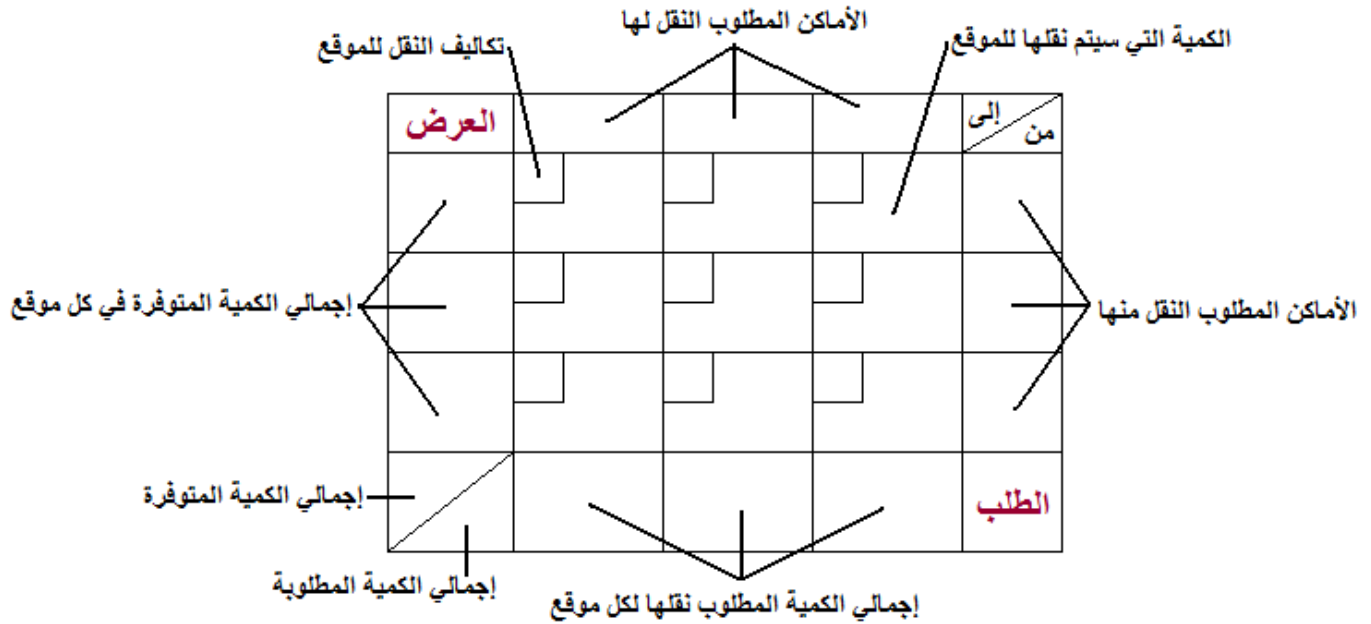
مكونات جدول تكاليف النقل.

١. أماكن تخزين. وتكون في أول عمود أيمن في الجدول.
٢. أماكن طلب. وتكون في أول صف علوي في الجدول.
٣. مقدار الوحدات المعروضة. وتكون في آخر عمود أيسر في الجدول.
٤. مقدار الوحدات المطلوبة. وتكون في آخر صف سفلي في الجدول.

٥. تكلفة نقل كل وحدة من كل مخزن. وتكون داخل مربعات صغيرة في الزاوية اليسرى العلوية لكل خلية من خلايا الجدول.

دائماً وأبداً يكتب في أول عمود يمين الجدول المواقع التي سيتم النقل منها (من) وفي أعلى صف في الجدول المواقع التي سيتم النقل إليها (إلى).

التكاليف الكلية للنقل: هي مجموع تكاليف النقل لجميع النقاط، أي: $(\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + (\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + \dots$



هام: إذا لم يحدد في السؤال طريقة الحل المبدئي، فدائماً وأبداً نبدأ بالحل بطريقة أقل التكاليف لأنه يوفر علينا جداول كثيرة، والحل بأقل التكاليف سيوفر لدينا وقت كثير. إلا إذا طلب منا تحديداً الطريقة التي يجب بها الحل.

أولاً: قواعد الحل المبدئي.

١. قاعدة الحل بطريقة الشرق للغرب.

- (١) نبدأ بالخانة الموجودة في أعلى يمين الجدول، ونضع في هذه الخانة أكبر كمية ممكنة (بالنظر إلى الطلب والعرض). أي القيمة الأقل بين الطلب والعرض.
- (٢) إذا وجدنا أننا قد استنفدنا كامل الكمية المعروضة (العرض) فيتم وضع أصفار في بقية خلايا الصف الأول. وإذا وجدنا أننا قد حصلنا على كامل الكمية المطلوبة (الطلب) فيتم وضع أصفار في بقية خلايا العمود الأول.
- (٣) نذهب إلى خانة العرض أو الطلب التي لم تكتمل في عملية النقل.
- (٤) نكرر العملية (من ١ إلى ٣) مع بقية خلايا الجدول إلى أن يتم استنفاد كافة الكميات المطلوبة والتي ستساوي مع الكمية المعروضة.

من خصائص طريقة الشرق للغرب أن الخانات المستخدمة (التي يوضع بها القيم) تشبه السلم أو الدرج.

٢. قاعدة الحل بطريقة أقل التكاليف.

- (١) نبدأ من الخانة التي تكون فيها التكاليف أقل ما يمكن، ونضع في هذه الخانة أكبر كمية ممكنة (بالنظر إلى الطلب والعرض). أي القيمة الأقل بين الطلب والعرض.
- (٢) نذهب إلى الخلية التي تليها في التكلفة ونكرر العملية السابقة.
- (٣) نكرر العملية (١ - ٢) مع بقية خلايا الجدول إلى أن يتم استنفاد كافة الكميات المطلوبة والتي ستتساوى مع الكمية المعروضة.

من خصائص طريقة أقل التكاليف أن الخانات المستخدمة تكون مبعثرة في الجدول.

ثانياً: قواعد الحل الأمثل.

١. قاعدة الحل بطريقة خانات التحسين.

- لا بد أولاً من استخراج الحل المبدئي بإحدى الطريقتين السابق ذكرهما. وبفضل دائماً الحل بطريقة أقل التكاليف نظراً لكونها تحتاج إلى خطوات أقل مما يختصر وقت حساب المسألة.
- (١) بعد تحديد الخلايا الصفيرية (الخلايا التي لم يتم تحديد أي كمية نقل بها) نقوم بتحديد مسار تحسين كل خلية منها وذلك وفق الشروط التالية:
- تكون جميع مسارات التحسين خطوط أفقية أو عمودية ويمنع قطعاً أن تكون مائلة.
 - أن يبدأ المسار من الخلية الصفيرية وتتجه إلى أقرب خلية شاغلة (ممتلئة) لها بخط مستقيم.
 - يكون تغير مسار الخط من أفقي إلى عمودي وبالعكس في الخلايا الممتلئة فقط، ويمنع قطعاً تغير اتجاه الخط إذا كانت نهايته خلية صفيرية.
 - يمكن العبور بخط مستقيم على الخلايا الصفيرية وكذلك الخلايا الممتلئة دون النظر إلى تكاليف النقل بها عند حساب التكاليف النهائية.
- (٢) بعد تحديد مسار كل خلية صفيرية، يتم توزيع الإشارات (موجبة +) ثم (سالبة -) بالتتالي ابتداءً بالخلية الصفيرية (خانة البداية) وإنهاءً بأخر خلية في المسار للوصول إلى مؤشرات الخلايا الصفيرية (الشاغرة).
- (٣) يتم حساب قيمة (تكاليف) كامل مسار الخلية الصفيرية وذلك بجمع تكلفة كل خلية في المسار ثم جمع كافة تلك التكاليف ومن ثم:
- إذا كانت جميع النتائج صفر أو نتيجة موجبة فذلك يعني أنه الحل الأمثل، وتنتهي به المسألة.
 - إذا ظهر أي نتائج سالبة فيؤخذ بأعلى نتيجة سالبة ثم يتم عمل ما يلي على مسارها:
 - ينظر إلى أقل كمية سالبة قبل وبعد الخلية الصفيرية (نقطة البداية).
 - تضاف تلك الكمية إلى جميع الكميات الموجبة في المسار. وتطرح من كافة الكميات السالبة في ذلك المسار.
 - يعاد توزيع تلك الكميات الناتجة إلى كامل مسار التحسين.
- (٤) بعد إجراء ذلك التعديل، يتم إعادة الخطوات من الخطوة (٢) إلى الخطوة (٤).

خانات التحسين: هي الخانات الشاغرة (الفارغة) التي لم يكتب بها أي أعداد.

إذا وجد أن هناك خليتين متساويتان في أجور النقل: نختار الخلية التي نستطيع أن نضع بها أكبر كمية ممكنة.

لكي يكون الحل ممكن لا بد أن يتحقق: عدد الخانات المستخدمة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١.

التكاليف الكلية للنقل: هي مجموع تكاليف النقل لجميع النقاط، أي: $(\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + (\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + \dots$

لا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل إلا إذا أوجدنا أولاً الحل المبدئي بإحدى طريقتيه.

بعد تحديد مسار كل خلية صفرية، يتم توزيع الإشارات (موجبة +) ثم (سالبة -) بالتتالي ابتداءً بالخلية الصفرية (خانة البداية) وإنهاءً بآخر خلية في المسار للوصول إلى مؤشرات الخلايا الصفرية (الشاغرة).

تحتسب مؤشرات الخلايا الصفرية لمعرفة ما إذا كان لا يزال أحدها يطعي مؤشراً سالباً، حيث أن الحل الأمثل هو عندما تكون كافة المؤشرات موجبة.

الخلية الممتلئة وهمياً: هي خلية شاغرة (صفرية) تعتبر ممتلئة وتحتسب تكاليف نقلها عند حساب تكاليف خط التحسين، وتفترض عندما يستحيل الحل بدونها، ويجب ألا يكون فب الجدول أكثر من خلية وهمية واحدة.

قاعدة: عند رسم مسارات التحسين فإنه:

١. تكون نقطة بداية كل مسار خلية شاغرة (خلية صفرية) ولا يبدأ المسار في الخلايا الشاغرة (الممتلئة).
٢. لا يمكن تغيير اتجاه خط التحسين من رأسي إلى أفقي وبالعكس في الخلايا الشاغرة (الخلايا الصفرية).
٣. ترسم جميع خطوط التحسين أفقية وعمودية ولا ترسم محورية (مائلة) قط.
٤. لكل خلية شاغرة (الخلية الصفرية) مسار واحد فقط.
٥. يمكن العبور من خلية إلى خلية أخرى عبر خلية شاغرة (ممتلئة) أو شاغرة (صفرية) شريطة أن تكون تلك الخلية (خلية الجسر) على نفس الخط أفقياً أو عمودياً.
٦. الخط الواصل بين خليتين مروراً بـ (خلية الجسر) لا يتوقف عند (خلية الجسر).
٧. لا يتم احتساب قيمة (خلية الجسر) ضمن تكاليف خط التحسين.
٨. بعد رسم خط التحسين نبدأ بوضع إشارة (+) عند الخلية الشاغرة (الصفرية) وإشارة (-) في الخلية التي تليها ثم موجب ثم سالب وصولاً إلى نقطة البداية، وللتأكد من وضع الإشارات فإنه لابد وأن تكون إشارتي الخليتين السابقتين واللاحقة للخلية البداية سالبة.

٢. قاعدة الحل بطريقة توزيع المعدل.

- ١) يجب أولاً تحديد الخلايا الصفرية (الخلايا الشاغرة) والخلايا الممتلئة (الخلايا الشاغرة).
 - ٢) نقوم بإضافة صف جديد في أعلى الجدول، ويسمى (معامل المحور) ويسجل في خلايا هذا الصف، أي في كل خلية معامل يسمى (ع) مع إضافة رقم له ليصبح (١ع، ٢ع، ٣ع، ... الخ) بعدد الأعمدة.
 - ٣) نقوم بإضافة عمود جديد في أقصى يسار الجدول، ويسمى (معامل الصف) ويسجل في خلايا هذا العمود، أي في كل خلية معامل يسمى (ص) مع إضافة رقم له ليصبح (ص١، ص٢، ص٣، ... الخ) بعدد الصفوف.
 - ٤) نقوم بكتابة (معادلات) كل خلية **شاغرة** (ممتلئة) بحيث $(\text{تكلفة النقل في تلك الخلية} = \text{معامل صفها} + \text{معامل عمودها})$.
 - ٥) لإيجاد معاملات (قيمة المجاهيل) تلك الخلايا نتبع القانون $(\text{ك.م.ل}) = (\text{ص.م}) + (\text{ع.م})$. أي..
 - ٦) تكلفة الخلية الشاغرة (الممتلئة) $(\text{ك.م.ل}) = (\text{ص.م})$ في أي صف هي + (ع.م) في أي عمود هي.
- نقوم بافتراض أن (ص١) يساوي (٠) ومنه نقوم بحساب معامل خلية تلو الأخرى بحيث إن تعذر الوصول لمعامل الخلية لإحتوائها على مجهولين، ننقل إلى الخلية التالية للوصول إلى

معاملها، ونكرر ذلك على بقية الخلايا، ومن ثم يمكن العودة لتلك الخلية بعد الوصول إلى معامل أحد مجاهيلها.

(٧) نقوم بكتابة (معادلات) كل خلية **شاغرة** (صفيرية) وذلك للوصول إلى مؤشرات تلك الخلايا.

(٨) لإيجاد معاملات (قيمة المجاهيل) تلك الخلايا نتبع القانون **(ش.م.ل) = (ك.م.ل) - (ص.م) -**

(ع.م). أي.. **(ش.م.ل)** مؤشر الخلية الصفيرية = **(ك.م.ل)** تكلفة النقل في تلك الخلية - **(ص.م)** في أي صف هي - **(ع.م)** في أي عمود هي.

(٩) نقوم بالتعويض في قيم تلك المجاهيل بما بقيمة كل مجهول (ص أو ع) سبق أو وصلنا إليه سابقاً عند حساب تكلفة الخلايا الشاغرة.

(١٠) إذا كانت جميع مؤشرات الخلايا الشاغرة (الصفيرية) موجبة فهذا يعني أنه الحل الأمثل، وفي

حالة ما إذا كان هناك أي مؤشر سالب فلا بد من إجراء تعديل في كميات النقل لتلك الخلية وفق مسارها المحدد (مسار التحسين).

(١١) إذا كانت جميع المؤشرات موجبة فالمسألة منتهية، وإن كانت سالبة فتكرر العملية إلى حين الوصول إلى المؤشرات الموجبة.

قاعدة: تكلفة الخلية الشاغرة (الممتلئة) **(ك.م.ل) = (ص.م) في أي صف هي + (ع.م) في أي عمود هي.** أي.. **(ك.م.ل) = (ص.م) + (ع.م).**

قاعدة: تكلفة الخلية الشاغرة (الصفيرية) **(ش.م.ل) = (ك.م.ل) التكلفة - (ص.م) في أي صف هي - (ع.م) في أي عمود هي.** أي.. **(ش.م.ل) = (ك.م.ل) - (ص.م) - (ع.م).**

قاعدة: يجب ألا نفرض أكثر من مجهول واحد بالصف، ومنه يتسلسل الوصول إلى قيمة المجاهيل.

إذا كان العرض أكبر من **(<) الطلب**. نقوم بإضافة صف وهمي (طلب وهمي) ونجعل تكاليف نقله دائماً (٠).

إذا كان الطلب أكبر من **(<) العرض**. نقوم بإضافة عمود وهمي (عرض وهمي) ونجعل تكاليف نقله دائماً (٠).

قاعدة: يجب ألا نفرض أكثر من مجهول واحد بالصف، ومنه يتسلسل الوصول إلى قيمة المجاهيل.

قاعدة: يجب ألا نفرض أكثر من مجهول واحد بالصف، ومنه يتسلسل الوصول إلى قيمة المجاهيل.

وسيتم توضيح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

مثال (١): أوجد تكلفة النقل المثلى من أماكن العرض إلى أماكن الطلب حسب الكميات المعروضة وأسعار النقل للوحدة الواحدة الموضحة في الجدول التالي:

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤	٨	٨	٥٦
ينبع	١٦	٢٤	١٦	٨٢
جدة	٨	١٦	٢٤	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ / ٢١٥

المطلوب: نقل هذه الوحدات إلى أماكن الطلب بأقل تكلفة ممكنة بجميع طرق الحل المبدئي والأمثل.

(١) الحل المبدئي بطريقة الشرق للغرب مع حساب تكلفة النقل الكلي.

سنقوم بالحل وذلك ابتداءً بالخلية اليمنى العلوية ثم الانتقال إلى الخلية التالية وما يليها كما سبق شرحه.

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٥٦	٠	٠	٥٦
ينبع	١٦	٦٦	٠	٨٢
جدة	٠	٣٦	٤١	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ / ٢١٥

ليكون الحل ممكناً فإنه لا بد أن يتحقق الشرط التالي:

عدد الخانات المستخدمة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١.

ومن الجدول أعلاه نجد أن: $٥ = ٣ + ٣ - ١$.

التكاليف: $(٤ \times ٥٦) + (١٦ \times ٣٦) + (٢٤ \times ٦٦) + (١٦ \times ١٦) + (٢٤ \times ٤١) = ٣,٦٢٤$ ريال.

(٢) الحل المبدئي بطريقة أقل التكاليف مع حساب تكلفة النقل الكلي.

سنقوم بالحل وذلك ابتداءً بالخلية التي تكون فيها تكاليف النقل أقل ما يمكن ثم الإنتقال إلى الخلية التالية لها من حيث تكاليف النقل ثم ما يليها ... الخ كما سبق شرحه.

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤ ٥٦	٨ ٠	٨ ٠	٥٦
ينبع	١٦ ٠	٢٤ ٤١	١٦ ٤١	٨٢
جدة	٨ ١٦	١٦ ٦١	٢٤ ٠	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ ٢١٥

يلاحظ في الجدول أعلاه تطابق تكاليف نقل الخلية (جدة/دبي) مع الخلية (ينبع/صنعاء) ووفق القاعدة فقد تم إختيار الخلية (جدة/دبي) لأننا نستطيع نقل كمية أكبر بنفس التكلفة من الخلية الأخرى.

التكاليف: $(٤ \times ٥٦) + (٨ \times ١٦) + (١٦ \times ٦١) + (١٦ \times ٤١) + (٢٤ \times ٤١) = ٢,٩٦٨$ ريال.

الطريقتان الموضحة أعلاه للحل، هما الطريقتان الوحيدتان، ولذا سننتقل لـ (الحل الأمثل) بغرض التأكد من أقل تكاليف ممكنة للنقل وعليه يكون القرار الصائب.

(٣) الحل الأمثل باستخدام طريقة مؤشرات خانات التحسين مع حساب تكلفة النقل الكلي.

وهي التي سبق شرحها بإعتبارها تعتمد إعتماً كلياً على الحل المبدئي. وتقوم على إستخدام الخانات غير المستخدمة (كمياتها المنقولة صفر). وبالعودة إلى الحل المبدئي بطريقة الشرق للغرب، ووفق ما سبق شرحه آنفاً في التعامل مع الخلايا الصفيرية وعلى أساس أن نبدأ بالإشارة الموجبة ثم السالبة إنتهاءً بمسار التحسين، تكون النتيجة:

من	إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٥٦	٤	٨	٨	٥٦
ينبع	١٦	١٦	٢٤	١٦	٨٢
جدة	٨	٨	١٦	٢٤	٧٧
الطلب	٧٢	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥

بعد تحديد مسار كل خلية صفيرية، يتم توزيع الإشارات (موجبة +) ثم (سالبة -) بالتتالي ابتداءً بالخلية الصفيرية (خانة البداية) وإنهاءً بآخر خلية في المسار للوصول إلى مؤشرات الخلايا الصفيرية (الشاغرة).

خانة غير مستخدمة	التكاليف	المؤشر
(٢/١) الدمام/دبي	$٨ - ٤ + ١٦ - ٢٤$	(٤-)
(٣/١) الدمام/صنعاء	$٨ - ٤ + ١٦ - ٢٤ + ٢٤ - ١٦$	(١٢-)
(٣/٢) ينبع/صنعاء	$٨ - ٤ + ١٦ - ٢٤ + ٢٤ - ١٦ + ٢٤ - ١٦$	(١٦-)
(١/٣) جدة/دمشق	$٨ - ١٦ + ٢٤ - ١٦$	(٠)

ومادام أننا قد حصلنا على مؤشر سالب فهذا يعني أنه لابد من إجراء تحسين جديد للوصول إلى نتائج موجبة أو صفر. وستكون الخلية الأفضل للتحسين هي الخلية التي أعطت أكبر قيمة سالبة وهي الخلية (٣/٢) ينبع/صنعاء لأنها أعطت (-١٦).

ولتحسين الحل الآن، نقوم بالبحث عن أقل قيمة في الخلايا السالبة المجاورة للخلية الصفيرية (خلية التحسين) ونقوم بعمل ما يلي:

١. طرح الكمية من الكميات المسجلة في الخلايا السالبة.

٢. إضافة الكمية إلى الكميات المسجلة في الخلايا الموجبة.

وبالتالي فإن كميات الخلايا السالبة المجاورة لخلية التحسين (٣/٢) هما (٤١) و(٦٦) وبالتالي فإن الكمية (٤١) أقل كمية سالبة، فنقوم بتمريرها على الخلايا الواقعة في مسار التحسين كما سبق شرحه.

إذًا... مسار التحسين هو (٠ + كمية) (٦٦ - كمية) (٣٦ + كمية) (٤١ - كمية). وتصبح بعد التحسين:

$$(٤١ + ٠ \text{ كمية}) (٦٦ - ٤١ \text{ كمية}) (٣٦ + ٤١ \text{ كمية}) (٤١ - ٤١ \text{ كمية})$$

$$= (٤١ \text{ كمية}) (٢٥ \text{ كمية}) (٧٧ \text{ كمية}) (٠ \text{ كمية})$$

فيصبح توزيع الكميات في الجدول على النحو التالي:

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤ ٥٦	٨ ٠	٨ ٠	٥٦
ينبع	١٦ ١٦	٢٤ ٢٥	١٦ ٤١	٨٢
جدة	٨ ٠	١٦ ٧٧	٢٤ ٠	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ ٢١٥

ثم نقوم بحساب التكاليف، فتكون:

التكاليف: $(٤ \times ٥٦) + (١٦ \times ١٦) + (٢٤ \times ٢٥) + (١٦ \times ٤١) + (٨ \times ٧٧) = ٢,٩٦٨$ ريال.

نقوم الآن... بحساب مؤشرات الخلايا الصفيرية لمعرفة ما إذا لا يزال لدينا مؤشرات سالبة من عدمه بعد تحديد مسارات التحسين، ويوضح الجدول المسارات الجديدة.

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤ ٥٦	٨ ٠	٨ ٠	٥٦
ينبع	١٦ ١٦	٢٤ ٢٥	١٦ ٤١	٨٢
جدة	٨ ٠	١٦ ٧٧	٢٤ ٠	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ ٢١٥

بعد تحديد مسار كل خلية صفيرية، يتم توزيع الإشارات (+) ثم (-) بالتتالي ابتداءً بالخلية الصفيرية (خانة البداية) وإنهاءً بآخر خلية في المسار للوصول إلى مؤشرات الخلايا الصفيرية (الشاغرة).

خانة غير مستخدمة	التكاليف	المؤشر
(٢/١) الدمام/دبي	$٨ - ٤ + ١٦ - ٢٤$	(٤-)
(٣/١) الدمام/صنعاء	$٨ - ٤ + ١٦ - ١٦$	(٤+)
(١/٣) جدة/دمشق	$٨ - ١٦ + ٢٤ - ١٦$	(٠)
(٣/٣) جدة/صنعاء	$٢٤ - ١٦ + ٢٤ - ١٦$	(١٦+)

ومادام أننا قد حصلنا على مؤشر سالب فهذا يعني أنه لابد من إجراء تحسين جديد للوصول إلى نتائج موجبة أو صفر. وستكون الخلية الأفضل للتحسين هي الخلية التي أعطت أكبر قيمة سالبة وهي الخلية (٢/١) الدمام/دبي لأنها الوحيدة السالبة في المؤشرات.

ولتحسين الحل الآن، نقوم بالبحث عن أقل قيمة في الخلايا السالبة المجاورة للخلية الصفرية (خلية التحسين) ونقوم بعمل ما يلي:

١. طرح الكمية من الكميات المسجلة في الخلايا السالبة.

٢. إضافة الكمية إلى الكميات المسجلة في الخلايا الموجبة.

وبالتالي فإن كميات الخلايا السالبة المجاورة لخلية التحسين (٢/١) هما (٥٦) و (٢٥) وبالتالي فإن الكمية (٢٥) أقل كمية سالبة، فنقوم بتمريرها على الخلايا الواقعة في مسار التحسين كما سبق شرحه.

إذا... مسار التحسين هو (٠ + كمية) (٥٦ - كمية) (١٦ + كمية) (٢٥ - كمية). وتصبح بعد التحسين:

(٢٥ + ٠ كمية) (٢٥ - ٦٦ كمية) (٢٥ + ٣٦ كمية) (٢٥ - ٤١ كمية)

= (٢٥ كمية) (٣١ كمية) (٤١ كمية) (٠ كمية)

فيصبح توزيع الكميات في الجدول على النحو التالي:

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٣١	٢٥	٠	٥٦
ينبع	٤١	٠	٤١	٨٢
جدة	٠	٧٧	٠	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥

ثم نقوم بحساب التكاليف، فتكون:

التكاليف: $(٨ \times ٢٥) + (٤ \times ٣١) + (١٦ \times ٤١) + (١٦ \times ٧٧) = ٢,٨٦٨$ ريال.

نقوم الآن... بحساب مؤشرات الخلايا الصفيرية لمعرفة ما إذا لا يزال لدينا مؤشرات سالبة من عدمه بعد تحديد مسارات التحسين، ويوضح الجدول المسارات الجديدة.

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤	٨	٨	٥٦
ينبع	١٦	٢٤	١٦	٨٢
جدة	٨	١٦	٢٤	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥

بعد تحديد مسار كل خلية صفيرية، يتم توزيع الإشارات (موجبة +) ثم (سالبة -) بالتتالي ابتداءً بالخلية الصفيرية (خانة البداية) وإنهاءً بآخر خلية في المسار للوصول إلى مؤشرات الخلايا الصفيرية (الشاغرة).

خانة غير مستخدمة	التكاليف	المؤشر
(٣/١) الدمام/ صنعاء	$٨ - ٤ + ١٦ - ١٦$	$(٤+)$
(٢/٢) ينبع/دبي	$٨ - ٢٤ + ١٦ - ٤$	$(٤+)$
(١/٣) جدة/دمشق	$٨ - ٨ + ١٦ - ٨$	$(٤-)$
(٣/٣) جدة/صنعاء	$١٦ - ٢٤ + ١٦ - ٨ + ٤ - ١٦$	$(١٢+)$

ومادام أننا قد حصلنا على مؤشر سالب فهذا يعني أنه لابد من إجراء تحسين جديد للوصول إلى نتائج موجبة أو صفر. وستكون الخلية الأفضل للتحسين هي الخلية التي أعطت أكبر قيمة سالبة وهي الخلية (١/٣) جدة/دمشق لأنها الوحيدة السالبة في المؤشرات.

ولتحسين الحل الآن، نقوم بالبحث عن أقل قيمة في الخلايا السالبة المجاورة للخلية الصفيرية (خلية التحسين) ونقوم بعمل ما يلي:

١. طرح الكمية من الكميات المسجلة في الخلايا السالبة.

٢. إضافة الكمية إلى الكميات المسجلة في الخلايا الموجبة.

وبالتالي فإن كميات الخلايا السالبة المجاورة لخلية التحسين (١/٣) هما (٣١) و (٧٧) وبالتالي فإن الكمية (٣١) أقل كمية سالبة، فنقوم بتمريرها على الخلايا الواقعة في مسار التحسين كما سبق شرحه.

إذًا... مسار التحسين هو $(٠ + \text{كمية})$ (٥٦ - كمية) $(١٦ + \text{كمية})$ (٢٥ - كمية). وتصبح بعد التحسين:

$(٢٥ + ٠ \text{ كمية})$ $(٢٥ - ٦٦ \text{ كمية})$ $(٢٥ + ٣٦ \text{ كمية})$ $(٢٥ - ٤١ \text{ كمية})$

$= (٢٥ \text{ كمية})$ (٣١ كمية) (٤١ كمية) (٠ كمية)

فيصبح توزيع الكميات في الجدول على النحو التالي:

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤ ٠	٨ ٥٦	٨ ٠	٥٦
ينبع	١٦ ٤١	٢٤ ٠	١٦ ٤١	٨٢
جدة	٨ ٣١	١٦ ٤٦	٢٤ ٠	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ ٢١٥

ثم نقوم بحساب التكاليف، فتكون:

التكاليف: $(٨ \times ٥٦) + (١٦ \times ٤١) + (١٦ \times ٣١) + (٨ \times ٤٦) + (١٦ \times ٤١) = ٢,٧٤٤$ ريال.

نقوم الآن... بحساب مؤشرات الخلايا الصفرية لمعرفة ما إذا لا يزال لدينا مؤشرات سالبة من عدمه بعد تحديد مسارات التحسين، ويوضح الجدول المسارات الجديدة.

من إلى	دمشق	دبي	صنعاء	العرض
الدمام	٤ ٠	٨ ٥٦	٨ ٠	٥٦
ينبع	١٦ ٤١	٢٤ ٠	١٦ ٤١	٨٢
جدة	٨ ٣١	١٦ ٤٦	٢٤ ٠	٧٧
الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥ ٢١٥

بعد تحديد مسار كل خلية صفرية، يتم توزيع الإشارات (+) ثم (-) بالتتالي ابتداءً بالخلية الصفرية (خانة البداية) وإنهاءً بآخر خلية في المسار للوصول إلى مؤشرات الخلايا الصفرية (الشاغرة).

المؤشر	التكاليف	خانة غير مستخدمة
(٠)	$١٦ - ٨ + ١٦ - ٢٤ +$	(٢/٢) ينبع/دبي
(٤+)	$٨ - ١٦ + ٨ - ٤ +$	(١/١) الدمام/دمشق
(٨+)	$٨ - ١٦ + ٨ - ١٦ + ١٦ - ٨ +$	(٣/١) الدمام/صنعاء
(١٦+)	$٨ - ١٦ + ١٦ - ٢٤ +$	(٣/٣) جدة/صنعاء

وهنا نكون قد وصلنا إلى نتائج إيجابية أو صفر. وبها تكون المسألة قد إنتهت، وأن أفضل تكاليف نقل هي كما سبق ذكره:

التكاليف: $(٨ \times ٥٦) + (١٦ \times ٤١) + (١٦ \times ٤١) + (١٦ \times ٤٦) = ٢,٧٤٤$ ريال.

(٤) الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل مع حساب تكلفة النقل الكلي.

نقوم أولاً بتحديد معامل كل صف ومعامل كل عمود وينتج عن ذلك الجدول التالي:

لا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل إلا إذا أوجدنا أولاً الحل المبدئي بإحدى طريقتيه.

معامل الصف	العرض	معامل العمود			من إلى
		صنعاء = ٣٤	دبي = ٢٤	دمشق = ١٤	
ص ١ =	٥٦	٨	٨	٤	الدمام
ص ٢ =	٨٢	١٦	٢٤	١٦	ينبع
ص ٣ =	٧٧	٢٤	١٦	٨	جدة
	٢١٥	٤١	١٠٢	٧٢	الطلب

قاعدة: تكلفة الخلية المشغولة (ك.م.ل) = (ص.م) في أي صف هي + (ع.م) في أي عمود هي. أي.. (ك.م.ل) = (ص.م) + (ع.م).

موقع الخانة المشغولة (المتلئة).

$١٤ + ١ ص = ٤$	\leq	(١/١) الدمام/دمشق
$٢٤ + ٢ ص = ٢٤$	\leq	(٢/٢) ينبع/دبي
$٣٤ + ٢ ص = ١٦$	\leq	(٣/٢) ينبع/صنعاء
$١٤ + ٣ ص = ٨$	\leq	(١/٣) جدة/دمشق
$٢٤ + ٣ ص = ١٦$	\leq	(٢/٣) جدة/دبي

الآن... نقوم بالتعويض عن (ص ١) بـ (٠) وذلك لحساب قيمة المجاهيل، بحيث كلما تم الحصول على قيمة مجهول نقوم بالاستفادة منه في حساب المجاهيل الأخرى.

إذا... ص ١ = ٠

$$\begin{aligned} ٤ &= ١ع + ١ص = ٤ &<=& ٤ = ٠ + ١ع = ٤ &<=& ٤ = ١ع \\ ٢٤ &= ٢ع + ٢ص = ٢٤ &<=& ٢٤ = ٠ + ٢ع = ٢٤ &<=& ٢٤ = ٢ع \\ ١٦ &= ٣ع + ٢ص = ١٦ &<=& ١٦ = ٠ + ٣ع = ١٦ &<=& ١٦ = ٣ع \\ ٨ &= ١ع + ٣ص = ٨ &<=& ٨ = ٤ + ٣ص = ٨ &<=& ٨ = ٣ص \\ ١٦ &= ٢ع + ٣ص = ١٦ &<=& ١٦ = ٢ع + ٤ = ١٦ &<=& ١٦ = ٢ع \end{aligned}$$

نعود الآن إلى:

$$\begin{aligned} ٢٤ &= ٢ع + ٢ص = ٢٤ &<=& ٢٤ = ١٢ + ٢ص = ١٢ &<=& ١٢ = ٢ص \\ ١٦ &= ٣ع + ٢ص = ١٦ &<=& ١٦ = ٣ع + ١٢ = ١٦ &<=& ١٦ = ٣ع \end{aligned}$$

قاعدة: يجب ألا نفرض أكثر من مجهول واحد بالصفر، ومنه يتسلسل الوصول إلى قيمة المجاهيل.

معامل الصف	العرض	صنعاء	دبي	دمشق	معامل العمود من إلى
ص ١ = ٠	٥٦	٨	٨	٤	الدمام
ص ٢ = ١٢	٨٢	١٦	٢٤	١٦	ينبع
ص ٣ = ٤	٧٧	٢٤	١٦	٨	جدة
	٢١٥	٤١	١٠٢	٧٢	الطلب

الآن يجب تحديد موقع الخانة الشاغرة (الصفرية) للوصول إلى مؤشراتنا.

قاعدة: تكلفة الخلية الشاغرة (ش.م.ل) = (ك.م.ل) التكلفة - (ص.م) في أي صف هي - (ع.م) في أي عمود هي.
أي.. (ش.م.ل) = (ك.م.ل) - (ص.م) - (ع.م).

$$\begin{aligned} (٢/١) \text{ الدمام/دبي} &<=& ٢ع - ١ص - ٨ &=& ٤ - ٠ - ٨ \\ (٣/١) \text{ الدمام/صنعاء} &<=& ٣ع - ١ص - ٨ &=& ٤ - ٠ - ٨ \\ (١/٢) \text{ ينبع/دمشق} &<=& ١ع - ٢ص - ١٦ &=& ٠ - ٤ - ١٦ \\ (٣/٣) \text{ جدة/صنعاء} &<=& ٣ع - ٣ص - ٢٤ &=& ١٦ - ٤ - ٢٤ \end{aligned}$$

نجد أن... جميع القيم موجبة وصفر باستثناء الخلية (٢/١) فإنها سالبة، وهو يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، حيث التكاليف الحالية هي الموضحة أدناه، ويجب إكمال الحل مع تحسين الخلية إلى حين الوصول إلى أن تكون جميع القيم موجبة.

التكاليف: $(٤ \times ٥٦) + (٢٤ \times ٤١) + (١٦ \times ٤٦) + (٨ \times ١٠٢) + (١٦ \times ٤١) = ٢,٩٦٨$ ريال.

واختصاراً للوقت، فإننا ومن خلال العمليات التي قمنا بها في عند حل السؤال بطريقة مسارات التحسين، فسيتكرر لدينا العمل السابق أربع مرات، وسيترك ذلك للقارئ والقارئة للوصول له، وسننتقل إلى الجدول الأخير الذي سبق الوصول له، وسنقوم بتحديد قيمه وتكاليفه ومن ثم تحديد معاملاته.

معامل الصف	من	معامل العمود			
		دمشق	دبي	صنعاء	العرض
ص١ =	الدمام	٤	٨	٨	٥٦
ص٢ =	ينبع	١٦	٢٤	٤١	٨٢
ص٣ =	جدة	٨	١٦	٢٤	٧٧
	الطلب	٧٢	١٠٢	٤١	٢١٥

قاعدة: تكلفة الخلية المشغولة (ك.م.ل) = (ص.م) في أي صف هي + (ع.م) في أي عمود هي. أي.. (ك.م.ل) = (ص.م) + (ع.م).

موقع الخانة المشغولة (الممتلئة).

٢/١	الدمام/دبي	\leq	$٨ = ٢٤ + ١ ص$
١/٢	ينبع/دمشق	\leq	$١٦ = ١٦ + ٢ ص$
٣/٢	ينبع/صنعاء	\leq	$١٦ = ٢٤ + ٢ ص$
١/٣	جدة/دمشق	\leq	$٨ = ١٦ + ٣ ص$
٢/٣	جدة/دبي	\leq	$١٦ = ٢٤ + ٣ ص$

الآن... نقوم بالتعويض عن (ص١) بـ (٠) وذلك لحساب قيمة المجاهيل، بحيث كلما تم الحصول على قيمة مجهول نقوم بالاستفادة منه في حساب المجاهيل الأخرى.

إذاً... ص ١ = ٠

$$\begin{aligned}
 ٨ &= ١ \text{ ص} + ٢ \text{ ع} <= ٢ \text{ ع} + ٠ = ٨ <= ٨ = ٢ \text{ ع} \\
 ١٦ &= ٢ \text{ ص} + ١ \text{ ع} <= ١ \text{ ع} + ٢ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٢ \text{ ص} \\
 ١٦ &= ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ ع} <= ٣ \text{ ع} + ٢ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٢ \text{ ص} \\
 ٨ &= ٣ \text{ ص} + ١ \text{ ع} <= ١ \text{ ع} + ٣ \text{ ص} = ٨ <= ٨ = ٣ \text{ ص} \\
 ١٦ &= ٣ \text{ ص} + ٢ \text{ ع} <= ٢ \text{ ع} + ٣ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٣ \text{ ص}
 \end{aligned}$$

نعود الآن إلى:

$$\begin{aligned}
 ١٦ &= ٢ \text{ ص} + ١ \text{ ع} <= ١ \text{ ع} + ٢ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٢ \text{ ص} \\
 ١٦ &= ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ ع} <= ٣ \text{ ع} + ٢ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٢ \text{ ص} \\
 ٨ &= ٣ \text{ ص} + ١ \text{ ع} <= ١ \text{ ع} + ٣ \text{ ص} = ٨ <= ٨ = ٣ \text{ ص}
 \end{aligned}$$

نعود الآن إلى:

$$\begin{aligned}
 ١٦ &= ٢ \text{ ص} + ١ \text{ ع} <= ١ \text{ ع} + ٢ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٢ \text{ ص} \\
 ١٦ &= ٢ \text{ ص} + ٣ \text{ ع} <= ٣ \text{ ع} + ٢ \text{ ص} = ١٦ <= ١٦ = ٢ \text{ ص}
 \end{aligned}$$

قاعدة: يجب ألا نفرض أكثر من مجهول واحد بالصفر، ومنه يتسلسل الوصول إلى قيمة المجاهيل.

معامل الصف	العرض	صنعاء	دبي	دمشق	معامل العمود
٠ = ١ ص	٥٦	٨	٨	٤	الدمام
١٦ = ٢ ص	٨٢	١٦	٢٤	١٦	ينبع
٨ = ٣ ص	٧٧	٢٤	١٦	٨	جدة
	٢١٥	٤١	١٠٢	٧٢	الطلب

الآن يجب تحديد موقع الخانة الشاغرة (الصفيرية) للوصول إلى مؤشراتنا.

قاعدة: تكلفة الخلية الشاغرة (ش.م.ل) = (ك.م.ل) التكلفة - (ص.م) في أي صف هي - (ع.م) في أي عمود هي.
أي.. (ش.م.ل) = (ك.م.ل) - (ص.م) - (ع.م).

$$\begin{aligned}
 ٤ + ٠ - ٠ - ٤ &= ٠ <= ١ \text{ ع} - ١ \text{ ص} - ٤ = ٠ <= (١/١) \text{ الدمام/دمشق} \\
 ٨ + ٠ - ٠ - ٨ &= ٠ <= ٣ \text{ ع} - ١ \text{ ص} - ٨ = ٠ <= (٣/١) \text{ الدمام/صنعاء} \\
 ٠ = ٨ - ١٦ - ٢٤ &= ٠ <= ٢ \text{ ع} - ٢ \text{ ص} - ٢٤ = ٠ <= (٢/٢) \text{ ينبع/دبي} \\
 ١٦ + ٠ - ٨ - ٢٤ &= ٠ <= ٣ \text{ ع} - ٣ \text{ ص} - ٢٤ = ٠ <= (٣/٣) \text{ جدة/صنعاء}
 \end{aligned}$$

نجد أن... جميع القيم موجبة وهو يعني أنه الحل الأمثل، وتكون تكلفة النقل:
نقوم بحساب التكاليف، فتكون:

التكاليف الكلية للنقل: هي مجموع تكاليف النقل لجميع النقاط، أي: $(\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + (\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + (\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + \dots$

التكاليف: $(٨ \times ٥٦) + (١٦ \times ٤١) + (١٦ \times ٤١) + (٨ \times ٣١) + (١٦ \times ٤٦) = ٢,٧٤٤$ ريال.
وهي أقل من التكاليف السابقة التي ظهرت لنا بقيمة (٢,٩٦٨) ريال.

◀◀◀◀◀◀ ▶▶▶▶▶▶▶

مثال (٢): ترغب إحدى الشركات الصناعية الكبرى بنقل ما لديها من مواد من ثلاثة مراكز إنتاجية تابعة لها (مكة المكرمة، جدة، الطائف) تلبية لإحتياجات ثلاثة من الأسواق التجارية (سوق الصفوة، سوق الهرم، السوق المركزي) علماً بأن الكميات المتوفرة في مراكز الإنتاج هي (مكة المكرمة ١١٠) (جدة ٢١٠) (الطائف ٣١٠) والكميات المطلوبة للأسواق المستهدفة هي (سوق الصفوة ١٢٠)، (سوق الهرم ٢٣٠)، (السوق المركزي ٢٨٠). هذا مع العلم بأن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مكة إلى (الصفوة = ١، الهرم = ٥، المركزي = ٣) ومن جدة إلى (الصفوة = ٢، الهرم = ٥، المركزي = ٤)، ومن الطائف إلى (الصفوة = ٦، الهرم = ١، المركزي = ٤).

المطلوب: الحل باستخدام جميع طرق الحل المبدئي والأمثل مع حساب تكلفة النقل الكلي.

دائماً وأبداً يجب قبل إجراء أي حل أن يتوفر لدينا جدول تكلفة النقل وهو إما أن يعطى في السؤال أو يتم تصميمه وفقاً لمعلومات السؤال.

الحل:

نقوم أولاً بعمل جدول التكاليف والذي سيشمل كافة هذه معلومات المعطاة في السؤال.

من إلى	الصفوة	الهرم	المركزي	العرض
مكة	٤	٥	٣	١١٠
جدة	٢	٥	٢	٢١٠
الطائف	٦	١	٤	٣١٠
الطلب	١٢٠	٢٣٠	٢٨٠	٦٣٠ / ٦٣٠

من إلى	الصفوة	الهرم	المركزي	العرض
مكة	٤	٥	٣ ١١٠	١١٠
جدة	٢	٥	٢ ٩٠	٢١٠
الطائف	٦	١	٤ ٨٠	٣١٠
الطلب	١٢٠	٢٣٠	٢٨٠	٦٣٠ ٦٣٠

نقوم بتحديد مسارات التحسين على الجدول الموضح وذلك لعموم الخلايا الصفرية، فينتج لنا:

من إلى	الصفوة	الهرم	المركزي	العرض
مكة	٤	٥	٣ ١١٠	١١٠
جدة	٢	٥	٢ ٩٠	٢١٠
الطائف	٦	١	٤ ٨٠	٣١٠
الطلب	١٢٠	٢٣٠	٢٨٠	٦٣٠ ٦٣٠

يتضح لنا من الجدول أن تكاليف مسارات التحسين هي على النحو التالي:

المؤشر	التكاليف	خانة غير مستخدمة
(١+)	٣ - ٢ + ٢ - ٤ +	مكة/الصفوة (١/١)
(٥+)	٣ - ٤ + ١ - ٥ +	مكة/الهرم (٢/١)
(٦+)	٢ - ٤ + ١ - ٥ +	جدة/الهرم (٢/٢)
(٢+)	٢ - ٢ + ٤ - ٦ +	الطائف/الصفوة (١/٣)

وحيث أن كافة النتائج كانت موجبة، فهذا هو الحل الأمثل.

نقوم بحساب التكاليف، فتكون:

التكاليف الكلية للنقل: هي مجموع تكاليف النقل لجميع النقاط، أي: $(\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + (\text{الكمية} \times \text{التكلفة}) + \dots$

التكاليف: $(1 \times 230) + (2 \times 120) + (2 \times 90) + (3 \times 110) + (4 \times 80) = 1,300$ ريال.

(٤) الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل مع حساب تكلفة النقل الكلي.

نقوم أولاً بتحديد معامل كل صف ومعامل كل عمود وينتج عن ذلك الجدول التالي:

لا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل إلا إذا أوجدنا أولاً الحل المبدئي بإحدى طريقتيه.

معامل العمود	من	معامل الصف			
		العرض	المركزي	الهزم	الصفوة
١٤ =	٤	١١٠	١١٠	٠	٠
٢٤ =	٥	٢١٠	٩٠	٠	١٢٠
٣٤ =	٦	٣١٠	٨٠	٢٣٠	٠
٦٣٠	٦٣٠	٢٨٠	٢٣٠	١٢٠	الطلب

قاعدة: تكلفة الخلية المشغولة (ك.م.ل) = (ص.م) في أي صف هي + (ع.م) في أي عمود هي. أي.. (ك.م.ل) = (ص.م) + (ع.م).

موقع الخانة المشغولة (الممتلئة).

٣/١	مكة/المركزي	٣	=	٣	ص ١ + ع ٣
١/٢	جدة/الصفوة	٢	=	٢	ص ٢ + ع ١
٣/٢	جدة/المركزي	٢	=	٢	ص ٢ + ع ٣
٢/٣	الطائف/الهزم	١	=	١	ص ٣ + ع ٢
٣/٣	الطائف/المركزي	٤	=	٤	ص ٣ + ع ٣

الآن... نقوم بالتعويض عن (ص ١) بـ (٠) وذلك لحساب قيمة المجاهيل، بحيث كلما تم الحصول على قيمة مجهول نقوم بالاستفادة منه في حساب المجاهيل الأخرى.

إذا... ص ١ = ٠

٣	=	٣	ص ١ + ع ٣	=	٣	ص ١ + ع ٣
٢	=	٢	ص ٢ + ع ١	=	٢	ص ٢ + ع ١

ستؤجل حيث أن كافة ما بها مجاهيل يصعب حلها.

$$\begin{aligned}
 2 &= 2ع + 3ص & \leq & 2ص + 3 = 2 & \leq & 2ص = 1 - 2ع \\
 1 &= 2ع + 3ص & \leq & 4ص = 3 + 3 & \leq & 3ص = 1 \\
 4 &= 2ع + 3ص & \leq & 3ص = 3 + 3 & \leq & 3ص = 1
 \end{aligned}$$

نعود الآن إلى:

$$\begin{aligned}
 2 &= 2ص + 1ع & \leq & 2 = 1ع + 1 & \leq & 1ع = 3 \\
 1 &= 2ع + 3ص & \leq & 1 = 1ع + 2 & \leq & 2ع = 0
 \end{aligned}$$

قاعدة: يجب ألا نفرض أكثر من مجهول واحد بالصفر، ومنه يتسلسل الوصول إلى قيمة المجهول.

معامل العرض	المركزي	الهرم	الصفوة	معامل العمود	من إلى
١١٠	٣	٥	٤	٣ = ١ع	مكة
٢١٠	٢	٥	٢	٠ = ٢ع	جدة
٣١٠	٤	١	٦	٣ = ١ع	الطائف
٦٣٠	٢٨٠	٢٣٠	١٢٠	٠ = ٢ع	الطلب

الآن يجب تحديد موقع الخانة الشاغرة (الصفوية) للوصول إلى مؤشراتنا.

قاعدة: تكلفة الخلية الشاغرة (ش.م.ل) = (ك.م.ل) التكلفة - (ص.م) في أي صف هي - (ع.م) في أي عمود هي.
أي.. (ش.م.ل) = (ك.م.ل) - (ص.م) - (ع.م).

$$\begin{aligned}
 (1/1) \text{ مكة/الصفوة} & \leq 1ع - 1ص - 4 = 1 + 3 - 0 - 4 \\
 (2/1) \text{ مكة/الهرم} & \leq 2ع - 1ص - 5 = 0 + 0 - 0 - 5 \\
 (2/2) \text{ جدة/الهرم} & \leq 2ع - 2ص - 5 = 6 + 0 - (1 -) - 5 \\
 (1/3) \text{ الطائف/الصفوة} & \leq 1ع - 3ص - 6 = 2 + 3 - 1 - 6
 \end{aligned}$$

نجد أن... جميع القيم موجبة وهو يعني أنه الحل الأمثل، وتكون تكلفة النقل:

نقوم بحساب التكاليف، فتكون:

التكاليف الكلية للنقل: هي مجموع تكاليف النقل لجميع النقاط، أي: (الكمية × التكلفة) + (الكمية × التكلفة) + (الكمية × التكلفة) + ... الخ.

$$\text{التكاليف: } (1 \times 230) + (2 \times 120) + (2 \times 90) + (3 \times 110) + (4 \times 80) = 1,300 \text{ ريال.}$$

ثانياً: التخصيص.**استخدامها.**

وهي تستخدم في حالة ما إذا كان لدينا أعمال وأشخاص والمطلوب منا توزيع تلك الأعمال على هؤلاء الأشخاص بشكل يعطي هؤلاء الأشخاص أفضل عمل مناسب لهم.

والتخصيص هي طريقة واحدة تتساوى فيها الأعمدة مع الصفوف، أي أنه من الخطأ أن نقول أن لدينا ثلاثة أعمال نريد توزيعها على أربعة أشخاص، فالصواب أن يكون لدينا ثلاثة أعمال وثلاثة أشخاص. الآن، ولمتابعة الحل... يجب أن نضع المعادلات اللازمة للخانات **الشاغرة** وفق القاعدة التالية:

قاعدة: في جداول التخصيص يجب أن يكون عدد الأعمدة متساوي مع عدد الصفوف وإلا فالمسألة غير صحيحة. ولا بد من إجراء عمليات إصلاح للجدول ليتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، وذلك بإضافة صف وهمي إذا كانت عدد الأعمدة أكبر من عدد الصفوف، أو عمود وهمي إذا كانت عدد الصفوف أكبر من عدد الأعمدة، وتكون جميع قيم ذلك العمود أو الصف أصفار.

قاعدة الحل.

١. في الجدول الرئيسي. نأخذ أقل قيمة موجودة في **الصف**، ونطرحها من جميع عناصر الصف نفسه ونكرر ذلك على بقية الصفوف. ونضع النتائج في جدول جديد (سنطلق عليه إفتراضاً، الجدول الفرعي (١)).
٢. في الجدول الفرعي (١). نشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر، ونبدأ بالصفوف. مع مراعاة أنه يجب أن نشطب أكبر عدد من الأصفار الموجودة في الجدول بأقل عدد من خطوط الشطب.
٣. في الجدول الفرعي (١). نأخذ أقل قيمة موجودة في **العمود**، ونطرحها من جميع عناصر العمود نفسه ونكرر ذلك على بقية الأعمدة. ونضع النتائج في جدول فرعي آخر (سنطلق عليه إفتراضاً، الجدول الفرعي (٢)). مع الأخذ في الاعتبار أن يؤخذ بالـ (٠) كأقل قيمة في العمود إذا كان العمود يحتوي على (٠)، وكذلك فإنه العمود المشطوب كلياً ستكون قيمه كما هي دون تغيير، أي أن العملية ستكون على الأعمدة غير المشطوبة فقط.
٤. في الجدول الفرعي (٢). نشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر، ونبدأ بالصفوف. مع مراعاة أنه يجب أن نشطب أكبر عدد من الأصفار الموجودة في الجدول بأقل عدد من خطوط الشطب.
٥. إذا تساوى عدد خطوط الشطب مع عدد الأعمدة (وهي التي يجب أن تكون متساوية مع عدد الصفوف بالأصل) فإن ذلك يعني أننا قد وصلنا إلى الحل الأمثل. وإلا فننتقل إلى الخطوة التالية.
٦. في الجدول الفرعي (٢). نأخذ أقل قيمة موجودة في الجدول، ونقوم بعمل الآتي:
 - نقوم بإنزال كافة القيم المشطوبة كما هي باستثناء القيم الواقعة في نقاط تقاطع خطوط الشطب فنقوم بإضافة ذلك الرقم (أقل قيمة موجودة في الجدول) إلى تلك القيمة.
 - نقوم بطرح ذلك الرقم (أقل قيمة موجودة في الجدول) من جميع بقية القيم الأخرى (غير المشطوبة) في جميع الخلايا، وننقل ذلك كله إلى جدول فرعي جديد (سنطلق عليه إفتراضاً، الجدول الفرعي (٣)).

٧. في الجدول الفرعي (٣). نشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر، ونبدأ بالصفوف. مع مراعاة أنه يجب أن نشطب أكبر عدد من الأصفار الموجودة في الجدول بأقل عدد من خطوط الشطب.
٨. إذا تساوى عدد خطوط الشطب مع عدد الأعمدة (وهي التي يجب أن تكون متساوية مع عدد الصفوف بالأصل) فإن ذلك يعني أننا قد وصلنا إلى الحل الأمثل. وإلا فنكرر العملية (٦) و(٧).
٩. بعد الوصول إلى تساوي عدد خطوط الشطب مع عدد الأعمدة والصفوف، وللوصول إلى قيم الحل الأمثل:
- ننقل قيم الجدول الأخير (فرعي ٣) إلى جدول آخر (هذه العملية ليست ضرورية ولكننا نقوم بها تجنباً للوقوع في خطأ الشطب الجديد).
 - نبدأ بالصفوف ونقوم بالبحث عن الصف الذي يحتوي على صفر واحد فقط، ونقوم بشطبه تماماً مع العمود الذي تقاطع معه عند نقطة الصفر. ونقوم بتسجيل إحداثيات تلك النقطة، أي التخصيص بينهما.
 - نبحث عن الصف الآخر الذي يحتوي على صفر واحد فقط (دون النظر إلى الأعمدة والصفوف التي تم شطبها نهائياً من الجدول)، ونقوم بشطبه تماماً مع العمود الذي تقاطع معه عند نقطة الصفر. ونقوم بتسجيل إحداثيات تلك النقطة، أي التخصيص بينهما.
 - عند الإنتهاء من الصفوف ننتقل بالعمل إلى الأعمدة ونقوم بالبحث عن العمود الذي يحتوي على صفر واحد فقط (دون النظر إلى الأعمدة والصفوف التي تم شطبها نهائياً من الجدول)، ونقوم بشطبه تماماً مع الصف الذي تقاطع معه عند نقطة الصفر. ونقوم بتسجيل إحداثيات تلك النقطة، أي التخصيص بينهما.
 - نبحث عن العمود الآخر الذي يحتوي على صفر واحد فقط (دون النظر إلى الأعمدة والصفوف التي تم شطبها نهائياً من الجدول)، ونقوم بشطبه تماماً مع العمود الذي تقاطع معه عند نقطة الصفر. ونقوم بتسجيل إحداثيات تلك النقطة، أي التخصيص بينهما.
 - نكرر العملية إلى أن يتم شطب الجدول كلياً.
١٠. نعود للجدول الرئيسي المعطى في السؤال ونحدد قيمة تلك النقاط التي قمنا بتحديد إحداثياتها، وبذلك يكون قد تم التخصيص لكامل السؤال.
١١. جميع هذه الخطوات المذكورة هي لمسائل التكاليف، وفي حالة ما إذا كان السؤال للـ(أرباح)، فإننا وقبل العمل في هذه الخطوات نقوم بالبحث عن أكبر قيمة في الجدول ونقوم بطرح جميع قيم الجدول منها وننقلها إلى جدول جديد، ثم نطبق الخطوات المذكورة آنفاً كما هي. مع الإحاطة بأن الجدول المذكور في (١٠) سيكون آنذاك الجدول الرئيسي وليس الجدول الذي أحدثناه في البداية.
- وستوضح الأمثلة التالية طرق حل مسائل التخصيص.**

مثال (١): شركة لديها ثلاثة أنواع من الكراسي (ك١، ك٢، ك٣) ولديها ثلاثة عمال (م١، م٢، م٣) والجدول التالي يوضح الوقت الذي يستغرقه كل عامل من العمال في صنع كل كرسي من الكراسي:

٣م	٢م	١م	
١٠	٦	٥	١ك
٦	٨	٧	٢ك
٤	٥	٩	٣ك

المطلوب: إعطاء العامل المناسب، العمل المناسب له.

الحل:

سنبدأ بالصفوف أولاً. وعليه ننظر إلى الصف الأول فنجد أن (٥) هو أقل رقم في الصف، فنقوم بطرح كامل قيم ذلك الصف من (٥) ونضع النتائج في جدول جديد، فينتج لدينا:

٣م	٢م	١م	
٥	١	٠	١ك
٠	٢	١	٢ك
٠	١	٥	٣ك

ملاحظة: يقوم الدكتور محمد الإدريسي عادة بوضع مربعات صغيرة أعلى يسار كل خلية ويضع بها نتيجة طرح قيم الخلايا من أقل قيمة في كل صف، كما يظهر أدناه، ثم يقوم بنقل تلك القيم (نتائج الطرح) للجدول التالي، وهذه الطريقة يتم تطبيقها على جميع الجداول المتتالية للحل، ولكننا اختصرنا ذلك بوضع تلك النتائج مباشرة في الجدول السابق توضيحه.

٣م	٢م	١م	
٥	١	٠	١ك
٠	٢	١	٢ك
٠	١	٥	٣ك

القيم أعلاه هي ناتج طرح أقل قيمة في كل صف من بقية قيم الصف وهي التي تنتقل للجدول التالي

في الجدول الجديد، نقوم الآن بشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر (نبدأ بالصفوف)، على أساس أن نشطب أكبر عدد من الأصفار الموجودة في الجدول بأقل عدد من خطوط الشطب، وصولاً إلى شطب كافة الأصفار.

٣م	٢م	١م	
٥	١	٠	١ك
٠	٢	١	٢ك
٠	١	٥	٣ك

الآن... نجري العملية على الأعمدة. ويجب ملاحظة أن هذه العملية ستتم على الجدول الجديد وليس على الجدول السابق الذي أعطي في السؤال، أي أنها العملية الثانية على الجدول. وعليه ننظر إلى الأعمدة التي لم تشطب ونأخذ أقل قيمة فيها ونطرح جميع قيم ذلك العمود من أقل قيمة به. ويتبين لنا أن العمود (٣م) قط شطب، وبالتالي سنجري هذه العملية على العمود (١م) حيث أقل قيمة فيه هي (٠) والعمود (٢م) وأقل قيمة فيه هي (١)، حيث سنقوم بطرح تلك القيم من جميع قيم عموده.

٣م	٢م	١م	
٥	٠	٠	١ك
٠	١	١	٢ك
٠	٠	٥	٣ك

نقوم الآن بشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر (نبدأ بالصفوف)، على أساس أن نشطب أكبر عدد من الأصفار الموجودة في الجدول بأقل عدد من خطوط الشطب، وصولاً إلى شطب كافة الأصفار.

٣م	٢م	١م	
٥	٠	٠	١ك
٠	١	١	٢ك
٠	٠	٥	٣ك

حيث بدأنا بشطب الصف الأول (الخط الأزرق) لإحتوائه على صفرين، ثم الصف الثالث (الخط الأخضر) لإحتوائه على صفرين. ثم شطبنا العمود (٣م) بالخط الأحمر لأنه يحتوي على صفرين. وسنلاحظ أن عدد خطوط الشطب قد تساوت مع عدد الأعمدة وتساوت مع عدد الصفوف، وبالتالي وصلنا إلى الحل الأمثل. ونقوم الآن باستخراج القيم المطلوبة.

لإستخراج القيم المطلوبة نأخذ الجدول الأخير ونبحث في الصف الذي يحتوي على صفر واحد، ونقوم بشطبه تماماً مع العمود الذي تقاطع معه عند الصفر، فينتج لدينا شطب (ك٢) مع (م٣). وبعد استخراج (شطب) ذلك الصف والعمود سيتضح أن الصف الذي سيحتوي على صفر واحد فقط هو صف (ك٣) وسيتم شطبه مع العمود الذي تقاطع معه عند الصفر، فينتج لدينا شطب (ك٣) مع (م٢). وبعد استخراج (شطب) ذلك الصف والعمود سيتضح أن الصف الأوحده الذي بقي لدينا قد أصبح صف (ك١) متقاطعاً مع عمود (م١).

٣م	٢م	١م	
١ك	١	١	١ك
٢ك	١	١	٢ك
٣ك	١	١	٣ك

إذا نقاط التخصيص هي النقاط التالية حسب ترتيب استخراجها من الجدول أعلاه:

(٢ك) مع (٣م) (و) (٣ك) مع (٢م) (و) (١ك) مع (١م)

وبالعودة إلى الجدول الرئيسي في السؤال سيتضح أن أفضل تخصيص هو أن:

١. يقوم العامل (١م) بصناعة الكرسي (١ك).
٢. يقوم العامل (٢م) بصناعة الكرسي (٣ك).
٣. يقوم العامل (٣م) بصناعة الكرسي (٢ك).

انتهت المسألة.

نفرض أن عدد المستقيمات (الأعمدة) لم يساوي عدد الصفوف ففي هذه الحالة ننظر إلى الخانات المكشوفة التي لم يمر عليها المستقيمات وننظر إلى أقل قيمة فيها فنأخذها ونطرحها من جميع القيم المكشوفة ثم نرسم الخط، ونضيفها للقيم الواقعة في نقاط تقاطع خطوط الشطب كما سبق شرحه.

<<<<<<< >>>>>>>

سنقوم الآن بالتعامل مع مثال في حالة الأرباح وليس التكاليف، لمعرفة كيف يمكن حلها.

مثال (٢): يحتوي الجدول التالي الكميات التي تحققها الشركة من جراء إنتاجها ثلاثة منتجات.

٣	٢	١	
٣٠	١٠	٢٠	أ
١٧	١٥	١٢	ب
٩	١٨	١١	ج

المطلوب: تحديد أفضل كميات يتم إنتاجها من المنتجات الثلاث لتحقيق أفضل أرباح.

الحل:

في هذه الحالة، نقوم بتحويل الجدول إلى جدول تكاليف وذلك بالنظر إلى أكبر رقم في الجدول، ثم طرح جميع القيم في الجدول من ذلك الرقم.

وعليه فإن أكبر رقم هو (٣٠) ولذا سنقوم بطرح كافة بقية القيم من الرقم (٣٠) ونقوم بتسجيل تلك القيم، وعليه يتم تحويل الجدول من جدول أرباح إلى جدول تكاليف. فينتج عن ذلك:

٣	٢	١	
٣٠-٣٠ ٠	١٠-٣٠ ٢٠	٢٠-٣٠ ١٠	أ
١٧-٣٠ ١٣	١٥-٣٠ ١٥	١٢-٣٠ ١٨	ب
٩-٣٠ ٢١	١٨-٣٠ ١٢	١١-٣٠ ١٩	ج

الآن نقوم بالحل كما سبق شرحه، ووفق طريقة المربعات أعلى يسار الخلية، وهي التي سيتم وضع النتائج بها. مع ملاحظة أننا لن نتعرض لمزيد من الشرح حيث يمكن العودة للمثال السابق لمعرفة كيف تم الوصول إلى تلك النتائج.

الجدول الجديد الذي تم الوصول له لقلب الجدول من أرباح إلى تكاليف.

٣	٢	١	
٠	٢٠	١٠	أ
١٣	١٥	١٨	ب
٢١	١٢	١٩	ج

الجدول بعد طرح قيم الصفوف من أقل قيمة فيها.

	٣	٢	١	
أ	٠	٢٠	١٠	١٠
ب	١٣	١٥	١٨	٥
ج	٢١	١٢	١٩	٧

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

	٣	٢	١	
أ	٠	٢٠	١٠	١٠
ب	١٣	١٥	١٨	٥
ج	٢١	١٢	١٩	٧

الجدول بعد طرح قيم الأعمدة من أقل قيمة فيها.

	٣	٢	١	
أ	٠	٢٠	٥	١٠
ب	٠	٢	٥	٠
ج	٩	٠	٧	٢

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

	٣	٢	١	
أ	٠	٢٠	٥	١٠
ب	٠	٢	٥	
ج	٩	٠	٢	٧

عدد خطوط الشطب متساوي مع عدد الأعمدة ومتساوي مع عدد الصفوف. ولذا فهو الحل الأمثل، ويمكن الآن استخراج التخصيص الأفضل، وينتج عنه.

	٣	٢	١	
أ	٠	٢٠	٥	١٠
ب	٠	٢	٥	
ج	٩	٠	٢	٧

إذاً نقاط التخصيص هي النقاط التالية حسب ترتيب استخراجها من الجدول أعلاه:

(أ) مع (٣) (و) (ب) مع (١) (و) (ج) مع (٢)

وبالعودة إلى الجدول الرئيسي في السؤال سيتضح أن أفضل تخصيص هو أن:

	٣	٢	١	
أ	٣٠	١٠	٢٠	
ب	١٧	١٥	١٢	
ج	٩	١٨	١١	

١. يتم إنتاج (٣٠) وحدة من المنتج (أ).
٢. يتم إنتاج (١٢) وحدة من المنتج (ب).
٣. يتم إنتاج (١٨) وحدة من المنتج (ج).

انتهت المسألة.

◀◀◀◀◀◀◀ ▶▶▶▶▶▶▶

مثال (٣): لدى شركة لإنتاج العصائر خمس آلات وتقوم كل آلة بتنفيذ خمس أوامر. ويمثل الجدول التالي الوقت المستهلك لكل آلة في كل مرحلة من المراحل.

	أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)
آلة (١)	١٠	٦	٤	٥	٣
آلة (٢)	٧	١٠	٥	٥	٣
آلة (٣)	٣	٣	١٠	٥	٤
آلة (٤)	٦	٩	٨	١٠	١
آلة (٥)	٣	٧	٥	٤	١٠

المطلوب: تحديد أمر عمل كل آلة من الآلات لتخفيض تكاليف الشركة.

الحل:

حيث أن المسألة تقليل التكاليف، فسنقوم بالبدء في الحل وفق الخطوات السابقة وبدون الحاجة إلى عمل جدول جديد كما كان عليه الحال في مسألة الأرباح
الجدول بعد طرح قيم الصفوف من أقل قيمة فيها.

	أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)
آلة (١)	٧	٣	١	٢	٠
آلة (٢)	٤	٧	٢	٢	٠
آلة (٣)	٠	٠	٧	٢	١
آلة (٤)	٥	٨	٧	٩	٠
آلة (٥)	٠	٤	٢	١	٧

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)	
٧	٣	١	٢	٠	آلة (١)
٤	٧	٢	٢	٠	آلة (٢)
		٧	٢	١	آلة (٣)
٥	٨	٧	٩	٠	آلة (٤)
	٤	٢	١	٧	آلة (٥)

الجدول بعد طرح قيم الأعمدة من أقل قيمة فيها.

أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)	
٧	٣	٠	١	٠	آلة (١)
٤	٧	١	١	٠	آلة (٢)
٠	٠	٦	١	١	آلة (٣)
٥	٨	٦	٨	٠	آلة (٤)
٠	٤	١	٠	٧	آلة (٥)

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)	
٧	٣	٠	١	٠	آلة (١)
٤	٧	١	١	٠	آلة (٢)
٠	٠	٦	١	١	آلة (٣)
٥	٨	٦	٨	٠	آلة (٤)
٠	٤	١	٠	٧	آلة (٥)

عدد خطوط الشطب غير متساوية مع عدد الأعمدة ومتساوي مع عدد الصفوف. ولذا فسيتم:
١. نقوم بنقل الأرقام التي تم شطبها في الجدول إلى جدول جديد ثم نختار أقل رقم من باقي الأرقام غير المشطوبة، ونقوم بعمل الآتي:

- يطرح ذلك الرقم من جميع الأرقام غير المشطوبة في كل الصفوف والأعمدة غير المشطوبة.
 - يضاف ذلك الرقم إلى نقاط التقاطع بين الصفوف.
٢. نشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر، ونبدأ بالصفوف.
- الجدول بعد طرح أقل قيمة من الخلايا المكشوفة من جميع القيم المكشوفة، وإضافتها لخلايا التقاطع.

أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)	
٧	٣	٠	١	١	آلة (١)
٣	٦	٠	٠	٠	آلة (٢)
٠	٠	٦	١	٢	آلة (٣)
٤	٧	٥	٧	٠	آلة (٤)
٠	٤	١	٠	٨	آلة (٥)

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)	
٧	٣	٠	١	١	آلة (١)
٣	٦	٠	٠	٠	آلة (٢)
٠	٠	٦	١	٢	آلة (٣)
٤	٧	٥	٧	٠	آلة (٤)
٠	٤	١	٠	٨	آلة (٥)

عدد خطوط الشطب متساوي مع عدد الأعمدة ومتساوي مع عدد الصفوف. ولذا فهو الحل الأمثل، ويمكن الآن استخراج التخصيص الأفضل، وينتج عنه.

آلة (١)	آلة (٢)	آلة (٣)	آلة (٤)	آلة (٥)	أمر (١)	أمر (٢)	أمر (٣)	أمر (٤)	أمر (٥)
٧	٣								
٣	١								

إذاً نقاط التخصيص هي النقاط التالية حسب ترتيب استخراجها من الجدول أعلاه، وقيمها من الجدول الرئيسي المعطى في السؤال:

١. الآلة (١) للقيام بتنفيذ (الأمر ٣) وتستغرق (٤) دقائق.
٢. الآلة (٤) للقيام بتنفيذ (الأمر ٥) وتستغرق (١) دقيقة.
٣. الآلة (٢) للقيام بتنفيذ (الأمر ٤) وتستغرق (٥) دقائق.
٤. الآلة (٥) للقيام بتنفيذ (الأمر ١) وتستغرق (٣) دقائق.
٥. الآلة (٣) للقيام بتنفيذ (الأمر ٢) وتستغرق (٣) دقائق.

إجمالي الوقت: (١٦) دقيقة.

انتهت المسألة.

<<<<<<< >>>>>>>

مثال (٤): شركة تجارية ترغب في تعيين أربعة عمال لإنجاز أربعة وظائف، فإذا كانت التكاليف الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي:

العامل/الوظائف	(أ)	(ب)	(ج)	(د)
كامل	٧	١٦	٥	٦
خالد	١٠	٨	٧	٢
طارق	٦	١٢	٢	٨
سعيد	١٥	١٩	١١	١٢

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل بطريقة التخصيص ومجموع التكاليف لهذا الحل.

الحل:

نقوم بعمل الجدول الأولي وفقاً لمعطيات السؤال، فينتج لدينا:

الوظيفة (أ)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (د)	
٧	١٦	٥	٦	كامل
١٠	٨	٧	٢	خالد
٦	١٢	٢	٨	طارق
١٥	١٩	١١	١٢	سعيد

الجدول بعد طرح قيم الصفوف من أقل قيمة فيها.

الوظيفة (أ)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (د)	
٢	١١	٠	١	كامل
٨	٦	٥	٠	خالد
٤	١٠	٠	٦	طارق
٤	٨	٠	١	سعيد

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

الوظيفة (أ)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (د)	
٢	١١	٠	١	كامل
٨	٦	٥	٠	خالد
٤	١٠	٠	٦	طارق
٤	٨	٠	١	سعيد

الجدول بعد طرح قيم الأعمدة من أقل قيمة فيها.

الوظيفة (د)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (أ)	
١	٠	٥	٠	كامل
١	٠	١١	٢	
٠	٥	٠	٦	خالد
٠	٥	٦	٨	
٦	٠	٤	٢	طارق
٦	٠	١٠	٤	
١	٠	٢	٢	سعيد
١	٠	٨	٤	

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

الوظيفة (د)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (أ)	
١	٠	٥	٠	كامل
١	٠	١١	٢	
٠	٥	٠	٦	خالد
٠	٥	٦	٨	
٦	٠	٤	٢	طارق
٦	٠	١٠	٤	
١	٠	٢	٢	سعيد
١	٠	٨	٤	

- عدد خطوط الشطب غير متساوية مع عدد الأعمدة ومتساوي مع عدد الصفوف. ولذا فسيتم:
١. نقوم بنقل الأرقام التي تم شطبها في الجدول إلى جدول جديد ثم نختار أقل رقم من باقي الأرقام غير المشطوبة، ونقوم بعمل الآتي:
 - يطرح ذلك الرقم من جميع الأرقام غير المشطوبة في كل الصفوف والأعمدة غير المشطوبة.
 - يضاف ذلك الرقم إلى نقاط التقاطع بين الصفوف.
 ٢. نشطب الصفوف والأعمدة التي تحتوي على أكثر من صفر، ونبدأ بالصفوف.

الجدول بعد طرح أقل قيمة من الخلايا المكشوفة من جميع القيم المكشوفة، وإضافتها لخلايا التقاطع.

الوظيفة (أ)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (د)	
٠	٥	١	١	كامل
٦	٠	٠	٠	خالد
١	٣	٠	٥	طارق
١	٢	٠	٠	سعيد

الجدول بعد شطب الصفوف والأعمدة التي احتوت على أصفار.

الوظيفة (أ)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (د)	
٠	٥	١	١	كامل
٦	٠	٦	٠	خالد
١	٣	٠	٥	طارق
١	١	٠	٠	سعيد

عدد خطوط الشطب متساوي مع عدد الأعمدة ومتساوي مع عدد الصفوف. ولذا فهو الحل الأمثل، ويمكن الآن استخراج التخصيص الأفضل، من الجدول الأخير.

الوظيفة (أ)	الوظيفة (ب)	الوظيفة (ج)	الوظيفة (د)	
٠	٥	١	١	كامل
٦	٠	٦	٠	خالد
١	٣	٠	٥	طارق
١	١	٠	٠	سعيد

إذاً نقاط التخصيص هي النقاط التالي حسب ترتيب استخراجها من الجدول أعلاه، وقيمها من الجدول الرئيسي المعطى في السؤال:

١. الموظف (كامل) للقيام بالوظيفة (أ).
٢. الموظف (طارق) للقيام بالوظيفة (ج).
٣. الموظف (سعيد) للقيام بالوظيفة (د).
٤. الموظف (خالد) للقيام بالوظيفة (ب).

انتهت المسألة.

يمكن حل جميع المسائل التي وردت في التخصيص إما بالطريق الأولى أو بطريقة المربعات الصغيرة أعلى يسار الخلية، وننصح بالطريقة الأولى لسهولة حلها، ولكننا أوردنا الطريقة الثانية حيث استخدام الدكتور محمد الإدريسي لها، وكذلك للتمرين عليها، ويميز الطريقة الثانية وضع نتائج الطرح أو الجمع في تلك الخلايا الصغيرة للمساعدة في الحل.

الفصل الخامس: إدارة شبكات المشاريع والتخطيط والتحكم (الفصل التاسع حسب ترتيب الكتاب المقرر)

تعريفها.

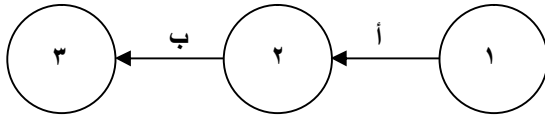
هي عبارة عن محاولة لمعرفة الزمن الحقيقي لإنجاز أي مشروع. فإذا عرفنا ذلك فمن الممكن معرفة القدرات على الإسراع في إنجازه من عدمه. وهناك عدة طرق للحل بها مثل هذه الحالات:

١. طريقة عدد المسارات. وتسمى كذلك خريطة جانت. (نظري).
٢. طريقة الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة. وتسمى كذلك (طريقة المسار الحرج).
٣. طريقة بيرت (PERT).

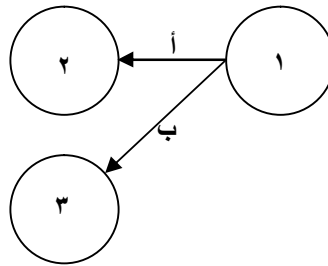
المسار الحرج: هو أطول المسارات التي تنهي المشروع.

قواعد رسم شبكات الأعمال.

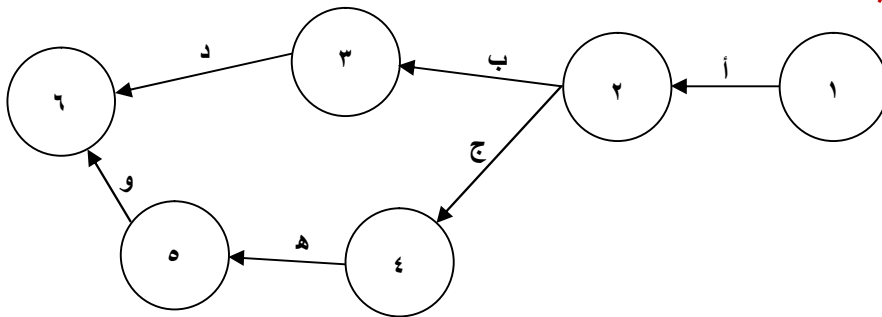
هناك تسع قواعد يجب التقيد بها في حالة العمل مع رسوم شبكات الأعمال، وهي:



١. أنشطة تحدث على التوالي (التتابع).

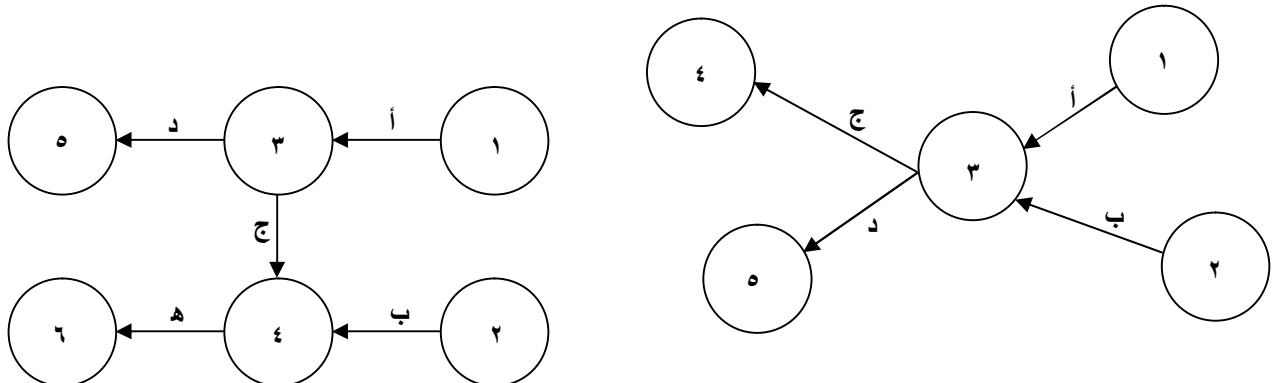


٢. أنشطة تحدث على التوازي.

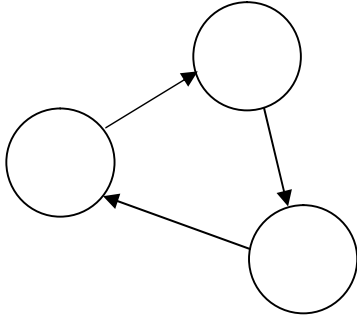


٣. أنشطة تحدث على التوالي والتوازي معاً.

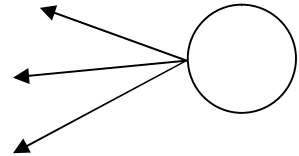
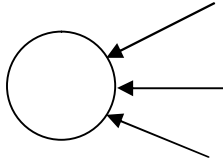
٤. النشاط الوهمي.



٥. شبكة الأعمال لا تسمح بوجود دائرة مغلقة داخل المشروع.



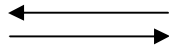
٦. عند نقطة بداية شبكة المشروع تكون الأسهم خارجة وعند نهايتها تكون الأسهم داخلة.



٧. يمكن ترقيم بدايات الأنشطة في اتجاه تصاعدي على أن يأخذ بداية المسار رقم أكبر من الداخل.

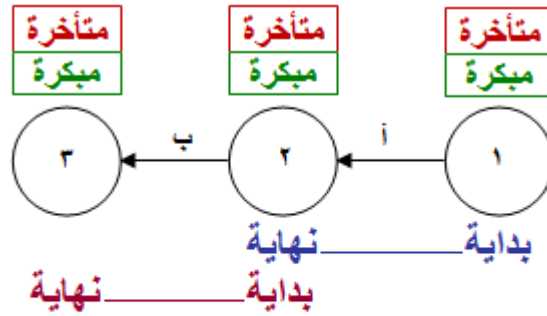
٨. لا يفضل تقاطع الخطوط (الأسهم) عند رسم شبكات الأعمال تجنباً للتفسير الخاطئ.

٩. لا يمكن للنشاط أن يكون له اتجاهين متضادين.



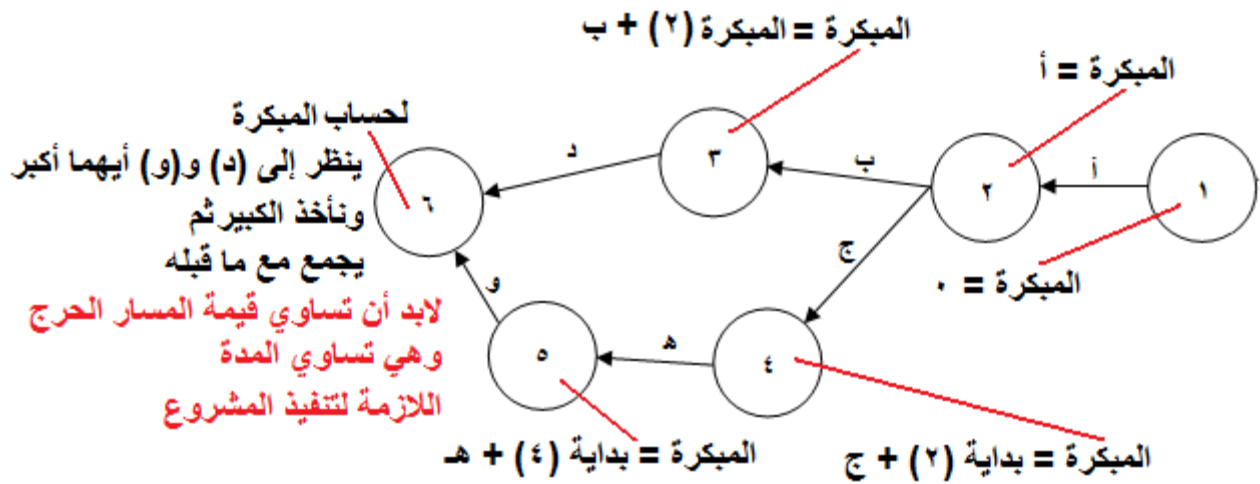
قواعد حل الشبكات.

١. دائماً وأبداً، يبدأ كل مشروع / سؤال / عملية ... الخ ببداية، وتنتهي بنهاية.
 ٢. دائماً وأبداً، تتجه الأسهم من البداية إلى النهاية باتجاه واحد فقط وليس لذلك الاتجاه مسار عكسي.
 ٣. تذكر دائماً، أن المسار الحرج هو أطول المسارات التي تنتهي المشروع.
 ٤. المسار الحرج هو الزمن اللازم لتنفيذ المشروع كاملاً وهو يساوي مجموع أوقات المسار الحرج.
 ٥. ينقسم كل مشروع / سؤال / عملية ... الخ إلى مجموعة من المراحل ابتداءً من بداية المشروع وإنهاء بنهايته، ولكل مرحلة بداية ونهاية.
 ٦. تكون البداية إما مبكرة أو متأخرة، وتكون النهاية كذلك إما مبكرة أو متأخرة.
 ٧. تحسب الأوقات المبكرة للمرحلة ابتداءً من بداية المشروع إلى نهاية تلك المرحلة، وتحسب الأوقات المتأخرة باتجاه عكسي بحيث تبدأ من نهاية المشروع وعوداً إلى المرحلة المطلوبة.
 ٨. المسار في المشروع هو الخط الواصل بين نقطتين، وقد يخرج أكثر من مسار واحد من نقطة لنقاط أخرى في المشروع، ولكن لا يخرج مسارين من نقطة إلى نقطة واحدة، بل لنقطتين مختلفتين، وتكون عدد المسارات الخارجة بعدد النقاط المتجهة لها.
 ٩. يمكن لنا (للشرح فقط) أن نقوم بتمثيل مبنى مكون من طابقين وذلك لكل نقطة من نقاط الشبكة بحيث يمثل الدور الأول (المبكرة) والدور الثاني (المتأخرة) ومن ثم نقوم بحساب ذلك الوقت.
 ١٠. لإيجاد الأوقات المبكرة نبدأ من بداية المشروع بحيث تكون البداية المبكرة والمتأخرة لنقطة بداية المشروع تساوي (٠)، وتكون البداية المبكرة والمتأخرة لنقطة نهاية المشروع تساوي (قيمة المسار الحرج وهي تساوي المدة الكاملة لتنفيذ المشروع) أما بقية النقاط فنقوم بما يلي:
- إذا كانت تلك الدائرة يدخل إليها سهم واحد فقط قادم من نشاط آخر فيحسب وقت ذلك النشاط فقط، ثم يجمع ذلك مع بدايات الأوقات السابقة للنقطة.
 - إذا كان تلك الدائرة يدخل إليها أكثر من سهم قادم من عدد من الأنشطة فيؤخذ بأكبر وقت داخل إليها، ثم يجمع ذلك مع بدايات الأوقات السابقة للنقطة.

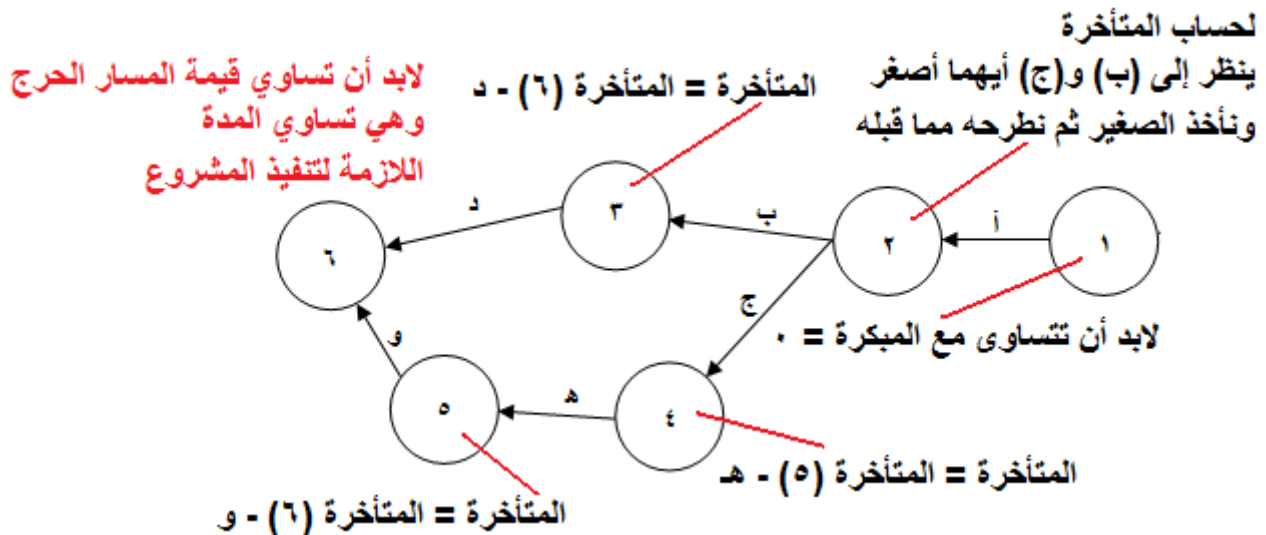


تحتسب البدايات أولاً ابتداءً من أول المشروع إلى نهايته
ثم تحتسب النهاية بعد ذلك ابتداءً من آخر المشروع إلى أوله

لحساب الأوقات المبكرة:



لحساب الأوقات المتأخرة:



١١. لكل مسار بداية ونهاية، ولكل بداية ونهاية وقت مبكر ووقت متأخر، عليه ووفق ما سبق بيانه فإنه سيكون لدينا (بداية مبكرة **بك**) و (بداية متأخرة **هك**) و (نهاية مبكرة **بخ**) و (نهاية متأخرة **هخ**).
١٢. بعد حساب ما سبق، فيكون لدينا (فائض كلي **فك**) وهو (**هخ - بك - و**).

١٣. كل فائض كلي (فك) لأحد مراحل المشروع يساوي (٠) هو مسار حرج من المسار الحرج للمشروع، وتلك المسارات الحرجة للمراحل هي التي يمكن فيها تقليل وقت تنفيذ المشروع بعد حساب إنحدار تكلفة كل مسار وفق القانون التالي وهو **للمسار الحرج فقط**:

$$\text{إنحدار التكلفة} = \frac{\text{تكلفة الإسراع} - \text{التكلفة العادية}}{\text{المدة العادية} - \text{المدة المخفضة}}$$

للمسار الحرج فقط

قوانين (الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة) يجب مراعاتها وحفظها

التعريف بالرموز.

وقت النشاط (و). هو الوقت الذي يستغرقه تنفيذ النشاط.
وقت البداية المبكرة (بك). أدنى وقت ممكن أن نبدأ عنده النشاط.
وقت البداية المتأخرة (بخ). أقصى وقت ممكن أن نبدأ عنده النشاط.
وقت النهاية المبكرة (هك). أدنى وقت ممكن أن ينتهي عنده النشاط.
وقت النهاية المتأخرة (هخ). أقصى وقت ممكن أن ينتهي عنده النشاط.
الوقت الفائض الكلي (فك). أدنى وقت يسمح للنشاط أن يتأخر بشرط ألا يؤثر على المدة الإجمالية لتنفيذ المشروع.

قاعدة: (بك) البداية المبكرة = وقت البداية المبكرة للنشاط (للأنشطة غير النشاط الأول) + الوقت الذي يستغرقه النشاط السابق.

قاعدة: (بخ) البداية المتأخرة = وقت الإنتهاء المبكر للمشروع بالكامل - الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط (وفي حالة وجود أكثر من وقت نهائي لذلك النشاط نأخذ أطولها).

قاعدة: (هك) النهاية المبكرة = الوقت المبكر لبداية النشاط + الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط المحدد.

قاعدة: (هخ) النهاية المتأخرة = وقت البداية المتأخرة للنشاط + وقت ذلك النشاط.

قاعدة: النشاط الأول. دائماً يبدأ من الصفر.

(مثال: بداية إنشاء الفيلا، تبدأ من الصفر).

قاعدة: الأنشطة الأخرى غير النشاط الأول. تبدأ دائماً بعد النشاط الأول، ولكنها تبدأ من الصفر بالنسبة لها. وعند حساب (بك) لها فإنه يساوي مجموع وقت الأنشطة التي سبقتها في المشروع أو المسألة.

أي أن النشاط الثاني يبدأ من الصفر بالنسبة له، ولكنه يعتمد على النشاط الذي سبقه من حيث مجموع المدة، وكذلك النشاط الثالث فإنه يبدأ من الصفر بالنسبة له، ولكنه يعتمد على الأنشطة التي سبقته. (مثال: بناء الدور الأول يبدأ من الصفر بالنسبة له، ولكنه يعتمد على مرحلة صب الأعمدة).

قاعدة: إذا كان الوقت الذي قبل النشاط المطلوب قد كان في مسارين، وكان المسارين متساويين فيؤخذ بأحدهما، أما إذا كان أحد المسارين أطول من الثاني فيؤخذ بالأطول.

(مثال: وضع قواطع الكباري تعتمد على مرحلة الإنهاء من الأعمدة الجانبية، وكذلك على مرحلة الأعمدة الوسط. فإذا كانت الأعمدة الجانبية تستغرق شهرين، والأعمدة الوسط تستغرق أسبوع، فيؤخذ بالشهرين، لأنه وإن انتهت الأعمدة الوسط في أسبوع إلا أن وضع قواطع الكوبري لا يمكن أن تكون إلا بعد الإنهاء من مرحلة الأعمدة الجانبية).

قاعدة: يحسب وقت البداية المتأخرة دائماً وأبداً من اليسار إلى اليمين أي بعودة عكسية.

قاعدة: الوقت الفائض هو ذلك الوقت الذي يمكن للنشاط أن يستفيد منه في عدم بدايته في الوقت المحدد له.

(مثال: تواعد موظف من الرياض وموظف من الطائف أن يتوجهاً إلى جدة، ويلتقيان الساعة التاسعة، ولا يوجد لديهما سوى تسع ساعات، فهذا يعني أن موظف الرياض يجب أن يتحرك فوراً لأن الطريق سيستغرق معه تسع ساعات، لذا فليس لديه وقت فائض، بينما موظف الطائف سيستغرق في طريقه ساعتان فقط، وهذا سيعطيه سبع ساعات فائضة، لذا فإنه يمكنه أن يتوجه فوراً، أو أن يتأخر سبع ساعات أو جزء منها للتوجه إلى جدة).

إنحدار التكلفة = (تكلفة الإسراع - التكلفة العادية) ÷ (المدة العادية - مدة الإسراع)

التكلفة بعد تخفيض المدة = مجموع تكاليف الإسراع + التكلفة الحالية للمشروع

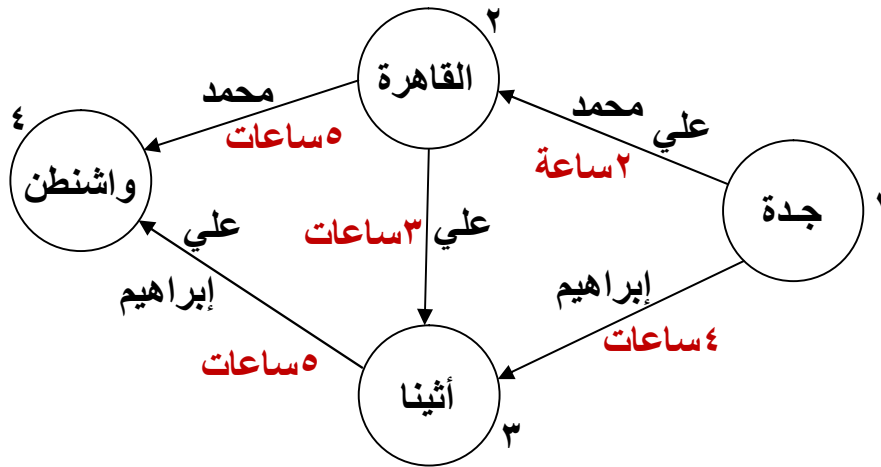
وستوضح الأمثلة التالية ما جاء به.

مثال (١): يرغب ثلاثة أصدقاء في السفر إلى واشنطن هم (محمد وعلي وإبراهيم) وقتم كل منهم بحجز سفره بطريقته الخاصة به. وفي وقت السفر ركب (محمد وعلي) طائرة متجهة إلى (القاهرة). وفي مطار (القاهرة) ركب (محمد) طائرة متجهة مباشرة إلى (واشنطن) بينما ركب (علي) طائرة متجهة إلى (أثينا) لكي يقابل (إبراهيم) القادم من (جدة) ثم يركبان سوياً طائرة متجهة إلى (واشنطن). فإذا علمت أن الرحلة (جدة/القاهرة) تستغرق (٢) ساعة، وأن الرحلة (القاهرة/واشنطن) تستغرق (٥) ساعات، وأن الرحلة (القاهرة/أثينا) تستغرق (٣) ساعات، وأن الرحلة (جدة/أثينا) تستغرق (٤) ساعات، وأن الرحلة (أثينا/واشنطن) تستغرق (٥) ساعات.

المطلوب: معرفة بعد كم من الوقت سوف يلتقي الجميع في واشنطن؟.

الحل:

في البداية لابد من أن نرسم شبكة الأعمال، وسينتج عن ذلك:



الآن... وبعد رسم شبكة الأعمال. نقوم بعد المسارات، وسنجدها (٣) مسارات، حيث أن:

المسار: هو عبارة عن أسهم من البداية إلى النهاية، ولا يمكن أن يسمى مسار إذا كان بأسهم متضادة، فيجب أن تكون متتالية.

المسارات في المثال هي:

- مسار (١) وهو مسار (محمد): (١) جدة - (٢) القاهرة - (٤) واشنطن.
- مسار (٢) وهو مسار (إبراهيم): (١) جدة - (٣) أثينا - (٤) واشنطن.
- مسار (٣) وهو مسار (علي): (١) جدة - (٢) القاهرة - (٣) أثينا - (٤) واشنطن.

نقوم الآن... بتحديد طول تلك المسارات:

مسار (١) وهو مسار (محمد): (١) ← (٢) ← (٤) ← (٤) ← (٥) ← (٤)

مسار (٢) وهو مسار (إبراهيم): (١) ← (٣) ← (٤) ← (٤) ← (٥) ← (٤)

مسار (٣) وهو مسار (علي): (١) ← (٢) ← (٣) ← (٣) ← (٥) ← (٤)

نقوم الآن... بجمع كل مسار على حدة:مسار (١) وهو مسار (محمد): $٧ = ٥ + ٢$ ساعات.مسار (٢) وهو مسار (إبراهيم): $٩ = ٥ + ٤$ ساعات.مسار (٣) وهو مسار (علي): $١٠ = ٥ + ٣ + ٢$ ساعات.

عليه... نجد أن مسار (علي) هو الذي أخذ أطول مدة، وأنه لا يمكن أن يجتمع الثلاثة إلا بعد هذا الوقت، ولذلك يسمى هذا المسار بـ **(المسار الحرج)**.

انتهت المسألة.

<<<<<<< >>>>>>>>

مثال (٢): شركة لديها مشروع يتكون من عدة أنشطة، والجدول التالي يوضح الأنشطة وأوقاتها. مع العلم بأن المشروع سوف يستغرق إنجازه اثنا عشر (١٢) شهراً حسبما أفادت به الشركة. **(ملاحظة: يأتي في السؤال النشاط والوقت فقط).**

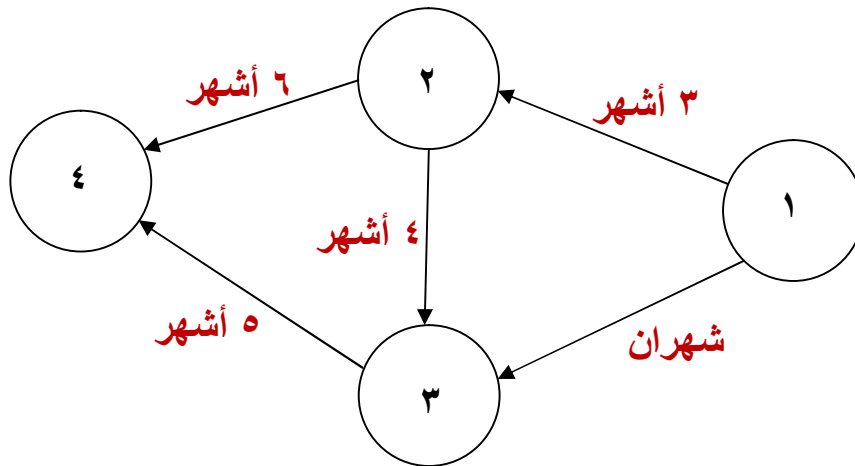
المطلوب: إكمال الخلايا الشاغرة في الجدول ومعرفة الوقت الفائض (ف.ك).

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
٢-١	٣					
٣-١	٢					
٣-٢	٤					
٤-٢	٦					
٤-٣	٥					

ملاحظة: الأرقام في عمود النشاط، تحدد المرحلة من المشروع (مثال: خط سير كل رحلة من رحلات الأصدقاء الثلاث السابق ذكره مثالهم).

الحل:

يجب أولاً أن نقوم برسم شبكة الأعمال والتي ستسهل علينا فهم السؤال والتعامل معه:



الآن... وبعد رسم شبكة الأعمال، ومن المعطيات المتوفرة أعلاه وتطبيق القوانين آنفة الذكر، يتبين لنا:

١. أن قيمة (ب.ك) وهي (البداية المبكرة) للأنشطة التي تبدأ من (١) هي (٠) لأنها البداية للمشروع فليس هناك وقت قد سبقها. بينما الأنشطة الأخرى سوف تساوي (مجموع وقت الأنشطة التي سبقتها). أي أن النشاط (٣-٢) سوف يساوي وقت (٢-١) أما النشاط (٤-٣) فسوف يساوي وقت (٢-١ + ٣-٢). وبذلك تطبق هذه القاعدة على الجميع.

٢. أن قيمة (ب.خ) وهي (البداية المتأخرة) للنشاط (٢-١) هو: (وقت النشاط (٢-١) - وقت النشاط (٢-١) أي (٣ - ٣) حيث (٣) الأولى هي (وقت الإنتهاء المبكر للمشروع بالكامل)، و(٣) الثانية هي (الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط). أما النشاط (٣-١) فهو: (وقت النشاط (٢-١) + وقت النشاط (٣-٢) - وقت النشاط (٣-١) = ٣ - ٤ + ٢ = ١). أما النشاط (٣-٢) فهو: (وقت النشاط (٢-١) + وقت النشاط (٣-٢) - وقت النشاط (٣-٢) = ٣ - ٤ + ٣ = ٢). أما النشاط (٤-٢) فهو: (وقت النشاط (٢-١) + وقت النشاط (٣-٢) + وقت النشاط (٤-٣) - وقت النشاط (٤-٢) = ٣ + ٢ - ٥ + ٦ = ٦). أما النشاط (٤-٣) فهو: (وقت النشاط (٢-١) + وقت النشاط (٣-٢) + وقت النشاط (٤-٣) - وقت النشاط (٤-٣) = ٣ + ٢ - ٥ + ٧ = ٧).

النشاط	(و) الوقت المقرر	(ب.ك) البداية المبكرة	(ب.خ) البداية المتأخرة	(ه.ك) النهاية المبكرة	(ه.خ) النهاية المتأخرة	(ف.ك) الوقت الفائض
٢-١	٣	٠	٠	٣	٣	٠
٣-١	٢	٠	٥	٢	٧	٥
٣-٢	٤	٣	٣	٧	٧	٠
٤-٢	٦	٣	٦	٩	١٢	٣
٤-٣	٥	٧	٧	١٢	١٢	٠

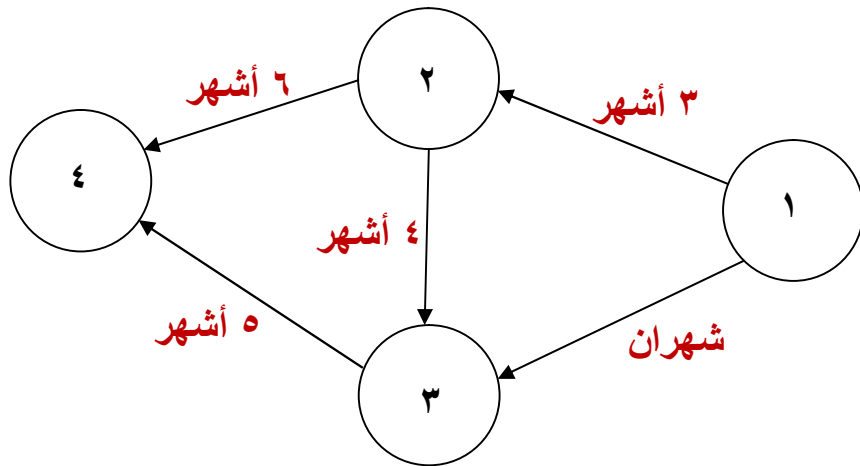
حيث أننا قد قمنا باستخراج (ب.ك) و(ب.خ) فهناك **طريقة أخرى مبسطة** لاستخراج بقية العناصر (المجاهيل) في السؤال:

قاعدة: النهاية المبكرة (ه.ك) = الوقت (و) + البداية المبكرة (ب.ك).

قاعدة: النهاية المتأخرة (ه.خ) = الوقت (و) + البداية المتأخرة (ب.ك).

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (ف.ك) = البداية المتأخرة (ب.ك) - البداية المبكرة (ب.ك).

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (ف.ك) = النهاية المتأخرة (ه.خ) - النهاية المبكرة (ه.ك).



الآن. ومن الشبكة أعلاه فإن عدد المسارات التي توصلنا من البداية إلى النهاية هي ثلاثة مسارات فقط:

١. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٤)
٢. مسار من (١) إلى (٣) إلى (٤)
٣. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٣) إلى (٤)

الآن. نقوم بحساب كامل قيمة كل مسار من المسارات الثلاث المذكورة، وينتج عن ذلك:

$$\text{المسار (١-٢) (٢-٤)} \quad 10 = 6 + 3 =$$

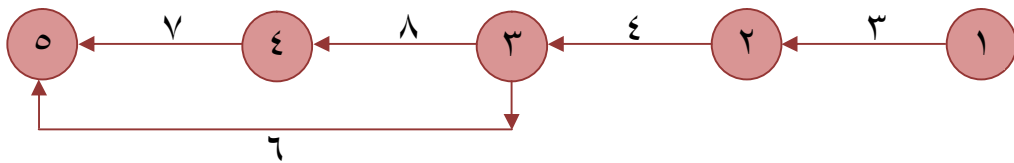
$$\text{المسار (١-٣) (٣-٤)} \quad 7 = 5 + 2 =$$

$$\text{المسار (١-٢) (٢-٣) (٣-٤)} \quad 12 = 3 + 4 + 5 = \text{ (المسار الحرج)}$$

ونجد أن المسار الأخير هو أكبرها، ولذا فإنه **(المسار الحرج)**. وعليه فإن ما قالته الشركة عند تنفيذها للمشروع صحيح حيث طلب (١٢) شهراً، ووجد أن المسار الحرج = (١٢) شهراً.

ملاحظة: دائماً وأبداً، لحساب وقت البداية المتأخرة قم بجمع كامل أوقات الأنشطة السابقة للنشاط المطلوب حسبما هو مقرر، ثم اطرح الوقت المقرر لذلك النشاط.

مثال.



فإذا ما أردنا حساب وقت البداية المتأخرة للنشاط (٥-٣) فعلينا أن نقوم بجمع كامل أوقات الأنشطة من (١) إلى (٥) ثم طرح الوقت المقرر للنشاط (٥-٣):

$$\text{إذاً.. (بخ)} = (3 + 4 + 8 + 7) - 6 = 22 - 6 = 16$$

أي: أنه يمكن تأخر بداية هذا النشاط إلى حدود (١٦) وهو وقت البداية المتأخرة للنشاط (٥-٣).

إذاً فالوقت المتأخر للنشاط (٤-٣) هو: ٤ + ٣ (وهو كامل الوقت الخاص بالأنشطة السابقة) = ٧

الآن... نعود للمثال السابق، وعليه فإنه يجب علينا النظر إلى عمود الوقت الفائض (فك) وننظر إلى الأنشطة الصفرية (أي التي تحمل النتيجة صفر) ثم نقوم بجمع وقت (و) تلك الأنشطة فقط، وسيمثل مجموع هذه الأوقات هو (المسار الحرج).

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
٢-١	٣	٠	٠	٣	٣	٠
٣-١	٢	٠	٥	٢	٧	٥
٣-٢	٤	٣	٣	٧	٧	٠
٤-٢	٦	٣	٦	٩	١٢	٣
٤-٣	٥	٧	٧	١٢	١٢	٠

إدًا.. سنجد أن المسار (٣-١) لديه (٥ أشهر) والمسار (٤-٢) لديه (٣ أشهر) كوقت فائض، وبالتالي **يتم إستبعادهما**، ونقوم بجمع أوقات المسارات الباقية التي ليس لديها وقت فائض، وينتج لدينا:

وقت النشاط (٢-١) + وقت النشاط (٣-٢) + وقت النشاط (٤-٣) = قيمة المسار الحرج.

و (٢-١) + و (٣-٢) + و (٤-٣) \leq $٣ + ٤ + ٥ = ١٢$ ————— (قيمة المسار الحرج)

انتهت المسألة.

<<<<<<< >>>>>>>>

مثال (٣): لديك الأنشطة التالية وأزمنة تنفيذها.

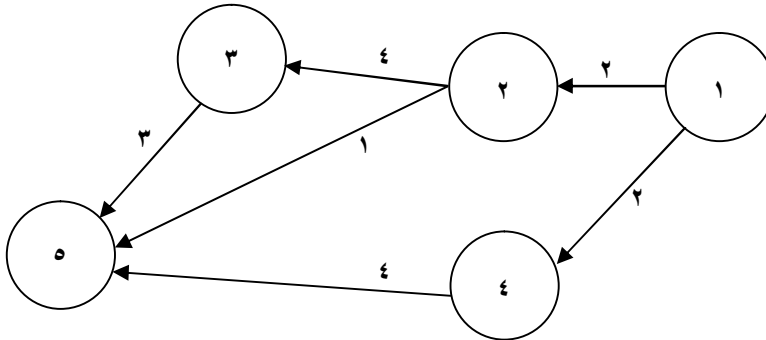
النشاط	(و) الوقت المقرر				
٢-١	٢				
٤-١	٢				
٣-٢	٤				
٥-٣	٣				
٥-٢	١				
٥-٤	٤				

المطلوب: إكمال الخلايا الشاغرة في الجدول ومعرفة الوقت الفائض (ف.ك) والزمن اللازم لتنفيذ المشروع بطريقة المسار الحرج.

الحل:

(١) المسار الحرج.

يجب أولاً أن نقوم برسم شبكة الأعمال والتي ستسهل علينا فهم السؤال والتعامل معه:



الآن. ومن الشبكة أعلاه فإن عدد المسارات التي توصلنا من البداية إلى النهاية هي ثلاثة مسارات فقط:

١. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٣) إلى (٥).

٢. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٥).

٣. مسار من (١) إلى (٤) إلى (٥).

الآن. نقوم بحساب كامل قيمة كل مسار من المسارات الثلاث المذكورة، وينتج عن ذلك:

المسار (١-٢-٣-٥) = ٢ + ٤ + ٣ = ٩ (المسار الحرج)

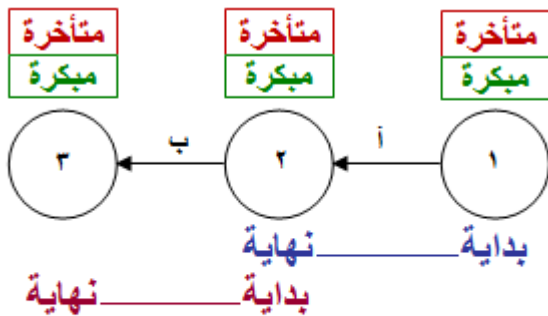
المسار (١-٢-٥) = ٢ + ٣ = ٥

المسار (١-٤-٥) = ٢ + ٤ = ٦

ونجد أن المسار الأول هو أطولها، ولذا فإنه **(المسار الحرج)**. وعليه فإن زمن تنفيذ المشروع هو (٩) أسابيع، وهو يساوي قيمة المسار الحرج.

(٢) الأوقات المبكرة والمتأخرة.

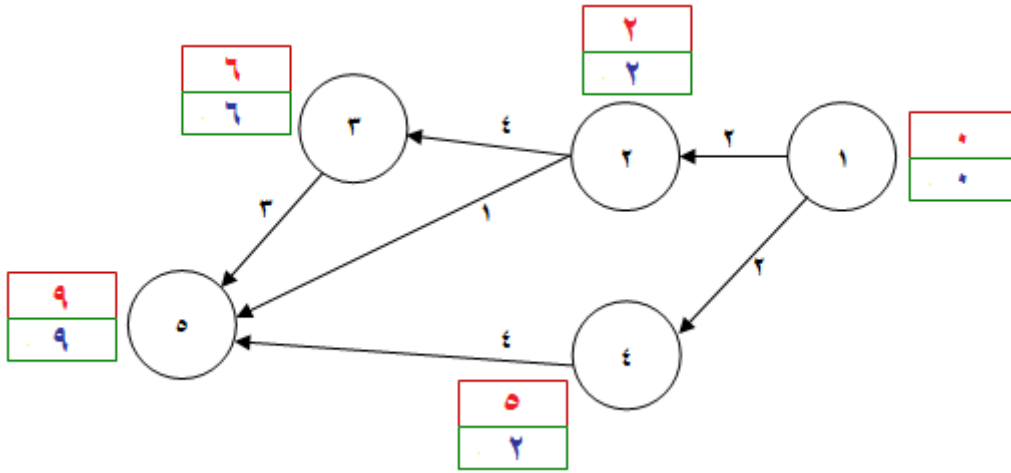
وفق القاعدة التالي:



تحسب البدايات أولاً ابتداء من أول المشروع إلى نهايته

ثم تحسب النهاية بعد ذلك ابتداء من آخر المشروع إلى أوله

نقوم بتحديد الأوقات المبكرة والأوقات المتأخرة لكل خلية (دائرة) حسب طريقة المبنى، وهي – كما أسلفنا – طريقة شرح فقط لا تستخدم في الاختبارات. وهي أيضاً طريقة مبسطة لاستخدام القوانين، فينتج لدينا:



وللتأكد فقط، فإنه يمكن حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة حسب القوانين التالية لجميع المسارات:

قاعدة: (بك) البداية المبكرة = وقت البداية المبكرة للنشاط (للأنشطة غير النشاط الأول) + الوقت الذي يستغرقه النشاط السابق.

قاعدة: (بخ) البداية المتأخرة = وقت الإنتهاء المبكر للمشروع بالكامل - الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط (وفي حالة وجود أكثر من وقت نهائي لذلك النشاط نأخذ أطولها).

قاعدة: (هك) النهاية المبكرة = الوقت المبكر لبداية النشاط + الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط المحدد.

قاعدة: (هخ) النهاية المتأخرة = وقت البداية المتأخرة للنشاط + وقت ذلك النشاط.

إذا سيكون الجدول بعد إكمال بعض بيانات على النحو التالي:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
١-٢	٢	٠	٠	٢	٢	
١-٤	٢	٠	٠	٢	٥	
٢-٣	٤	٢	٢	٦	٦	
٣-٥	٣	٦	٦	٩	٩	
٤-٥	١	٢	٢	٩	٩	
٤-٥	٤	٢	٥	٩	٩	

ولاستخراج الوقت الفائض (فك) نقوم بتطبيق القاعدة التالي:

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (فك) = النهاية المتأخرة (هك) - البداية المبكرة (بك) - وقت النشاط (و).

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (فك) = النهاية المتأخرة (هك) - النهاية المبكرة (هك).

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (فك) = النهاية المتأخرة (هك) - النهاية المبكرة (هك).

هناك طريقة أخرى لإستخراج الزمن الفائض الكلي:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض

Diagram showing the calculation of total float time using the formula: (و) - (بك) - (هك) = (فك). Red lines and circles highlight the calculation for activity 1-2.

وعليه يكون الجدول الكلي على النحو التالي:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
١-٢	٢	٠	٠	٢	٢	٠
١-٤	٢	٠	٠	٢	٥	٣
٢-٣	٤	٢	٢	٦	٦	٠
٣-٥	٣	٦	٦	٩	٩	٠
٢-٥	١	٢	٢	٩	٩	٦
٤-٥	٤	٢	٥	٩	٩	٣

ويتبين من الجدول أن المسار الذي سبق وأن أشرنا إليه في شبكة المشروع على أنه المسار الحرج، وهو الزمن اللازم لتنفيذ المشروع، صحيح وهو (المسار ١-٢) (٢-٣) (٣-٥) (٥-٤) = ٩. انتهت المسألة.

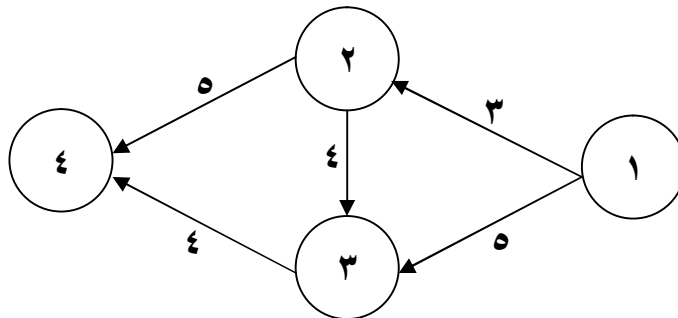
<<<<<<< >>>>>>>

مثال (٤): لديك الأنشطة التالية وأزمنة تنفيذها.

النشاط	المدة	النشاط	المدة	النشاط	المدة
(٢-١)	٣	(٣-١)	٥	(٣-٢)	٤
(٤-٢)	٥	(٤-٣)	٤		

المطلوب: الزمن اللازم لتنفيذ المشروع باستخدام المسار الحرج، وأوقات المبكرة والمتأخرة.

الحل: يجب أولاً أن نقوم برسم شبكة الأعمال والتي ستسهل علينا فهم السؤال والتعامل معه:
(١) المسار الحرج.



الآن. ومن الشبكة أعلاه فإن عدد المسارات التي توصلنا من البداية إلى النهاية هي ثلاثة مسارات فقط:

١. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٣) إلى (٤).

٢. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٤).

٣. مسار من (١) إلى (٣) إلى (٤).

الآن. نقوم بحساب كامل قيمة كل مسار من المسارات الثلاث المذكورة، وينتج عن ذلك:

المسار (١-٢) (٢-٣) (٣-٤) = ٣ + ٤ + ٤ = ١١ → **(المسار الحرج)**

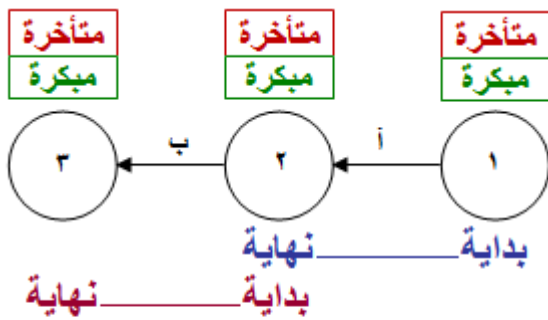
المسار (١-٢) (٢-٤) = ٣ + ٥ = ٨

المسار (١-٣) (٣-٤) = ٤ + ٥ = ٩

المسار الحرج: هو أطول المسارات التي تنهي زمن المشروع، وهو زمن المشروع = ١١ أسبوعاً.

(٢) الأوقات المبكرة والمتأخرة.

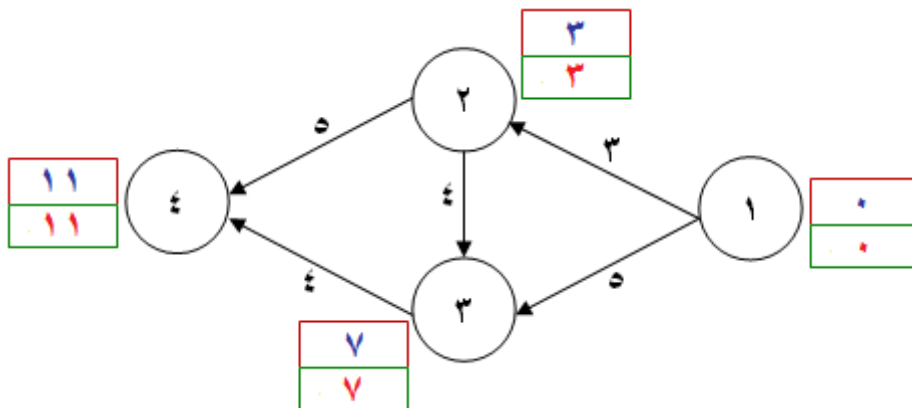
وفق القاعدة التالي:



تحتسب البدايات أولاً ابتداءً من أول المشروع إلى نهايته

ثم تحتسب النهاية بعد ذلك ابتداءً من آخر المشروع إلى أوله

نقوم بتحديد الأوقات المبكرة والمتأخرة لكل خلية (دائرة) حسب طريقة المبنى، وهي - كما أسلفنا - طريقة شرح فقط لا تستخدم في الإختبارات. وهي أيضاً طريقة مبسطة لاستخدام القوانين، فينتج لدينا:



وللتأكد فقط، فإنه يمكن حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة حسب القوانين التالية لجميع المسارات:

قاعدة: (بك) البداية المبكرة = وقت البداية المبكرة للنشاط (للأنشطة غير النشاط الأول) + الوقت الذي يستغرقه النشاط السابق.

قاعدة: (بخ) البداية المتأخرة = وقت الإنتهاء المبكر للمشروع بالكامل - الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط (وفي حالة وجود أكثر من وقت نهائي لذلك النشاط نأخذ أطولها).

قاعدة: (هك) النهاية المبكرة = الوقت المبكر لبداية النشاط + الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط المحدد.

قاعدة: (هخ) النهاية المتأخرة = وقت البداية المتأخرة للنشاط + وقت ذلك النشاط.

إذا سيكون الجدول بعد إكمال بعض بيانات على النحو التالي:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
٢-١	٢	٠	٣	٠	٣	
٣-١	٥	٠	٧	٠	٧	
٣-٢	٤	٣	٧	٣	٧	
٤-٢	٥	٣	١١	٣	١١	
٤-٣	٤	٧	١١	٧	١١	

ولاستخراج الوقت الفائض (فك) نقوم بتطبيق القاعدة التالي:

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (فك) = النهاية المتأخرة (هك) - البداية المبكرة (بك) - وقت النشاط (و).

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (فك) = النهاية المتأخرة (هك) - النهاية المبكرة (هك).

قاعدة: الوقت الفائض الكلي (فك) = النهاية المتأخرة (هك) - النهاية المبكرة (هك).

هناك طريقة أخرى لإستخراج الزمن الفائض الكلي:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض

Diagram illustrating the calculation of total float (Fk) using the difference between late finish (Hk) and early finish (Hk):

$(F_k) = (H_k) - (H_k)$

وعليه يكون الجدول الكلي على النحو التالي:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
٢-١	٢	٠	٣	٠	٣	٠
٣-١	٥	٠	٧	٠	٧	٢
٣-٢	٤	٣	٧	٣	٧	٠
٤-٢	٥	٣	١١	٣	١١	٣
٤-٣	٤	٧	١١	٧	١١	٠

ويتبين من الجدول أن المسار الذي سبق وأن أشرنا إليه في شبكة المشروع على أنه المسار الحرج، وهو الزمن اللازم لتنفيذ المشروع، صحيح وهو (المسار ٢-١) (٣-٢) (٤-٣) $= ٣ + ٤ + ٤ = ١١$).

انتهت المسألة.

<<<<<<< >>>>>>>

الإسراع

تعريفه واستخدامه.

هي تلك الطريقة والحسابات التي يمكن إجراؤها لتقليص مدة تنفيذ المشروع، مع حساب تكلفة ذلك.

طريقة الحل.

أولاً. نحدد الأنشطة الحرجة، وهي تلك الأنشطة التي لا يمكن للمشروع القيام إلا بها، ولذا فإنه يتم أخذها في الاعتبار عند إجراء أي تخفيض للمدة وفقاً لتكاليف الإسراع بها.

ثانياً. نقوم بحساب قيمة إنحدار التكلفة، وذلك وفقاً للقانون التالي:

$$\text{إنحدار التكلفة} = (\text{تكلفة الإسراع} - \text{التكلفة العادية}) \div (\text{المدة العادية} - \text{مدة الإسراع})$$

ثالثاً. نقوم بحساب قيمة تكلفة المشروع بالكامل بعد تخفيض المدة، وذلك وفقاً للقانون التالي:

$$\text{التكلفة بعد تخفيض المدة} = \text{مجموع تكاليف الإسراع} + \text{التكلفة الحالية للمشروع}$$

وسيوضح المثال التالي ذلك تفصيلاً.

مثال (١): شركة لديها مشروع يتكون من عدة أنشطة، والجدول التالي يوضح الأنشطة وتكلفة الزمن العادي وتكلفة الإسراع في المشروع. مع إفتراض أن المسار الحرج هو (أ-هـ-ز-ط) وأن الشركة ترغب في تخفيض مدة المشروع لـ (٥) أشهر.

المطلوب: حساب تكلفة المشروع بعد تخفيض المدة الموضحة.

النشاط	الوقت المقرر (و)	التكلفة العادية	الوقت المقرر (و)	تكلفة الإسراع
أ	٥	٩,٠٠٠	٣	١٨,٠٠٠
ب	٦	١٨,٠٠٠	٤	٣٠,٠٠٠
ج	٤	٤,٠٠٠	٣	٨,٠٠٠
د	٣	١,٠٠٠	٢	١,٢٠٠
هـ	٢	١,٠٠٠	١	١,٥٠٠
و	٤	٣٠٠	٢	٨,٣٠٠
ز	١٤	٢٠٠,٠٠٠	١٢	٢٦٠,٠٠٠
ع	١٢	٣,٠٠٠	١١	٥,٠٠٠
ط	٢	٢,٠٠٠	١	٣,٠٠٠
مجموع تكلفة المشروع		٢٣٨,٣٠٠		

الحل:

نقوم بتطبيق القوانين السابقة لحساب إنحدار التكلفة لجميع أنشطة المسار الحرج فقط والتي تم تحديدها في السؤال، وهي (أ، هـ، و، ز، ط)، **وعدم حساب إنحدار التكلفة للأنشطة المتبقية** وينتج عن ذلك:

إنحدار التكلفة = (تكلفة الإسراع - التكلفة العادية) ÷ (المدة العادية - مدة الإسراع)

$$\begin{aligned} \text{إنحدار تكلفة (أ)} &= (٩,٠٠٠ - ١٨,٠٠٠) \div (٣ - ٥) = ٩,٠٠٠ \div ٢ = ٤,٥٠٠ \\ \text{إنحدار تكلفة (هـ)} &= (١,٥٠٠ - ١,٠٠٠) \div (١ - ٢) = ٥٠٠ \div ١ = ٥٠٠ \\ \text{إنحدار تكلفة (و)} &= (٣٠٠ - ٨,٣٠٠) \div (٢ - ٤) = ٤,٠٠٠ \div ٢ = ٢,٠٠٠ \\ \text{إنحدار تكلفة (ز)} &= (٢٠٠,٠٠٠ - ٢٦٠,٠٠٠) \div (١٢ - ١٤) = ٣٠,٠٠٠ \div ٢ = ١٥,٠٠٠ \\ \text{إنحدار تكلفة (ط)} &= (٢,٠٠٠ - ٣,٠٠٠) \div (١ - ٢) = ١,٠٠٠ \div ١ = ١,٠٠٠ \end{aligned}$$

إذاً فجميع هذه الأنشطة المذكورة (أ، هـ، و، ز، ط)، أنشطة حرجية **يتم بها إجراء عمليات التخفيض مع احتساب قيمة تكلفة ذلك الإسراع لكل نشاط على حدة.**

الآن... نرغب في تخفيض مدة تنفيذ المشروع لـ (٥) أشهر، مما يعني أنه في كل شهر سيكون لدينا تكلفة إضافية:

$$\begin{aligned} \text{تكلفة (أ)} &= ٤,٥٠٠ \\ \text{تكلفة (هـ)} &= ٥٠٠ \\ \text{تكلفة (و)} &= ٤,٠٠٠ \\ \text{تكلفة (ز)} &= ٣٠,٠٠٠ \\ \text{تكلفة (ط)} &= ١,٠٠٠ \end{aligned}$$

وسنبحث الآن عن أقل تكلفة مع افتراض أن زمن الإسراع هو (هـ)، لذا نبدأ بأقل تلك التكاليف وهي تكلفة (ط) باعتبارها (٥٠٠)، مع ضرورة الإنتباه إلى زمن الإسراع، وهو يساوي فرق الزمن بين المدة العادية ومدة الإسراع، أي: (هـ = المدة العادية - مدة الإسراع) وينتج عن ذلك:

$$\begin{aligned} \text{زمن إسراع (هـ) للنشاط (أ)} &= ٢ = ٣ - ٥ \\ \text{زمن إسراع (هـ) للنشاط (هـ)} &= ١ = ١ - ٢ \end{aligned}$$

بتكلفة للشهر الواحد قدرها: (٤,٥٠٠)
بتكلفة للشهر الواحد قدرها: (٥٠٠)

زمن إسراع (هـ) للنشاط (و) $2 = 2 - 4$ بتكلفة للشهر الواحد قدرها: (٤,٠٠٠)
 زمن إسراع (هـ) للنشاط (ز) $2 = 12 - 14$ بتكلفة للشهر الواحد قدرها: (٣٠,٠٠٠)
 زمن إسراع (هـ) للنشاط (ط) $1 = 1 - 2$ بتكلفة للشهر الواحد قدرها: (١,٠٠٠)

ولذا سنبدأ بتخفيض أقل تكلفة ممكنة، أخذاً بكل نشاط، وصولاً لتخفيض (٥) أشهر، وينتج عن ذلك:

تخفيض النشاط (هـ): $500 = 1 \times 500$ قام النشاط بتخفيض (١) شهر والباقي (٤) أشهر.
 تخفيض النشاط (ط): $1,000 = 1 \times 1,000$ إجمالي التخفيض (٢) شهر والباقي (٣) أشهر.
 تخفيض النشاط (و): $8,000 = 2 \times 4,000$ إجمالي التخفيض (٤) شهر والباقي (١) أشهر.
 تخفيض النشاط (أ): $4,500 = 1 \times 4,500$ لا ينقصنا سوى شهر واحد، والمتوفر لهذا النشاط شهران، ولكن سنستهلك شهر واحد فقط.

عليه فقد تم تخفيض الـ (٥) أشهر المطلوبة. وتكون إجمالي التكلفة هي حاصل جمع التكلفة السابقة:
 $14,000 = 4,500 + 8,000 + 1,000 + 500$.

أي أن... تكلفة المشروع بعد تخفيض المدة = مجموع تكاليف الإسراع + التكلفة الحالية للمشروع
إذا... تكلفة المشروع بعد تخفيض المدة = $252,300 = 238,300 + 14,000$
 انتهت المسألة.

<<<<<<< >>>>>>>>

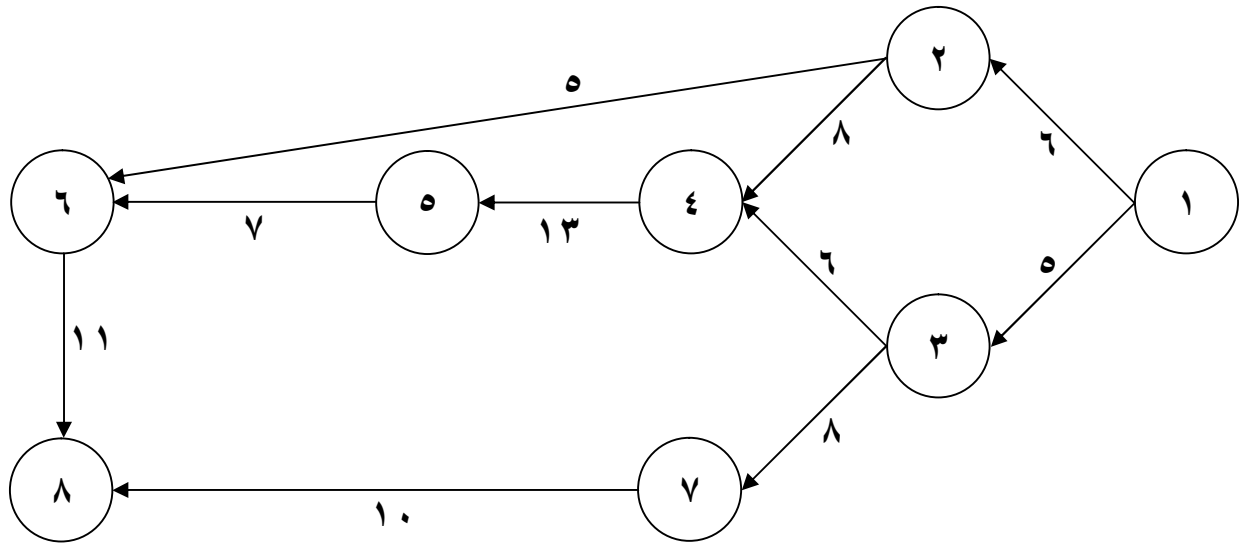
مثال (٢): يمثل الجدول التالي بيانات تنفيذ الأنشطة الرئيسية لأحد المشاريع الإنشائية، علماً بأن الزمن بالأسبوع والتكلفة بألف ريال.

التنفيذ المتسارع		التنفيذ العادي			
التكلفة	الوقت	التكلفة	الوقت	مسار النشاط	رمز النشاط
٦٥	٤	٤٥	٦	٢-١	(أ)
٨٠	٤	٦٠	٥	٣-١	(ب)
١٠٠	٧	٧٠	٨	٤-٢	(ج)
٤٥	٦	٤٥	٦	٤-٣	(د)
١٧٠	١٠	١٢٥	١٣	٥-٤	(هـ)
٧٤	٦	٦٠	٧	٦-٥	(و)
٢٢	٥	٢٢	٥	٦-٢	(ز)
١٧	٧	١٢	٨	٧-٣	(ح)
١١٠	١٠	٩٦	١١	٨-٦	(ط)
٩٠	٩	٨٠	١٠	٨-٧	(ي)

- المطلوب:**
- ١- رسم شبكة المشروع ووقت وتكلفة تنفيذ المشروع.
 - ٢- التكلفة الإضافية في حالة تخفيض وقت المشروع (٥) أسابيع.
 - ٣- أوجد الأوقات المبكرة والمتأخرة للنشاط (هـ).

الحل: يجب أولاً أن نقوم برسم شبكة الأعمال والتي ستسهل علينا فهم السؤال والتعامل معه:

(١) المسار الحرج.



الآن. ومن الشبكة أعلاه فإن عدد المسارات التي توصلنا من البداية إلى النهاية هي أربع مسارات فقط:

١. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٤) إلى (٥) إلى (٦) إلى (٨).
٢. مسار من (١) إلى (٢) إلى (٤) إلى (٥) إلى (٦) إلى (٨).
٣. مسار من (١) إلى (٣) إلى (٤) إلى (٥) إلى (٦) إلى (٨).
٤. مسار من (١) إلى (٧) إلى (٨).

الآن. نقوم بحساب كامل قيمة كل مسار من المسارات الأربعة المذكورة، وينتج عن ذلك:

$$\text{المسار (١-٢) (٢-٤) (٤-٥) (٥-٦) (٦-٨)} = ٦ + ٥ + ١١ + ٢٢$$

$$\text{المسار (٢-١) (١-٢) (٢-٤) (٤-٥) (٥-٦) (٦-٨)} = ٦ + ٥ + ١١ + ٢٢$$

$$\text{المسار (٣-١) (١-٣) (٣-٤) (٤-٥) (٥-٦) (٦-٨)} = ٥ + ٦ + ١٣ + ١١ + ٢٢$$

$$\text{المسار (٣-١) (١-٧) (٧-٨)} = ٥ + ٨ + ١٠ = ٢٣$$

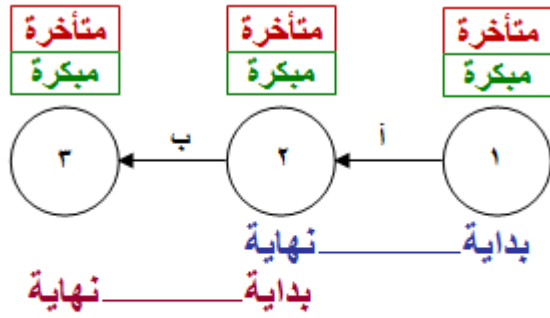
المسار الحرج: هو أطول المسارات التي تنهي زمن المشروع، وهو زمن المشروع = ٤٥ أسبوعاً.

التكلفة: وهي كامل تكلفة المشروع **ومن الخطأ** حساب التكلفة الكلية للمشروع على أساس المسار الحرج فقط، وعليه تكون التكلفة:

$$٤٥ + ٦٠ + ٧٠ + ٤٥ + ١٢٥ + ٦٠ + ٢٢ + ١٢ + ٩٦ + ٨٠ = ٦١٥ \text{ ألف ريال.}$$

(٢) الأوقات المبكرة والمتأخرة.

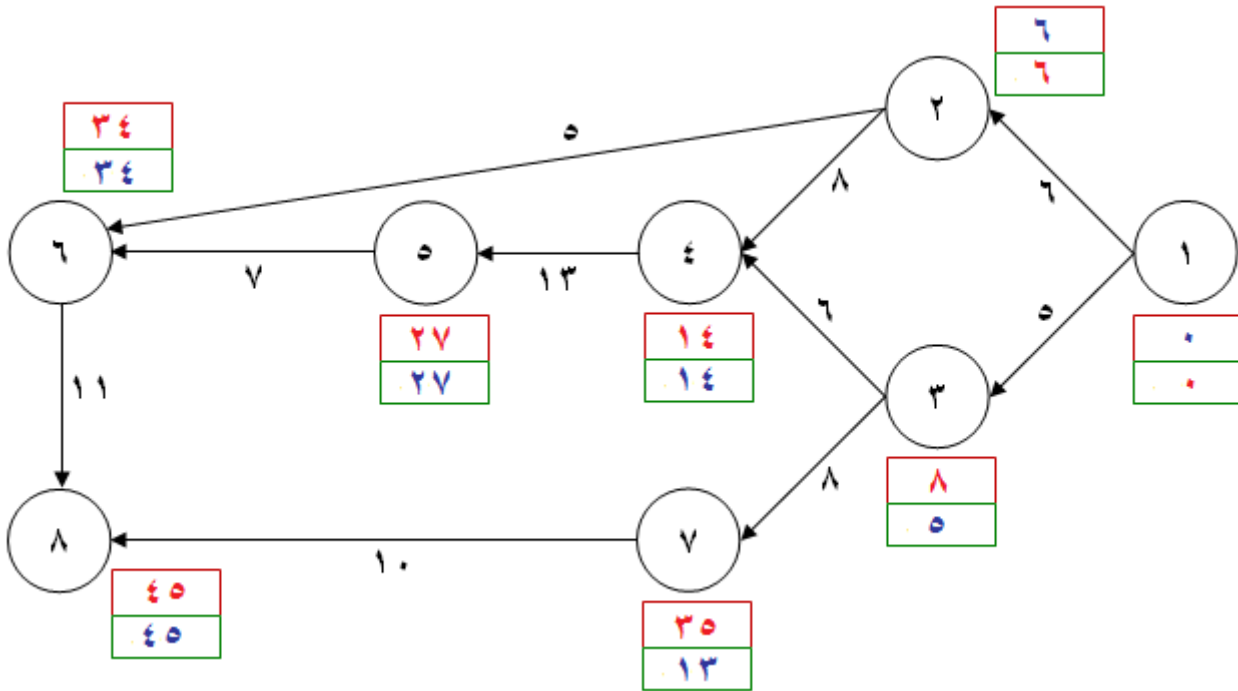
وفق القاعدة التالي:



تحسب البدايات أولاً ابتداءً من أول المشروع إلى نهايته

ثم تحسب النهاية بعد ذلك ابتداءً من آخر المشروع إلى أوله

نقوم بتحديد الأوقات المبكرة والمتأخرة لكل خلية (دائرة) حسب طريقة المبنى، وهي - كما أسلفنا - طريقة شرح فقط لا تستخدم في الإختبارات. وهي أيضاً طريقة مبسطة لاستخدام القوانين، فينتج لدينا:



وللتأكد فقط، فإنه يمكن حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة حسب القوانين التالية لجميع المسارات:

قاعدة: (بك) البداية المبكرة = وقت البداية المبكرة للنشاط (للأنشطة غير النشاط الأول) + الوقت الذي يستغرقه النشاط السابق.

قاعدة: (بخ) البداية المتأخرة = وقت الإنتهاء المبكر للمشروع بالكامل - الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط (وفي حالة وجود أكثر من وقت نهائي لذلك النشاط نأخذ أطولها).

قاعدة: (حك) النهاية المبكرة = الوقت المبكر لبداية النشاط + الوقت الذي يستغرقه ذلك النشاط المحدد.

قاعدة: (هخ) النهاية المتأخرة = وقت البداية المتأخرة للنشاط + وقت ذلك النشاط.

إذاً سيكون الجدول بعد إكمال بيانات على النحو التالي، مع الإحاطة بإمكانية الإستغناء عن الجدول والانتقال إلى المسار الحرج والذي سبق الوصول له ومن ثم حساب تكاليف التخفيض:

النشاط	(و) الوقت المقرر	(بك) البداية المبكرة	(بخ) البداية المتأخرة	(هك) النهاية المبكرة	(هخ) النهاية المتأخرة	(فك) الوقت الفائض
١-٢	٦	٠	٠	٦	٦	٠
١-٣	٥	٠	٠	٥	٨	٣
٢-٤	٨	٦	٦	١٤	١٤	٠
٣-٤	٦	٥	٨	١٤	١٤	٣
٤-٥	١٣	١٤	١٤	٢٧	٢٧	٠
٥-٦	٧	٢٧	٢٧	٣٤	٣٤	٠
٦-٢	٥	٦	٦	٣٤	٣٤	٢٣
٦-٣	٨	٥	٨	١٣	٣٥	٢٢
٨-٦	١١	٣٤	٣٤	٤٥	٤٥	٠
٨-٧	١٠	١٣	٣٥	٤٥	٤٥	٢٢

حيث تم استخراج الوقت الفائض (فك) بالطريقة التي سبق شرحها. وهذا يبين أن المسار الحرج الذي سبق الوصول إليه صحيح.

وبه يكون الأوقات المبكرة والمتأخرة للنشاط (هـ) هو للمسار (٥-٤) هي:
البداية المبكرة (١٤) البداية المتأخرة (١٤) النهاية المبكرة (٢٧) النهاية المتأخرة (٢٧).

(٣) التكلفة الإضافية في حالة تخفيض وقت المشروع (٥) أسابيع.

يجب أولاً تحديد إنحدار تكلفة كل مسار أنشطة المسار الحرج من الجدول الرئيسي للسؤال، ووفق القانون التالي والذي سبق بيانه:

$$\text{إنحدار التكلفة} = \frac{\text{تكلفة الإسراع} - \text{التكلفة العادية}}{\text{المدة العادية} - \text{المدة المخفضة}}$$

للمسار الحرج فقط

$$\begin{aligned} \text{إنحدار تكلفة النشاط (أ)} &= (٤٥ - ٦٥) \div (٤ - ٦) = ١٠ = \text{المتوفر (٢) أسبوعان.} \\ \text{إنحدار تكلفة النشاط (ج)} &= (٧٠ - ١٠٠) \div (٧ - ٨) = ٣٠ = \text{المتوفر (١) أسبوع.} \\ \text{إنحدار تكلفة النشاط (هـ)} &= (١٢٥ - ١٧٠) \div (١٠ - ١٣) = ١٥ = \text{المتوفر (٣) أسابيع.} \\ \text{إنحدار تكلفة النشاط (و)} &= (٦٠ - ٧٤) \div (٦ - ٧) = ١٤ = \text{المتوفر (١) أسبوع.} \\ \text{إنحدار تكلفة النشاط (ط)} &= (٩٦ - ١١٠) \div (١٠ - ١١) = ١٤ = \text{المتوفر (١) أسبوع.} \end{aligned}$$

ويكون ترتيبها ابتداءً بالأقل تكلفة إلى الأعلى تكلفة هي:

$$\text{إنحدار تكلفة النشاط (أ)} = (٤٥ - ٦٥) \div (٤ - ٦) = ١٠ = \text{المتوفر (٢) أسبوعان.}$$

$$\begin{aligned} \text{إندار تكلفة النشاط (و)} &= (٦٠ - ٧٤) \div (٦ - ٧) = ١٤ \\ \text{إندار تكلفة النشاط (ط)} &= (٩٦ - ١١٠) \div (١٠ - ١١) = ١٤ \\ \text{إندار تكلفة النشاط (هـ)} &= (١٢٥ - ١٧٠) \div (١٠ - ١٣) = ١٥ \\ \text{إندار تكلفة النشاط (ج)} &= (٧٠ - ١٠٠) \div (٧ - ٨) = ٣٠ \end{aligned}$$

المتوفر (١) أسبوع.
المتوفر (١) أسبوع.
المتوفر (٣) أسابيع.
المتوفر (١) أسبوع.

وبالتالي سنقوم بالبداية بأقلها تكلفة وصولاً إلى تخفيض المدة المطلوبة، وهذا يعني أن نخفض النشاط والنشاط (أ) أسبوعان وهما المتوفران فقط، النشاط (و) أسبوعاً، وهو المتوفر فقط. والنشاط (ط) أسبوعاً وهو المتوفر فقط، والنشاط (هـ) أسبوعاً واحداً من أصل ثلاث أسابيع متوفرة وذلك بسبب وصولنا إلى تخفيض المشروع إلى خمسة أسابيع.

ملاحظة: لو أردنا تخفيض المشروع إلى أقصى مدة ممكنة، فمن البيانات أعلاه يتبين لنا أنه بإمكاننا تخفيض المدة إلى (٨) أسابيع وهي مجموع الإنحادات السابقة.

كل تخفيض للمشروع، صاحبه زيادة في التكاليف وهي تساوي (مدة التخفيض × تكاليف مدة التخفيض).

التكلفة الإضافية المخفضة = أقل إنحادار تكلفة × المدة المتوفرة. ويكرر ذلك وصولاً إلى المدة المقررة فقط.

التكلفة الكلية للمشروع بعد التخفيض = تكلفة المشروع العادية + التكلفة الإضافية.

التكلفة الإضافية المخفضة في حالة تخفيض (٥) أسابيع:
 $(٢ \times ١٠) + (١ \times ١٤) + (١ \times ١٤) + (١ \times ١٥) = ٦٣$ ألف ريال.
 التكلفة الإجمالية بعد التخفيض (٥) أسابيع = $٦١٥ + ٦٣ = ٦٧٨$ ألف ريال
 انتهت المسألة.

◀◀◀◀◀◀ ▶▶▶▶▶▶▶

مثال (٣): ترغب شركة الحياة في خفض مدة إنجاز مشروعها إلى خمسة أشهر، ويبين الجدول التالي زمن وتكاليف الإسراع وزمن وتكاليف الإنجاز العادي

التنفيذ المتسارع		التنفيذ العادي		رمز النشاط
التكلفة	الوقت	التكلفة	الوقت	
١٨,٠٠٠	٣	٩,٠٠٠	٥	(أ)
٣٠,٠٠٠	٤	١٨,٠٠٠	٦	(ب)
٨,٠٠٠	٣	٤,٠٠٠	٤	(ج)
١,٢٠٠	٢	١,٠٠٠	٣	(د)
١,٥٠٠	٠	١,٠٠٠	١	(هـ)
٨,٣٠٠	٢	٣٠٠	٤	(و)
٢٦٠,٠٠٠	١٢	٢٠٠,٠٠٠	١٤	(ز)
٥,٠٠٠	١١	٣,٠٠٠	١٢	(ح)
٣,٠٠٠	١	٢,٠٠٠	٢	(ط)

المطلوب: أوجد التكاليف الإضافية إذا علمت أن المسار (أ - هـ - و - ز - ط) هو المسار الحرج.
الحل: نقوم بتطبيق القانون التالي للوصول إلى إنحدار المسار الحرج فقط:

$$\text{إنحدار التكلفة} = \frac{\text{تكلفة الإسراع - التكلفة العادية}}{\text{المدة العادية - المدة المخفضة}}$$

للمسار الحرج فقط

المتوفر (٢) شهران.	$4,500 = (3 - 5) \div (9,000 - 18,000) =$ (أ) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (١) شهر.	$500 = (0 - 1) \div (1,000 - 1,500) =$ (هـ) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (٢) شهران.	$4,000 = (2 - 4) \div (300 - 8,300) =$ (و) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (١) شهر.	$30,000 = (6 - 7) \div (200,000 - 260,000) =$ (ز) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (١) أسبوع.	$1,000 = (1 - 2) \div (2,000 - 3,000) =$ (ط) إنحدار تكلفة النشاط

ويكون ترتيبها ابتداءً بالأقل تكلفة إلى الأعلى تكلفة هي:

المتوفر (١) شهر.	$500 = (0 - 1) \div (1,000 - 1,500) =$ (هـ) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (١) أسبوع.	$1,000 = (1 - 2) \div (2,000 - 3,000) =$ (ط) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (٢) شهران.	$4,000 = (2 - 4) \div (300 - 8,300) =$ (و) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (٢) شهران.	$4,500 = (3 - 5) \div (9,000 - 18,000) =$ (أ) إنحدار تكلفة النشاط
المتوفر (١) شهر.	$30,000 = (6 - 7) \div (200,000 - 260,000) =$ (ز) إنحدار تكلفة النشاط

التكلفة الإضافية المخفضة في حالة تخفيض (٥) أشهر:

$$14,000 = (1 \times 4,500) + (2 \times 4,000) + (1 \times 1,000) + (1 \times 500)$$

$$\text{التكلفة الإجمالية بعد التخفيض (٥) أشهر} = 14,000 + 238,300 = 252,300 \text{ ريال}$$

انتهت المسألة.



طريقة بيرت (PERT)

ميزاتها.

أنها أقرب طريقة إلى الواقعية من الطرق الأولى السابق ذكرها، لأنها تبني على أمر محدد بعد استخراج وقت إنهاء المشروع.

ويبنى وقت إنجاز المشروع على:

١. الوقت التشاؤم. ويرمز له بالرمز (أ).
٢. الوقت الأكثر احتمالاً. ويرمز له بالرمز (ب).
٣. الوقت التفاؤل. ويرمز له بالرمز (ج).

ومنها يتم الخروج بالوقت المتوقع لكل نشاط على حدة. ومنها لكامل المشروع.

قوانين بيرت.

وهي ثلاثة قوانين، بإفترض أن:

- (أ) هو وقت التشاؤم.
- (ب) هو وقت الأكثر احتمالاً.
- (ج) هو وقت التفاؤل.

الوقت المتوقع = (أ) وقت التشاؤم + (ب) الوقت الأكثر احتمالاً + (ج) وقت التفاؤل، مقسوماً كله على (٦). أي أن: الوقت المتوقع = $\frac{أ + (ب \times ٤) + ج}{٦}$.

قانون التباين (سيجما تربيع) = مربع [(أ) وقت التشاؤم - (ج) وقت التفاؤل مقسوماً كله على (٦)]. أي أن: $\sigma^2 = \frac{[(أ - ج) \div ٦]^2}{٦}$.

قانون الانحراف المعياري للمسار الحرج = الجذر التربيعي لمجموع قانون التباين للأنشطة الحرجة فقط.

وسيوضح المثال التالي ذلك.

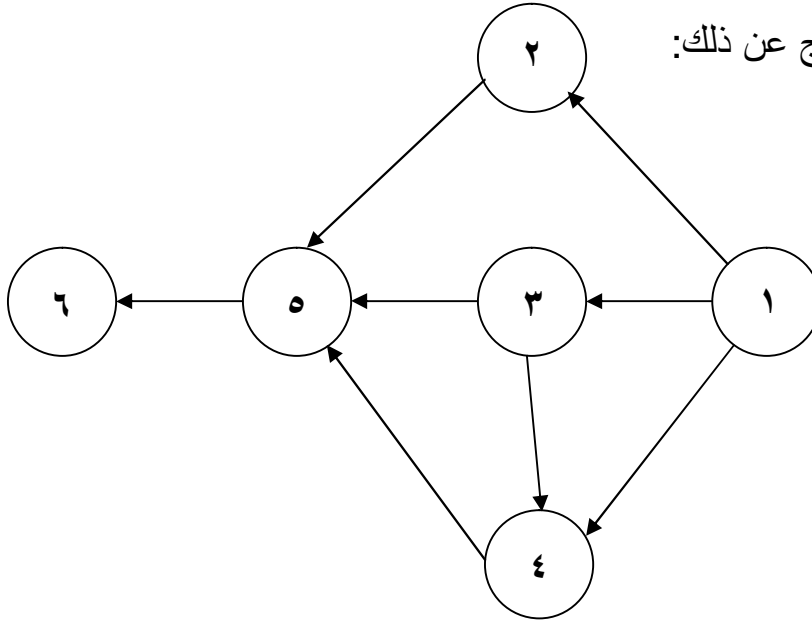
مثال (١): شركة لديها مشروع يتكون من عدة أنشطة، والجدول التالي يوضح الأنشطة ووقت التفاؤل ووقت التشاؤم.

المطلوب: استخراج قيمة الانحراف المعياري للمسار الحرج.

النشاط	الوقت الأكثر احتمالاً	وقت التفاؤل	وقت التشاؤم
٢-١	١٠	٦	١٤
٣-١	١٢	١٠	١٤
٤-١	١٦	١٢	٢٦
٥-٢	١٠	٨	١٢
٤-٣	٧	٤	١٠
٥-٣	٦	٤	٨
٥-٤	١٢	٨	١٦
٦-٥	٥	٣	٧

الحل:

نقوم أولاً برسم شبكة الأعمال، وينتج عن ذلك:



الآن... نقوم باستخراج الوقت المتوقع لك نشاط (مسار) وذلك باتباع القانون السابق:

$$\text{الوقت المتوقع} = [أ + (ب \times ٤) + ج] \div ٦$$

وحيث أن: (أ) = وقت التشاؤم (ب) = وقت الأكثر احتمالاً (ج) = وقت التفاؤل.

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٢-١)} = [١٠ + (١٠ \times ٤) + ٦] \div ٦ = ١٤ + ١٠ + ٦ \div ٦ = ٣,٣٣$$

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٣-١)} = [١٢ + (١٢ \times ٤) + ٦] \div ٦ = ١٤ + ٤٨ + ٦ \div ٦ = ١٢$$

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٤-١)} = [٢٦ + (١٦ \times ٤) + ٦] \div ٦ = ٢٦ + ٦٤ + ٦ \div ٦ = ١٧$$

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٥-٢)} = [١٢ + (١٠ \times ٤) + ٨] \div ٦ = ١٢ + ٤٠ + ٨ \div ٦ = ١٠$$

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٤-٣)} = [١٠ + (٧ \times ٤) + ٤] \div ٦ = ١٠ + ٢٨ + ٤ \div ٦ = ٧$$

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٥-٣)} = [٨ + (٦ \times ٤) + ٤] \div ٦ = ٨ + ٢٤ + ٤ \div ٦ = ٦$$

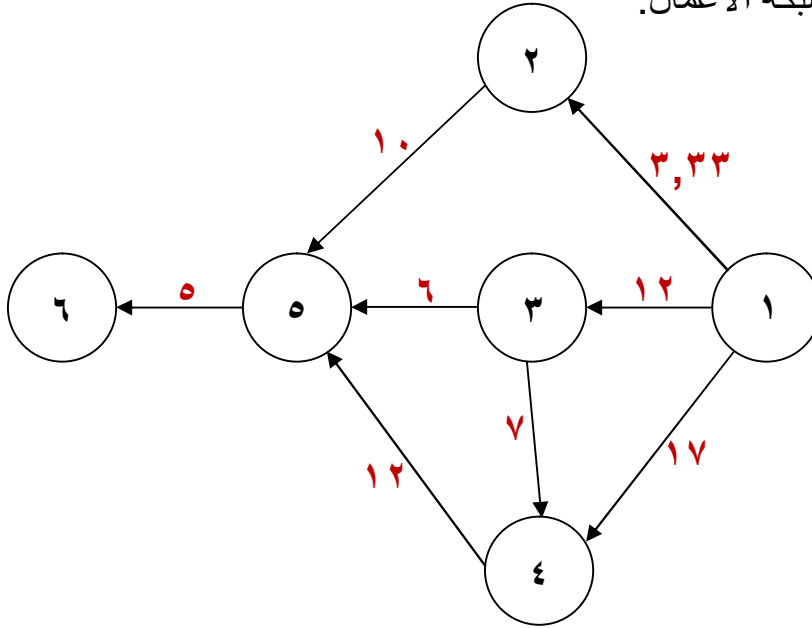
$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٥-٤)} = [١٦ + (١٢ \times ٤) + ٨] \div ٦ = ١٦ + ٤٨ + ٨ \div ٦ = ١٢$$

$$\text{الوقت المتوقع للنشاط (٦-٥)} = [٧ + (٥ \times ٤) + ٣] \div ٦ = ٧ + ٢٠ + ٣ \div ٦ = ٥$$

نقوم الآن... بإضافة هذه القيم إلى الجدول السابق، فينتج لدينا:

النشاط	الوقت الأكثر احتمالاً	وقت التفاؤل	وقت التشاؤم	الوقت المتوقع
٢-١	١٠	٦	١٤	٣,٣٣
٣-١	١٢	١٠	١٤	١٢
٤-١	١٦	١٢	٢٦	١٧
٥-٢	١٠	٨	١٢	١٠
٤-٣	٧	٤	١٠	٧
٥-٣	٦	٤	٨	٦
٥-٤	١٢	٨	١٦	١٢
٦-٥	٥	٣	٧	٥

نقوم الآن... بإضافة هذه القيم إلى شبكة الأعمال:



نقوم الآن... بحساب وعد المسارات في الشبكة، وينتج عن ذلك:

- المسار (١): ٦ - ٥ - ٢ - ١
 المسار (٢): ٦ - ٥ - ٤ - ١
 المسار (٣): ٦ - ٥ - ٣ - ١
 المسار (٤): ٦ - ٥ - ٤ - ٣ - ١

ولا يوجد مسارات أخرى غيرها في الشبكة الموضحة. وبحساب قيمة تلك المسارات ينتج لدينا:

$$\text{المسار (١): } ١٨, ٤٤ = ٥ + ١٠ + ٣, ٣٣$$

$$\text{المسار (٢): } ٣٤ = ٥ + ١٢ + ١٧$$

$$\text{المسار (٣): } ٢٣ = ٥ + ٦ + ١٢$$

$$\text{المسار (٤): } ٣٦ = ٥ + ١٢ + ٧ + ١٢ \rightarrow \text{(قيمة المسار الحرج)}$$

نقوم الآن باستخراج قيمة **قانون التباين للمسارات الخاصة بالسماز الحرج فقط**، أي المسار (٣-١) و(٤-٣) و(٥-٤) و(٦-٥) فقط، لأنها مسارات المسار الحرج، وذلك وفق القانون:

$$\text{سيجما تربيع } (6) = \text{مربع } [(٦ \div (ج - أ))] = [(٦ \div (ج - أ))]$$

$$\text{المسار (٣-١): } ٠, ٤٣٥ = {}^٢[٠, ٦٦] = {}^٢[٦ \div ٤] = {}^٢[٦ \div (١٠ - ١٤)] = {}^٢(6) \leq$$

$$\text{المسار (٤-٣): } ١ = {}^٢[١] = {}^٢[٦ \div ٦] = {}^٢[٦ \div (٤ - ١٠)] = {}^٢(6) \leq$$

$$\text{المسار (٥-٤): } ١, ٧٦٨ = {}^٢[١, ٣٣] = {}^٢[٦ \div ٨] = {}^٢[٦ \div (٨ - ١٦)] = {}^٢(6) \leq$$

$$\text{المسار (٦-٥): } ٠, ٤٣٥ = {}^٢[٠, ٦٦] = {}^٢[٦ \div ٤] = {}^٢[٦ \div (٣ - ٧)] = {}^٢(6) \leq$$

نقوم الآن... بإضافة هذه القيم الجدول السابق في عمود مستقل باسم (التباين) وينتج لدينا:

النشاط	الوقت الأكثر احتمالاً	وقت التفاؤل	وقت التشاؤم	الوقت المتوقع	التباين
٢-١	١٠	٦	١٤	٣,٣٣	-
٣-١	١٢	١٠	١٤	١٢	٠,٤٣٥
٤-١	١٦	١٢	٢٦	١٧	-
٥-٢	١٠	٨	١٢	١٠	-
٤-٣	٧	٤	١٠	٧	١
٥-٣	٦	٤	٨	٦	-
٥-٤	١٢	٨	١٦	١٢	١,٧٦٨
٦-٥	٥	٣	٧	٥	٠,٤٣٥

نقوم الآن باستخراج قيمة **الانحراف المعياري للمسار الحرج**، وذلك وفق القانون:

الجذر التربيعي لمجموع قانون التباين للأنشطة الحرجة فقط.

أي... الجذر التربيعي لمجموع القيم التي تم استخراجها سابقاً، وينتج عن ذلك:

$$\text{الانحراف المعياري للمسار الحرج} = \text{الجذر التربيعي لـ } (٠,٤٣٥ + ١,٧٦٨ + ١ + ٠,٤٣٥) \\ = \text{الجذر التربيعي لـ } (٣,٦٣٨) = ١,٩٢٣$$

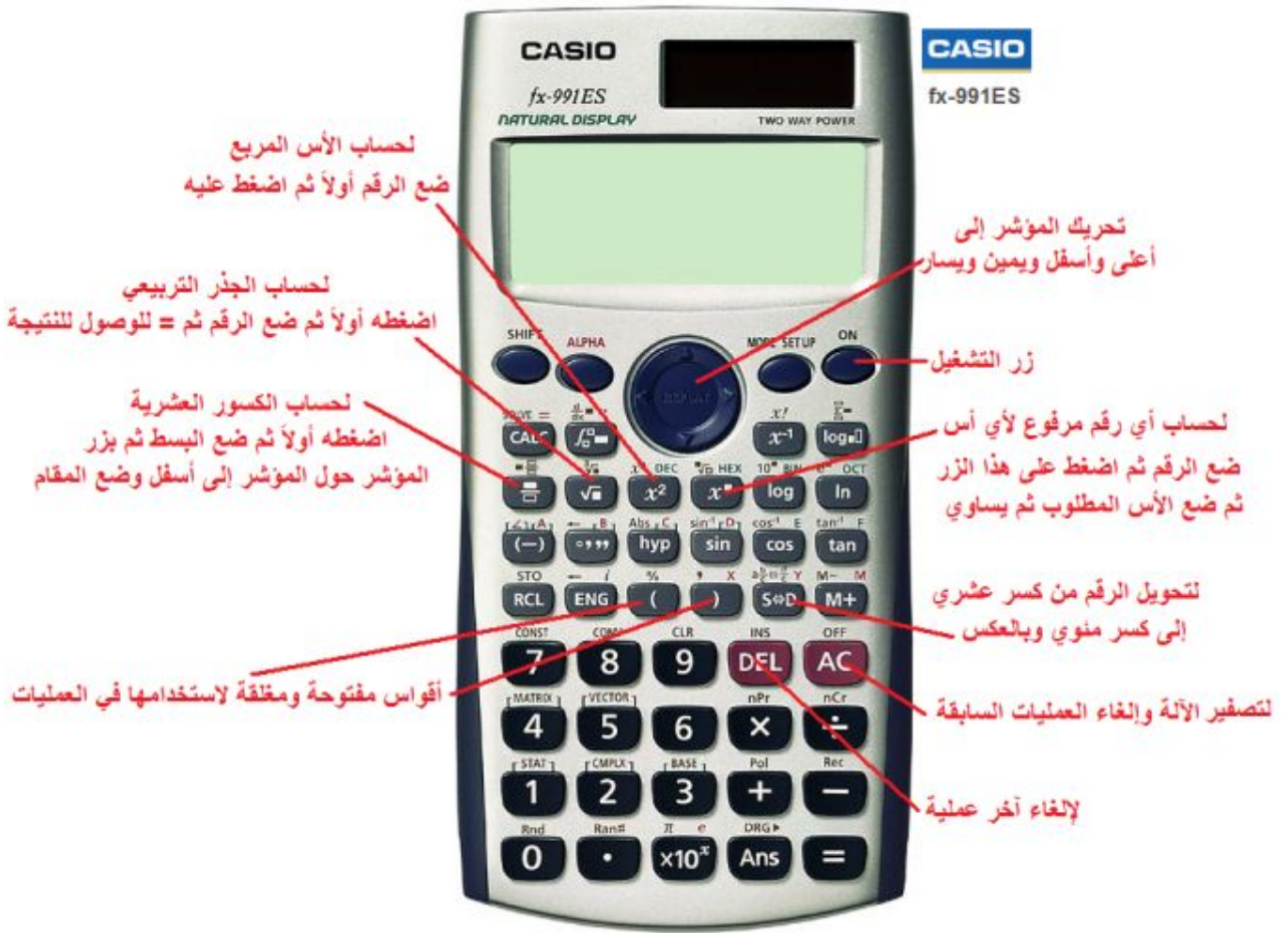
◀◀◀◀◀◀ ▶▶▶▶▶▶▶▶

بهذا ينتهي شرح كامل المقرر الجامعي بحوث العمليات (PAD-351)

وهو الشرح المتطابق والمتوافق تماماً مع ما قدمه سعادة الدكتور محمد توفيق الإدريسي جزاه الله بالخير كله، وذلك في الدورة التأهيلية الجامعية الأولى التي عقدت في الفترة من (١٠) وحتى (٢١) من جمادى الأولى ١٤٣١ هـ، وعلى الطالب والطالبة معرفة أن هناك طرق عدة يتم بها حل مسائل بحوث العمليات، وأن ما قدم في هذه المذكرة هو ما قام بشرحه الدكتور محمد الإدريسي. ولذا فقد يجد الطالب والطالبة مذكرات أخرى بشروح مختلفة، ولهم أن يختاروا الطريقة التي تناسب معهم وتتوافق مع ما قرره أستاذه في هذا المقرر الجامعي. والله ولي التوفيق.

**كافة أعمالنا الخاصة بالملخصات الجامعية مجانية وموقوفة لله تعالى
وكل مكتبة أو دار نشر أو فرد أو جهة تقوم ببيعها فإنها ستعرض
نفسها للمقاضاة والمحاسبة وفرض أقصى حدود العقوبات عليها**

أفضل آلة حاسبة يمكن استخدامها في العمليات الحسابية



تعود دائماً في العمليات التي تحتوي على ضرب أو قسمة مع الجمع أو الطرح أن تنهي عمليات الضرب والقسمة أولاً ثم تقوم بإكمال الحساب

انتهى العمل بالمذكرة الشارحة لكامل المقرر الجامعي بحوث العمليات (PAD-351)

القسم العملي للمقرر الجامعي

وهي متوافقة مع ما جاء في الشرح الخاص بالمقرر في الدورة التأهيلية
مع العديد من الإضافات التي وضعت لشرح المقرر وتبسيطه
ويليها القسم النظري للمقرر الجامعي

نرجو من الله تعالى التوفيق والنجاح للجميع وأن يشملنا
دعائكم الصالح لنا ولمن وهب أجر هذا العمل لهم في ظهر الغيب
والمساهمة في نشر هذا العمل في كل مكان

إعداد وشرح: حسان علي الطيار
(KsaUvi@GMail.Com)

للملاحظات والإقتراحات يرجى الإتصال بنا على الجوال رقم: ٠٥٠٦٦٣٣٧٦٠

١٤٣١ هـ / ٢٠١٠ م

تنبيه

هذه المذكرة هي للمساعدة في فهم واستدراك كامل العمليات الرياضية للمقرر الجامعي وعلى
الطالب والطالبة العودة إلى المذكرة الثانية للمقرر والخاصة بالقسم النظري وكذلك العودة
للكتاب المقرر للإطلاع عليه مع ضرورة الإكثار من حل المسائل الحسابية الموجودة في المقرر

هذا الجهد وقف لله تعالى لا يجوز بيعه أو الاتجار به، وهو حق لكل مسلم ومسلمة وطالب وطالبة علم