

PRÉKOPA ANDRÁS

**VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET
MŰSZAKI
ALKALMAZÁSOKKAL**

HARMADIK KIADÁS

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1974

Lektorálta

DR. MEDGYESSY PÁL,
a matematikai tudományok kandidátusa

© Prékopa András 1962

ETO 519.2

ISBN 963 10 0575 5 (2. vált. kiad.)

Felelős kiadó: Solt Sándor

Felelős szerkesztő: Vas Györgyné okl. alk. matematikus

Műszaki vezető: Hegedűs Ernő - Műszaki szerkesztő: Mózer István

A könyv formátuma: Fr5 - Ívterjedelme: 22 (A5) - Ábrák száma: 68

Példányszám: 3600 - Papír minősége 80 g-os ofszet

Azonossági szám: 60 666 - MŰ: 1982 — k — 7477

Készült az MSZ 5601-59 és 5602-55 szerint íves ofszet eljárással

Borsod megyei Nyomdaipari Vállalat, Miskolc
1974 — 3949 — Felelős vezető: Szemes István

Ez a könyv rövid bevezetés a valószínűség matematikai elméletébe.

Mindjárt előljáróban meg kell jegyeznem, hogy valószínűségelméleten pontosan azt a matematikai tudományágat értem, amit valószínűségszámításnak is neveznek. A „valószínűségszámítás” szó azonban nem fejezi ki eléggé e tudományág mai arculatát. Évekkel ezelőtt a „valószínűségszámítás” kifejezés megfelelői helyett valamennyi világnyelven írt szakirodalomban áttértek a „valószínűségelmélet”, „a valószínűség elmélete” kifejezések megfelelőinek használatára. Ezt is figyelembe véve, a könyvben az újabb elnevezéseket választottam.

A valószínűségelméletnek kb. háromszáz éves múltja van. Ez a ma már rendkívül fejlett és igen sok fontos területen alkalmazható tudományág meglehetősen méltatlan körülmények között született. A XVII. század közepe táján, elsősorban Franciaországban a szerencsejátékok igen népszerűek voltak. Mivel általában nagy összegekről volt szó, felvetődött a nyerési esély meghatározásának problémája. Az akkori idők egyik közismert szerencsejátékosának, DE MÉRÉ lovagnak támadt az a gondolata, hogy problémáival a zseniális matematikushoz, BLAISE PASCALHOZ forduljon. PASCAL, aki ebben az időben Párizsban élt, levelezni kezdett e kérdésről más matematikusokkal, elsősorban PIERRE FERMAT-val, aki Toulouse-ban élt. Ez a levelezés indította el a valószínűség matematikai

elméletének kiépítését, ezért PASCAL és FERMAT tekinthetők e tudományág megalapítóinak.

Bár a valószínűségelmélet később rendszeresen felépített tudománnyá vált, szigorú matematikai megalapozást csak 1933-ban kapott. Ez a megalapozás A. N. KOLMOGOROV-tól származik, és ma már általánosan elfogadott. Korábban is, később is, a KOLMOGOROV-elmélettől eltérő, más megalapozások láttak napvilágot. Közülük R. VON MISESé a legismertebb. Sem ez, sem a többi nem vehette fel a versenyt a KOLMOGOROV-elmélettel, mely a valószínűségelméleti problémák mind matematikai, mind gyakorlati szempontból legvilágosabb és legkevésbé bonyolult tárgyalásmódja. A könyv tartalmazza a KOLMOGOROV-féle megalapozás lényegének ismertetését, meggyőződésem ui., hogy ez a megalapozás nem csupán elméleti szempontból jelentős, hanem gyakorlati segítséget is nyújt, mert az egyes problémák logikusan felépített tárgyalásmenetével elősegíti a tájékozódást gyakorlati kérdésekben. A többi elmélet kritikájára nem térek ki.

A valószínűségelmélet alkalmazási területe ma már rendkívül kiterjedt. Ide tartozik a technika, fizika, kémia, csillagászat, meteorológia, biológia, pszichológia, közgazdaságtan, nyelvészet stb. Ezen túlmenően valószínűségelméleti problémákkal találkozunk az élet más területein is, mindenütt, ahol a véletlennek szerepe van. A valószínűségelmélet tárja fel a véletlenben levő törvényszerűségeket és erre támaszkodva utasítást ad, hogyan kell a véletlen ellenében egyes konkrét esetekben eljárunk.

Ezzel kapcsolatban tisztáznunk kell a véletlen fogalmát. Ha azt mondjuk, hogy egy jelenség véletlenszerű, ezen nem azt értjük, hogy annak, ami végbemegy, nincs oka. Oka min-

dennek van, csupán arról lehet szó, hogy ez számunkra részben ismeretlen. Pontosabban fogalmazva: minden jelenséget az okok (körülmények, feltételek) egy bizonyos rendszere hoz létre. Ha ezeket mind figyelembe vesszük, ill. figyelembe tudnánk venni, akkor a jelenség lefolyása egyértelmű volna. Ha azonban a körülményeknek csak egy részét vesszük figyelembe, akkor az eredmény nem egyértelmű. Ez utóbbi esetben a jelenséget véletlenszerűnek nevezzük. Lássunk egy egyszerű példát. Ha egy pénzdarabot feldobunk, és figyelembe vennénk, hogy milyen helyzetben volt, milyen impulzust kapott, milyen a légáramlás stb., akkor meg tudnánk mondani, hogy a dobás eredménye fej vagy írás, sőt még azt is, hogy hová esik le. Ha azonban csak azt vesszük figyelembe, hogy a pénzdarabot feldobtuk, vagyis hogy impulzust kapott, és figyelmen kívül hagyjuk már nagyságát is a többi körülménnyel együtt, akkor a dobás eredménye lehet fej is, írás is, és a jelenség véletlenszerű.

Egy jelenség véletlenszerűsége tehát speciális szemléletmódkban áll. Ennek ellenére, amikor bizonyos körülményeket nem veszünk figyelembe, nem járhatunk el egészen önkényesen. Ha azt akarjuk, hogy valószínűségelméleti módszereinket eredményesen tudjuk alkalmazni, akkor a figyelembe nem vett körülményeknek egyenként aránylag kis hatásúaknak kell lenniök. Egy lényeges körülmény figyelmen kívül hagyása esetén a valószínűségelmélet módszerei sem segítenek, az eredmény távol áll attól, hogy a tudományos igényt kielégítse.

A valószínűségelmélet jelentősége nem annyi csupán, hogy a sok, egyenként kis hatású körülmény jelenlétének ellenére lehetőséget nyújt a probléma tárgyalására, hanem e körülmények megismerését (hacsak más szempontból nem fontosak)

szükségtelemmé teszi. Ezen túlmenően, egyes esetekben mi magunk mesterségesen véletlenszerűvé teszünk egy kísérletet, mert így a valószínűségelmélet módszereit felhasználhatjuk, és gyakorlatilag megbízható, kevésbé költséges eljárást nyerünk problémáink megoldására. Így járunk el pl. a statisztikai minőségellenőrzéskor, amikor egy-egy tételből véletlenszerűen választunk ki aránylag kevés számú egyedet, hogy ezáltal az egészre következtessünk, ahelyett, hogy teljeskörű minőségellenőrzést végeznénk. Ez az alapgondolat sok más vonatkozásban is felhasználható.

A könyv megértéséhez ismerni kell az egy- és többváltozós analízis elemeit, továbbá a mátrixokat és a determinánsokat, de ez nem több, mint amennyit bármelyik mérnökhallgatónak az egyetemen tanulnia kell.

Az elméleti anyagot általában példákkal illusztráltam. Nem volt és nem is lehetett célom, hogy ezzel a valószínűségelméletnek akár csak a legfontosabb alkalmazásaira is mindre kitérjek. A példák elsősorban műszaki, kémiai és fizikai jellegűek. Ennek ellenére úgy gondolom, hogy a könyvet előnyösen használhatják a többi szakterület művelői is.

Köszönetet mondok DR. MEDGYESSY PÁLnak, aki a kézirat gondos átnézésével és hasznos tanácsaival segítette munkámat, mindazoknak, akik a példaanyag összeválogatásában segítségemre voltak, és a MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ dolgozóinak a kézirattal kapcsolatos fáradságos és türelmes munkájukért.

BUDAPEST, 1961. december hó

A SZERZŐ

A VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET ALAPJAI

Az esemény matematikai fogalma

A valószínűség matematikai fogalma

Valószínűségek meghatározása kombinatorikai módszerekkel

Valószínűségek meghatározása geometriai módszerekkel

1.1. Véletlen kísérlet. Minden valószínűségelméleti probléma valamely *véletlen kísérlettel* kapcsolatos. A „kísérlet” szót itt általánosabb értelemben használjuk. Kísérletnek nem csupán egy jelenség mesterséges előállítását nevezzük, hanem általában egy jelenség megfigyelését, függetlenül attól, hogy azt mi vagy rajtunk kívül álló okok hozták létre. Az előszóban mondottakkal összhangban, *véletlen kísérleten olyan kísérletet értünk, amelynek kimenetelét az általunk figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen.* Véletlen kísérlet pl. egy folyó vízállásának megfigyelése egy meghatározott helyen és időpontban; az átlagos napi középhőmérséklet megfigyelése egy meghatározott napon; egy útvonal forgalmának megfigyelése meghatározott napon; minőségellenőrzés alkalmával bizonyos termékek közül meghatározott számú termék kiválasztása; egy könyv valamely oldalának felütése; egy kocka feldobása stb. Továbbiakban a rövidség kedvéért a véletlen kísérletet egyszerűen csak *kísérletnek* nevezzük. Ebből félreértés nem származhatik, minthogy e könyv keretein belül csak véletlen kísérletekkel foglalkozunk.

Minden kísérletnek van tehát több, esetleg végtelen sok lehetséges kimenetele. Ha pl. a kísérlet abban áll, hogy 100 munkadarab közül hármat kiválasztunk, akkor mivel ez

$$\binom{100}{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700$$

különböző módon tehető meg, a kísérletnek 161 700 különböző lehetséges kimenetele van. Egy folyó vízállásának megfigyelése

esetén a kísérletnek annyi kimenetele van, mint ahány különböző vizállás elképzelhető, tehát 0 és egy ésszerű M felső határ között bármilyen pozitív szám. Bár a gyakorlatban a vizállást centiméterekben mérjük, a centiméter tört részét nem írjuk ki, sok esetben ennek nincs is értelme, elvben mégis minden 0 és M közé eső értéket a kísérlet lehetséges kimenetelének tekintünk, mert ez megkönnyíti a probléma matematikai vizsgálatát. Ugyanez a helyzet az átlagos napi középhőmérséklet megfigyelése esetén is. Egy izzólámpa élettartamának vizsgálatában a kísérletnek annyi kimenetele van, mint amennyi élettartam elképzelhető, tehát 0 és végtelen között bármilyen pozitív szám. Egy ésszerű felső határ természetesen itt is van, tetszőleges hosszú élettartam megengedése azonban matematikai szempontból ismét egyszerűsítést jelent. Egy könyv egy oldalának véletlenszerű felütése esetén a kísérletnek annyi kimenetele van, mint ahány oldala van a könyvnek. Egy kocka feldobása esetén a kísérletnek 6, két kocka feldobása esetén a kísérletnek 36 különböző kimenetele van.

Előfordulnak bonyolultabb kísérletek is. Ha pl. a kísérlet abban áll, hogy egy elektroncső anódáramingadozását egy meghatározott időszakaszon megfigyeljük, és az áramerősség időbeli változását alkalmas műszerrel papíron regisztráljuk, akkor egy nem-negatív értékű függvény görbét kapjuk. Mármint a kapott konkrét függvény helyett sok kis, általunk számításba nem vett tényező hatásaképpen másikat is kaphattunk volna. Ezeket az összes lehetséges függvényeket egyetlen halmazba összefoglalva, a kísérlet összes lehetséges kimeneteleit, végeredményeit kapjuk. Szigorúan véve itt az történik, hogy a katódról elektronok érkeznek az anódra, mindegyik áramot vált ki, és ezek összegeződnek. Tegyük fel, hogy az egy elektron által létrehozott áramerősséget a $g(t)$ függvény írja le, olyan értelemben, hogy ha az elektron a $t=0$ időpontban ütközik az anódra, akkor egy t időpontban az általa kiváltott áram erőssége $g(t)$. Ha most a jelenséget a 0-tól T -ig terjedő időszakaszon vizsgáljuk, és egy konkrét esetben az egyes elektronok a t_1, t_2, \dots, t_n időpontokban ütköztek az anód-

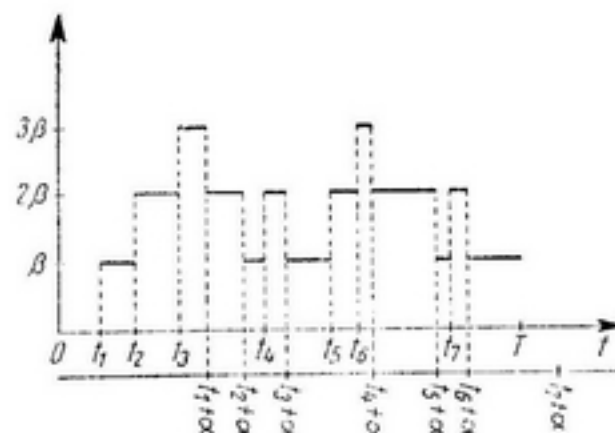
ba, akkor a t időpontbeli áramot a

$$h(t) = \sum_{k=1}^n g(t-t_k) \quad (1.1.1)$$

függvény adja meg. Egy ilyen függvény a kísérlet egy konkrét kimenetelének tekinthető. A

$$g(t) = \begin{cases} \beta, & \text{ha } 0 \leq t \leq \alpha \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

esetben egy konkrét $h(t)$ függvényt az 1. ábrán láthatunk.



1. ábra

Ennek a függvénynek a t_k pontokban szakadásai vannak, a függvény alakja sem lehet akármilyen, csak amilyen a $g(t)$ függvény és a t_k időpontok specializálása következtében létrejöhet.

Ha a kísérletnek véges sok és nem is nagyszámú kimenetele lehetséges, akkor elég sok kísérlet esetén általában ezek realizálódnak, konkrétan megvalósulnak. Ha azonban a kísérletnek végtelen sok kimenetele van, közülük csak véges sok realizálódhat, egyesek tehát soha nem jönnek létre. (Természetesen ugyanez a helyzet előállhat akkor is, ha kísérletünknek véges sok kimenetele van, mégpedig vagy azért, mert ezek száma

eléggé nagy, vagy mert konkrét megvalósításuk számunkra érdektelen.) Egy fizikai mennyiséget pl. tízszer megmérve, az összes lehetséges mérési eredmények közül tíz realizálódik, ettől függetlenül a többi is gondolatban számontartjuk, mint a lehetséges kimenetek összességét.

Valamely kísérlettel kapcsolatban a kísérlet lehetséges kimeneteleit elemi eseményeknek nevezzük. A matematikai elméletek azonban, bármire vonatkozzanak is, nem foglalkoznak közvetlenül azokkal a dolgokkal, amelyekre elméletünket alkalmazzuk, amelyek tehát a konkrét gyakorlatban előfordulnak. Ezeket absztrakt elemekkel helyettesítve, megalkotjuk elméletünket, majd az elmélet keretein belül elért eredményeinket interpretáljuk, lefordítjuk a gyakorlat nyelvére. Ennek megfelelően a kísérlet egyes kimeneteleit absztrakt matematikai objektumokkal helyettesítjük, jellemezzük és ezeket tekintjük elemi eseményeknek. Amikor tehát konstatáljuk, hogy az átlagos napi hőmérséklet 18°C , akkor csak a 18-as számot tartjuk meg, és elvonatkoztatunk minden egyébtől; az elemi esemény számunkra csupán ez a számérték. Az anódáramingadozás esetében egy elemi esemény csak a konkrét $h(t)$ függvény és nem a $h(t)$ függvény, létrejöttének körülményeivel együtt. A kockadobás esetén az elemi események az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok és nem a konkrét dobások. Elemi események tehát akkor is léteznek, ha a kísérletet nem hajtjuk végre. Az „esemény” szó csupán a fogalom eredetére utal. *Az elemi események összességét eseménytérnek nevezzük*, és ezt a továbbiakban mindig Ω -val jelöljük. Az elemi események jelölésére index nélküli vagy indexszel ellátott ω -t, de esetleg kis latin betűket is használunk.

Hogy egy kísérlettel kapcsolatban mit tekintünk eseménytérnek, az elemi események összességének, bizonyos fókig önkényes, mégpedig két szempontból is. Egyrészt több, valójában különböző kimenetel között nem teszünk különbséget, ha ez számunkra érdektelen. Pl. kockadobás esetén nem vesszük figyelembe, hogy a kocka hova esett, csak azt, hogy mi a dobott szám. Másrészt önkényes azoknak az absztrakt matematikai objektumoknak a megválasztása is, melyek a kísérlet vég-

eredményeit jellemzik. Ismét a kockadobást említve illusztratív példaként, az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok dobásait jellemezhetnénk a 11, 12, 13, 14, 15, 16 számokkal vagy más matematikai objektumokkal is. A lényeg, hogy a valóságot a legtermészetesebb, legegyszerűbb és problémánkhoz legjobban igazodó módon leírjuk. Ezek a követelmények az önkényességet nagymértékben korlátozzák, sőt többnyire egyértelművé teszik, hogy mit a legcélszerűbb eseménytérnek tekintenünk.

1.2. Véletlen események. Egy kísérlettel kapcsolatban az elemi eseményeken kívül más eseményeket is megfogalmazhatunk. Ilyen pl. az, hogy egy fizikai mérés eredménye 1,5 és 2,3 közé esik, vagy a Duna vízállása 1961. június 10-én 12^h-kor nagyobb, mint 300 cm, a kockával páros számot dobunk, egy könyvet olyan oldalon ütünk fel, ahol ábra van, egy villanyégő élettartama 500 és 1000 óra közé esik, egy elektroncső anódárama adott t időpontban kisebb x -nél stb. Minden ilyen esemény az elemi események valamely halmazával reprezentálható. Ugyanazt az eseményt, hogy a kockával páros számot dobunk, másképpen úgy is leírhatjuk, hogy megadjuk az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$ halmaz $\{2, 4, 6\}$ részhalmazát. Így más nyelvezettel, de mégis félreérthetetlenül körülhatárolhatjuk eseményünket. Az az esemény, hogy egy fizikai mérés eredménye 1,5 és 2,3 közé esik, megfogalmazható oly módon is, hogy egyszerűen megadjuk az elemi események — az összes mérési eredmények — halmazának azt a részhalmazát, amelyet az összes eredményként kapható számértékek közül az 1,5 és 2,3 közé eső számok alkotnak. Ez, másképpen kifejezve, az 1,5 és 2,3 határpontokkal bíró intervallum. Az az esemény, hogy az anódáram a t időpontban x -nél kisebb, ekvivalens azzal, hogy azoknak az (1.1.1) alakú függvényeknek a halmazát vizsgáljuk, amelyekre teljesül a

$$h(t) < x$$

feltétel.

A kísérlet konkrét végrehajtása esetén egy eseményt akkor tekintünk bekövetkezettnek, ha a kísérlet végeredménye — a konkrét elemi esemény — eleme a szóbanforgó eseménytérrepre-

zentáló halmaznak. Ha a kockadobás eredménye 4, akkor bekövetkezett az az esemény, hogy páros számot dobunk, a 4 szám ugyanis eleme a $\{2, 4, 6\}$ halmaznak. (Ezzel egyidejűleg természetesen több más esemény is bekövetkezett.)

Matematikailag egy lehetséges esemény nem más, mint az elemi események Ω halmazának, az eseménytérnek egy részhalmaza. Ezeket az eseményeket lehetséges véletlen eseményeknek, vagy röviden lehetséges eseményeknek nevezzük, és a továbbiakban az A, B, C, \dots , esetleg indexszel ellátott latin nagybetűkkel jelöljük. Az elemi események is felfoghatók lehetséges eseményeként, ezeket az Ω eseménytér egyelemű részhalmazai reprezentálják. Az Ω tér részhalmazait ezentúl — bár fogalmilag halmazok — eseményeknek nevezzük. Az események között kitüntetett szerepe van az Ω halmaznak, mint önmaga minden elemét tartalmazó nem-valódi részhalmaznak és az O üres halmaznak, melyet minden halmaz részhalmazának tekintünk. Az előbbi biztos eseménynek, az utóbbit lehetetlen eseménynek nevezzük, annak megfelelően, hogy az előbbi biztosan bekövetkezik, hiszen akármi legyen is a kísérlet eredménye, az mindig eleme Ω -nak, de nem lehet eleme az üres halmaznak, amely definíció szerint nem tartalmaz elemet.

Ha Ω véges sok elemet tartalmaz, akkor véges sok részhalmaza van, az összes események száma tehát véges. Az alábbiakban egy példával kapcsolatban felsoroljuk az összes eseményt. Egy urnában 4 golyó van, melyek az 1, 2, 3, 4 számokkal meg vannak számozva. Ha a kísérlet abban áll, hogy a 4 golyó közül egyet kihúzzunk, akkor az eseménytér $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Az összes események a következők:

	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
O	$\{2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$	$\{1, 2, 4\}$	
	$\{3\}$	$\{1, 4\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 3, 4\}$	
	$\{4\}$			$\{2, 3, 4\}$	

Az összes események száma 16.

Általában, ha Ω pontosan n elemet tartalmaz, akkor az összes események száma 2^n . Ugyanis olyan esemény, mely pontosan k elemet tartalmaz ($1 \leq k \leq n$), ugyanannyi van, mint ahány k -adosztályú kombinációja van n különböző elemnek. Ez a szám $\binom{n}{k}$. Ha ezt k -ra össze-

gezzük 1-től n -ig, és a kapott számhoz 1-et hozzáadunk, mert van még egy lehetetlen eseményünk is, megkapjuk az összes események számát. Figyelembe véve, hogy minden n esetén

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

az összes események számaként a következő adódik:

$$1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Az előbbi példában $n=4$ és az összes események száma $2^4 = 16$.

1.3. Műveletek eseményekkel. Az 1. függelékben definiáltuk halmazok összegét és szorzatát. Mivel egy esemény azonos egy halmazzal, ilyen értelemben beszélhetünk események összegéről és szorzatáról, melyek szintén halmazok, ennél fogva események. Ha A és B két esemény, akkor az $A+B$ és AB eseményeknek egyszerű szemléletes jelentésük van. $A+B$ azt jelenti, hogy a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik, mert az $A+B$ halmaz az A és B halmazok egyesítése és így egy elemi esemény, mely $A+B$ -nek eleme, A és B közül legalább az egyiknek eleme kell, hogy legyen. Ugyanígy AB azt jelenti, hogy mind az A , mind a B esemény bekövetkezik. Ha A_1, A_2, \dots az események egy véges vagy végtelen sokasága, akkor $\sum_i A_i$ azt jelenti, hogy ezek közül legalább egy,

$\prod_i A_i$ pedig, hogy ezek mind bekövetkeznek. Analóg módon értelmezhetők a további halmazelméleti relációk is. Egy B esemény \bar{B} komplementuma azt jelenti, hogy a B esemény nem következik be, olyan elemi esemény a kísérlet végeredménye, mely nem eleme B -nek. $A-B = A\bar{B}$ azt jelenti, hogy A bekövetkezik, de B nem, $A \subset B$ azt jelenti, hogy A bekövetkezése maga után vonja B bekövetkezését, végül $AB = O$ azt jelenti, hogy A és B kizárják egymást. A továbbiakban mindig az események nyelvén beszélünk, közben azonban állandóan szem előtt tartjuk, hogy ezek halmazelméleti fogalmak és relációk más elnevezései.

1.4. Gyakoriság és relatív gyakoriság. Ha egy véletlen kísérletet egyszer elvégzünk, akkor a kísérlet kimenetelére semmilyen bizonyosságunk nincs, nincs semmilyen alapunk arra, hogy ennek kimenetelét megjósoljuk. Első pillantásra ugyanez a helyzet áll elő akkor is, ha a kísérletet többször egymás után és egymástól függetlenül elvégezzük.¹ Az egyes kísérletek kimeneteleiből kialakult tényleges sorozat a kaosz benyomását kelti, ez a sorozat sokféleképpen alakulhatott volna, és ennek mi-kéntjére semmiféle bizonyosságunk nincs. A kísérletsorozat alaposabb vizsgálata során mégis felfedezhetünk valamiféle törvényszerűséget. Ez abban áll, hogy ha figyelembe vesszük az egyes események *gyakoriságait*, ahányszor tehát ezek az események kísérletsorozatunkban előfordultak, akkor ezeknek a gyakoriságoknak egymáshoz való viszonya stabilitást mutat. Másképpen kifejezve: jelölje k_A az A esemény, k_B a B esemény gyakoriságát a konkrét kísérletsorozatban, akkor a k_A/k_B szám a kísérletek számának növelésével aránylag kis ingadozásokat végez, sőt ez az ingadozás a kísérletek számának növelése során csökkenő tendenciát mutat. Ez a jelenség arra a feltételezésre indít bennünket, hogy *ha a kísérletek számát minden határon túl növelnénk, akkor a k_A/k_B hányados egy meghatározott számértékhez tart.*

Az említett hipotézis teljesen korrekt ellenőrzésére természetesen semmilyen módszerünk nincsen és nem is lehetséges, mert végtelen sok kísérletet nem tudunk elvégezni. Megelégszünk tehát egy, az előbbinél gyengébb hipotézissel, mely szerint *nagy számú kísérlet esetén a k_A/k_B hányados gyakorlatilag állandó.* Ezt a hipotézist a tapasztalat határozottan alátámasztja. Ezen az alapon állva azt mondhatjuk, hogy a kísérlettel kapcsolatos egyes események meghatározott, egy-

máshoz viszonyított relatív súllyal következnek be, és ha valamelyik eseménnyel kapcsolatban ezt a számot önkényesen rögzítjük, akkor minden további eseményhez tartozó számérték egyértelműen meghatározottá válik. *Az A eseményhez ily módon tartozó számértéket az esemény valószínűségének nevezzük.*

Meg kell azonban állapodnunk ennek a valószínűségnek a skálájában. Két különböző kísérlet esetén teljesen eltérő típusú események fogalmazhatók meg. Minden kísérlettel kapcsolatban van azonban egy biztos esemény, melyhez célszerű a kísérlettől függetlenül ugyanazt a számértéket rendelni. *Megállapodunk abban, hogy az Ω biztos esemény valószínűsége mindig 1.* Ehelyett természetesen más számértéket is választhattunk volna, ez a választás azonban az összes többivel szemben elsősorban azért előnyös, mert a valószínűségelmélet formulái ekkor lesznek a legegyszerűbbek.

Ha n számú kísérletet végzünk, akkor a biztos esemény gyakorisága éppen n , $k_\Omega = n$. Abból, hogy a k_A/k_B hányados stabilitást mutat, a $B = \Omega$ választás mellett következik, hogy a k_A/n hányados is stabilitást mutat.

Egy A eseménnyel kapcsolatban az A esemény k_A gyakoriságának és n -nek, a kísérletek számának a hányadosát az A esemény relatív gyakoriságának nevezzük.

A mondottak szerint ez a szám az A és az Ω események valószínűségei hányadosának közelítő értéke elég nagy n esetén. Minthogy negállapodás szerint az Ω biztos esemény valószínűsége 1, az A esemény k_A/n relatív gyakorisága az A esemény valószínűsége közelítő értékének tekinthető. Egy A esemény valószínűségét $P(A)$ -val jelöljük. A $P(\Omega) = 1$ választással egyben a valószínűség skáláját is rögzítettük, minden A esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik, mert

$$0 \leq k_A \leq n$$

és így

$$0 \leq \frac{k_A}{n} \leq 1;$$

¹ Adott kísérlettel kapcsolatban általában világos, hogy mit értünk annak többszöri egymástól független elvégzésén. Ha pl. mérleggel való mérésről van szó, akkor minden kísérlet előtt a mérleget megtisztítjuk, újból beállítjuk stb. Pénzérme feldobásai esetén mindig vigyázunk arra, hogy az érme elég sokat perdüljön, mert ezáltal korábbi helyzetének befolyása elhanyagolhatóvá válik. A lottónál egy kísérletnek öt szám egymásutáni kihúzását tekintve, az egyes heti húzások mint kísérletek függetlenek, ugyanis minden húzás (kísérlet) előtt a lottógömb többszöri megforgatása következtében a számok elég jól keverednek.

ez a tulajdonság minden n -re érvényes, tehát valóban

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

1.5. A nagy számok törvénye. Az események relatív gyakoriságainak stabilitását (ami ekvivalens a k_A/k_B hányadosok stabilitásával), a szerencsejátékokkal kapcsolatban már régóta ismerik. Nincs pontos adatunk arra, hogy ki és mikor tette meg először ezt az észrevételt, nem is sok értelme volna ez után kutatni. Közismertnek tekintették azonban ezt a tényt a XVII. században. Ennek ismeretében és ennek hatására kezdett kialakulni a valószínűségelmélet. Később a relatív gyakoriságok stabilitását demográfiai adatokkal kapcsolatban is felismerték. Ma már nagy mennyiségű tapasztalat áll rendelkezésre, a technika és az egyes szaktudományok bőséges anyagot szolgáltatnak ennek a törvénynek az alátámasztására.

Azt a törvényt, mely szerint egy kísérletet igen sokszor, egymástól függetlenül elvégezve, a relatív gyakoriságok stabilitást mutatnak, a nagy számok törvényének nevezzük.

Ez a törvényszerűség az, amely lehetővé teszi a valószínűségelmélet gyakorlati alkalmazását. Ezzel egyben állást is foglaltunk abban az irányban, hogy a valószínűségeket relatív gyakoriságokkal, frekvenciákkal interpretáljuk. Ez viszont szükségessé teszi, hogy csak olyan kísérleteket tegyünk vizsgálataink tárgyává, melyek igen sokszor megismétlődnek, vagy megismételhetők. Egyszeri véletlen eseményekkel és azok valószínűségeivel nem foglalkozunk. Ha egy egyszeri véletlen eseményhez valószínűséget rendelnénk, ez egy szubjektív érték, szubjektív valószínűség volna. Az utóbbi években felmerült ugyan az igény a szubjektív valószínűségek elméletének kiépítésére, és a kezdeti lépéseket ebbe az irányba meg is tették. A szubjektív valószínűségek azonban kívül esnek vizsgálatainkon, ebben a könyvben ezekkel nem foglalkozunk.

1.6. A valószínűség axiómái. Az eddigiekben lényegében azt kutattuk, lehetséges-e egy, a gyakorlattal összhangban levő valószínűségelmélet kiépítése. A valószínűségnek az 1.4. sza-

kasban adott meghatározása természetesen nem matematikai meghatározás. A matematikai elmélet mindig axiómákból indul ki, melyek a kérdéses objektum vagy objektumok legáltalánosabb és lehetőleg legelemibb tulajdonságait rögzítik.² A geometria axiómái rögzítik a pont, az egyenes és a sík tulajdonságait, ugyanezek kapcsolatait, anélkül hogy megmondanánk, mi is konkrétan a pont, az egyenes és a sík. Mármint ha valamilyen matematikai objektumokra ezek a tulajdonságok ráillenek az axiómákban rögzített kapcsolataikkal együtt, akkor ezeket az objektumokat pontoknak, egyeneseknek, ill. síkoknak nevezzük. Egy ilyen axiómarendszer egy geometriát határoz meg. (A konkrét axiómarendszer szerint beszélünk euklideszi, BOLYAI—LOBACSEVSKIJ- stb. geometriákról.)

A valószínűség legáltalánosabb tulajdonságait axiómákban rögzítve, a valószínűség elméletét kapjuk. Az axiómák között azoknak és csak azoknak a tulajdonságoknak kell szerepelniük, amelyek bármilyen véletlen kísérlettel kapcsolatban mindig teljesülnek. Mielőtt ezeket felsorolnánk, visszanyúlunk a valószínűség frekvenciák alapján álló interpretációjához, hogy ezek tulajdonságaiból a valószínűségek legáltalánosabb tulajdonságait kianalizáljuk. Láttuk, hogy minden A eseményre teljesül a $0 \leq k_A/n \leq 1$ egyenlőtlenség, továbbá $k_n/n = n/n = 1$. Ezeken kívül a relatív gyakoriságnak van még egy fontos tulajdonsága. Ha A és B két, egymást kizáró esemény, $AB = O$, akkor nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$k_{A+B} = k_A + k_B.$$

² A valószínűségnek az 1.4. pontban adott természettudományos meghatározásával szemben az a kifogás támasztható, hogy a relatív gyakoriság, ha nagyszámú kísérlet esetén kis mértékben is, de mégis ingadozik; a relatív gyakoriságok alapján tehát nem tudunk egy konkrét számértéket kijelölni, melyre azt mondhatnánk, hogy ez a szóbanforgó esemény valószínűsége. Eszerint a valószínűség ottani értelmezése nem szabatos, sőt logikailag kifogástalan definíciót a relatív gyakoriságok ingadozásai miatt nem is adhatunk. Tévedés volna azonban azt gondolni, hogy más természettudományos fogalmak definíciójánál előnyösebb helyzetben vagyunk. Pl. a tömeg definíciójánál pontos és egyértelmű mérésre volna szükségünk, ilyen pedig nincs, ahány mérést végzünk, annyi eredményt kapunk. Mégis, minthogy gyakorlati szempontból elegendő egy bizonyos határon belüli pontosság, ez pedig elérhető a tömegnél is és a valószínűségnél is, definícióink gyakorlati szempontból kielégítőnek mondhatók.

Ha mindkét oldalt n -nel osztjuk, akkor a

$$\frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$$

egyenlőséget kapjuk. *Egymást kizáró események összegének relatív gyakorisága egyenlő az egyes relatív gyakoriságok összegével. Ha két esemény helyett tetszőlegesen sok, de véges számú, egymást páronként kizáró eseményt tekintünk, az összeg-esemény relatív gyakorisága akkor is egyenlő az egyes relatív gyakoriságok összegével.* A végtelen sok eseményre vonatkozó analóg tulajdonság természetesen szintén teljesül, mert véges sok kísérlet esetében ezek közül csak véges soknak lehet 0-tól különböző relatív gyakorisága. Ez abból következik, hogy az események páronként kizárják egymást. Ha a kísérletek számát egyre növeljük, mind több és több relatív gyakoriság válhat pozitívvá, és felvethető a kérdés, vajon az additív tulajdonság megmarad-e határértékben, a kísérletek számának minden határon túl végzett növelése esetén. Bár ez a kérdés gyakorlati szempontból nyilvánvalóan értelmetlen, elméleti szempontból mégis jelentős, mert felhívja a figyelmet egy olyan tulajdonságra, amelyet esetleg a valószínűség axiómái között rögzíthetünk. Ezt meg is tesszük, nem annyira a közvetlen gyakorlat, mint inkább az elmélet érdekében. Így lehetővé válik olyan tételek bizonyítása, melyekre az elméletben szükségünk van, és ezen keresztül az alkalmazás szempontjából is fontosak.

A valószínűség axiómái: ha adott egy Ω eseménytér, akkor az Ω részhalmazain értelmezett $P(A)$ függvényt³ valószínű-

³ A függvény általános matematikai fogalma a következő: ha egy X halmaz minden eleméhez egy Y halmazbeli elemet hozzárendelünk, akkor ezt a megfeleltetést egy az X halmazon értelmezett függvénynek nevezzük. Az X halmaz különböző eleméhez hozzárendelhetjük ugyanazt az Y -beli elemet és nem szükséges, hogy Y minden elemét a megfeleltetéshez felhasználjuk. X a függvény értelmezési tartománya, Y -nak az a része pedig, melynek elemét a megfeleltetésnél felhasználjuk, a függvény értékkészlete. Jelen esetben az X halmaz Ω részhalmazai áll, Y pedig a 0 és 1 közötti számok összessége, a 0-t és 1-et is beleértve. Az olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya egy halmaz bizonyos részhalmazainak az összessége, halmazfüggvénynek nevezzük. A $P(A)$ függvény tehát halmazfüggvény.

ségnek nevezzük, ha erre teljesülnek az alábbi axiómák:

$$(I) \quad 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$(II) \quad P(\Omega) = 1;$$

(III) ha A_1, A_2, \dots egymást páronként kizáró eseményekből álló véges vagy végtelen sorozat, vagyis $A_i A_k = \emptyset$ $i \neq k$ esetében, akkor

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

A (I), (II), (III) axiómáknak eleget tevő $P(A)$ függvényt valószínűségeloszlásnak vagy röviden valószínűségnek nevezzük. A $P(A)$ függvényt és azt a konkrét számértéket, amelyet ez a függvény egy konkrét eseményhez hozzárendel, egyaránt valószínűségnek nevezzük. Ezt a félreértés veszélye nélkül megtehetjük.

Az 1.2. szakaszban a véletlen események matematikai modelljét konstruáltuk meg. Az Ω eseményteret a valószínűségeloszlással együtt valószínűségi mezőnek nevezzük.

Egy eseménytér részhalmazain természetesen sok különböző valószínűségeloszlás adható meg. Közülük azonban konkrét esetben csak egy realizálódik. Ennek a „valódi” valószínűségeloszlásnak vagy legalábbis bizonyos speciális események valószínűségeinek empirikus közelítésével a matematikai statisztika foglalkozik. A valószínűségelmélet egyes események valószínűségeinek az ismeretében, esetleg ezekre vonatkozó hipotézisek alapján állva, segédeszközt nyújt további események valószínűségeinek meghatározására.

A valószínűségelmélet precíz matematikai megalapozása A. N. KOLMOGOROV-tól származik.⁴ Ez a megalapozás nem csupán elméleti szempontból igen jelentős, amennyiben a valószínűségelméletet a precíz matematikai tudományágak közé sorolja, hanem a valószínűségi problémák tárgyalása során elősegíti a gyakorlati élelátást is.

⁴ A. N. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik, 11./3, Berlin, 1933.

Most e rész lezárásaképpen összeállítunk egy szótárt. A jobb oldalon állnak azok a fogalmak és összefüggések, melyekre a valószínűség matematikai elmélete támaszkodik. A bal oldalon ezeknek a fogalmaknak általunk használt elnevezései szerepelnek; ezek a fogalmak és összefüggések eredetére, a gyakorlatra utalnak.

Egy kísérlet kimeneteleinek az összessége, eseménytér Ω halmaz
A kísérlet egy kimenetele ω , az Ω halmaz egy eleme
Esemény A , az Ω halmaz egy részhalmaza
Biztos esemény $A = \Omega$
Lehetetlen esemény $A = \emptyset$
az az esemény, hogy	$\left\{ \begin{array}{l} A \text{ és } B \text{ közül legalább az egyik bekövetkezik} \dots\dots A + B \\ \text{mind } A, \text{ mind } B \text{ bekövetkezik} \dots\dots AB \\ A \text{ és } B \text{ kizárják egymást} \dots\dots AB = \emptyset \\ A \text{ nem következik be} \dots\dots \bar{A} \end{array} \right.$
A maga után vonja B -t. $A \subset B$
Valószínűség, valószínűségeloszlás	az (I), (II), (III) axiómáknak eleget tevő $P(A)$ függvény

VALÓSZÍNŰSÉGEK MEGHATÁROZÁSA KOMBINATORIKAI MÓDSZEREKKEL

1.7. A klasszikus valószínűségi mező. A valószínűségelmélet kialakulása idején csaknem kizárólag szerencsejátékokkal kapcsolatos valószínűségelméleti problémák merültek fel. Az ezekkel kapcsolatos „kísérletek” egyik jellegzetes tulajdonsága, hogy csak véges sok lehetséges végeredménnyel — a mi terminológiánkban elemi eseménnyel — kell számolni. A másik

jellegzetes tulajdonságuk pedig az, hogy minden elemi esemény egyenlően valószínű. Az ilyen tulajdonságú valószínűségi mezőt *klasszikus valószínűségi mezőnek* nevezzük.

Tegyük fel, hogy a kísérlettel kapcsolatban n elemi esemény van, ezek $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Ha mindegyiknek egy és ugyanazon p szám a valószínűsége, akkor a valószínűség (III) tulajdonsága alapján az $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ biztos esemény valószínűsége, tehát annak a valószínűsége, hogy valamelyik lehetőség bekövetkezik, np -vel egyenlő. Másrészt a valószínűség (II) tulajdonsága alapján ez a valószínűség 1, tehát $np = 1$, ennélfogva $p = 1/n$. Ha A egy olyan esemény, mely k számú elemi eseményt tartalmaz, akkor a valószínűség (III) tulajdonsága alapján azt kapjuk, hogy

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{lehetséges esetek száma}}. \quad (1.7.1)$$

Az (1.7.1) formulát régebben a valószínűség definíciójának tekintették. Hozzáadték azonban, hogy csak akkor definiálják így a valószínűséget, ha a lehetséges esetek „egyenlően esélyesek”. Ha ez azt jelenti, hogy mindegyik elemi esemény valószínűsége ugyanaz a p szám, akkor — mint láttuk — az (1.7.1) egyenlőség már nem definíció, hanem következmény. Máskülönben az egyenlő esélyek feltételezése számunkra semmitmondó. Az 1.2. szakaszban hangsúlyoztuk, hogy a valószínűséget relatív gyakorisággal interpretáljuk, a valószínűség számunkra egy objektív számérték, amely tehát nem aszerint nagy vagy kicsi, hogyan vélekedünk a szóban forgó esemény bekövetkezéséről. Az egyenlő esélyek kifejezése ui. a valószínűségelmélet sok művelője számára azt jelentette: semmi ok sincs annak feltételezésére, hogy valamelyik lehetőség valószínűbb a másiknál. Ezt a hiányzó okok elvének nevezték. Ám mit ér a hiányzó okok elve, ha konkrét esetben a gyakorlat rácsafol az egyes esetek egyenlő valószínű voltára. Ha pedig a gyakorlat igazolja azt, hogy az egyes esetek egyenlően valószínűek, akkor e tényben éppen emiatt bízhatunk meg, és nem

a csalóka hiányzó okok elve miatt, mely az egyén pillanatnyi tudását helyezi előtérbe. Mi csupán a valószínűség legfontosabb tulajdonságait rögzítjük, a számszerű valószínűségeket pedig meghatározzuk, nem pedig definiáljuk.

Más kérdés azonban, hogy sok esetben abból a *feltevésből* indulunk ki, hogy az egyes esetek egyenlően valószínűek. Ilyenkor minden további állítás is csak feltételes, tehát akkor igaz, ha a kiinduló feltevés helytálló volt. Ha tehát eredményeinket a gyakorlatban alkalmazni kívánjuk, akkor alapfeltételünket gondosan ellenőrizni kell, ill. ha rajtunk múlik, a kísérletet oly módon kell végrehajtanunk, hogy feltételünk teljesüljön.

A klasszikus valószínűségi mezők esetében *A valószínűségét az A eseményben foglalt elemi események és az összes elemi események számának hányadosa adja*. A probléma tehát két halmaz elemszámának a meghatározására redukálódik. Ezeket általában kombinatorikai eszközökkel határozzuk meg.

Igen sok, klasszikus valószínűségi mezővel kapcsolatos feladat megoldása a kezdő számára nehézségekbe ütközik. Ennek oka elsősorban az, hogy a feladatok megfogalmazásában általában az olvasóra bízják a matematikai modell megalkotását is, vagyis annak meghatározását, hogy tulajdonképpen mik is a szóban forgó kísérlet esetében az elemi események, melyeket azután egyenlően valószínűeknek tekintenek. A probléma matematikai szempontból csak ennek pontos körülhatárolása esetén meghatározott. Az egyes feladatok megfogalmazásából azonban általában kitűnik, mik a kísérlet végeredményei, az elemi események. Az olvasó mindenesetre leginkább azáltal szerezheti meg a feladatmegoldásban a szükséges logikai biztonságot, ha a megoldást az elemi események meghatározásával kezdi. Ezzel egyben a matematikai modell felállítására is készséget szerez.

1.8. Példák. 1. példa. Véletlen sorrendek. Meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy az *ABDEPSTU* betűket találomra egymás mellé helyezve, éppen a *BUDAPEST* szó alakuljon ki. Egy elemi esemény a fenti 8 betű egy sorrendjében áll. Ezek száma $8!$, tehát ennyi a lehetséges ese-

tek száma. Mivel csak egy kedvező eset van, a keresett valószínűség $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320}$.

Annak a valószínűsége, hogy a *BCDEEENR* betűkből a *DEBRECEN* szó alakuljon ki, már nem $\frac{1}{8!}$, bár itt is 8 betűnk van. A három *E* betűt ui. egymás között permutálva a szó változatlan marad. A kedvező esetek száma tehát $3! = 6$, ennél fogva a keresett valószínűség $\frac{3!}{8!} = \frac{6}{40320} = \frac{1}{6560}$.

2. példa. Termodinamikai valószínűség. N számú cellába véletlenszerűen elhelyezünk n számú golyót. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy az első cellába k_1, \dots , az N -edik cellába k_N számú golyó kerül, ahol természetesen $k_1 + \dots + k_N = n$.

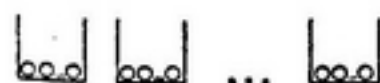
A golyókat különbözőeknek tekintjük, két elhelyezés tehát különböző, ha legalább egy golyó más cellában van. Az n számú golyó elhelyezését úgy is felfoghatjuk, hogy mindegyiket az 1-től N -ig terjedő számok valamelyikével ellátjuk. Ennek alapján világos, hogy az összes lehetséges elhelyezések száma N^n , ez egyben az összes elemi események száma. A kedvező elhelyezések száma a következőképpen határozható meg. Kiindulunk egy speciális kedvező elhelyezkedésből, gondolatban egymás mellé helyezzük az egyes cellákat és a bennük levő golyókat is (1. a 2. ábrát).

Újabb és az előzőtől különböző kedvező elhelyezkedést kapunk, ha a golyókat úgy permutáljuk, hogy közülük legalább egy más cellába kerüljön. Az összes ilyen permutációk száma a 2. függelék 2. pontja szerint

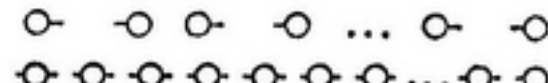
$$\frac{n!}{k_1! \cdots k_N!},$$

tehát a keresett valószínűség

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_N} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_N!} \frac{1}{N^n}. \quad (1.8.2)$$



2. ábra



3. ábra

3. példa. Láncmolekulák kialakulása. Egy kémiai vegyületben $2R$ számú monofunkciós, azaz egyvegyértékű és N számú difunkciós, azaz kétvegy-

értékű egység van. Ezek véletlenszerűen egymáshoz kapcsolódva, összesen R számú láncmolekulává egyesülnek, mindegyiket két monofunkciós egység zárja le a végeken. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $0, 1, 2, \dots, N$ darab difunkciós egységet tartalmazó láncmolekulák száma rendre $k_0, k_1, k_2, \dots, k_N$, feltéve, hogy minden elrendezés egyenlően valószínű. Mivel R számú láncmolekula alakulhat ki, és ezekben összesen N számú difunkciós egység van, csak akkor kaphatunk lehetséges elrendezést, s így 0-tól különböző valószínűséget, ha

$$k_0 + k_1 + \dots + k_N = R;$$

$$k_1 + 2k_2 + \dots + Nk_N = N.$$

A $2R$ számú monofunkciós egységet valamilyen módon képzeletben párokba rendezzük, aszerint hogy melyek kerülnek egy molekulába. Ezeket szimbolikusan a 3. ábra felső sorában ábráztuk. E sor alatt foglalnak helyet a difunkciós egységeket szimbolizáló körök.

Az alsó sort – mondjuk függőleges vonalak segítségével – R számú olyan csoportba beosztva, hogy az i darab difunkciós egységet tartalmazó csoportok száma k_i legyen, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, és ezeket a csoportokat balról jobbra haladva a monofunkciós egységek közé elhelyezve, egy lehetséges elrendezést kapunk. Ilyen csoportalkotásra a 2. függelék 8. pontja szerint

$$\frac{R!}{k_0!k_1!\dots k_N!}$$

lehetőség van. Ahhoz, hogy a kedvező esetek számát megkapjuk, ezt meg kell szorozni $B_{2R}N!2^N$ -nel, ui. a difunkciós egységek $N!$ sorrendben helyezhetők el, és mindegyiknek kétféle állása van, végül a monofunkciós egységek

$$B_{2R} = \frac{1}{R!} \binom{2R}{2} \binom{2R-2}{2} \dots \binom{2}{2} = (2R-1)(2R-3)\dots 3 \cdot 1$$

különböző módon rendezhetők párokba. A lehetséges esetek száma:

$$B_{2R}N!2^N \sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_N=R \\ k_1+2k_2+\dots+Nk_N=N}} \frac{R!}{k_0!k_1!\dots k_N!} = B_{2R}N!2^N \binom{N+R-1}{R-1},$$

tehát a keresett valószínűség

$$P_{k_0, k_1, \dots, k_N} = \frac{1}{\binom{N+R-1}{R-1}} \cdot \frac{R!}{k_0!k_1!\dots k_N!}. \quad (1.8.3)$$

Mint látjuk, a $B_{2R}N!2^N$ szorzattal egyszerűsíteni lehetett, nem is volt fontos tehát ennek meghatározása, csupán a teljesség kedvéért törekedtünk erre.

4. példa. *Bolyongás a számegyenesen.* Tegyük fel, hogy egy pont a számegyenes 0 pontjából elindulva, a véletlentől függően hol jobbra, hol balra haladva, mindig valamelyik szomszédos egész értékű pontba megy át, és így összesen n lépést tesz meg. Kérdés, hogy ha minden n lépésből álló út egyenlően valószínű, mennyi a valószínűsége annak, hogy n lépéssel a k pontba jut el.

Páros számú lépéssel nem juthatunk páratlan pontba és páratlan számú lépéssel páros pontba, a keresett valószínűség tehát csak akkor különbözik 0-tól, ha vagy n is és k is páros vagy n is és k is páratlan. Mivel a keresett valószínűség ugyanannyi k és $-k$ esetén, tegyük fel, hogy $k \geq 0$. A lehetséges utak száma 2^n , mert minden egyes lépésnél két választásunk van. A kedvező utak számának meghatározásához vegyük

$$\text{figyelembe, hogy ha a pont } n \text{ lépéssel a } k \text{ pontba jut el, akkor } k + \frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} \text{ esetben jobbra és } \frac{n-k}{2} \text{ esetben balra kell haladnia, és mind-}$$

egy, hogy ezekre mikor kerül sor. Az n lépés közül az $\frac{n-k}{2}$ számú balra

lépést $\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$ különböző módon választhatjuk ki, a keresett valószínűség tehát

$$p_k = \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \frac{1}{2^n}, \text{ ha } n-k \text{ páros.} \quad (1.8.4)$$

Ha $k=0$ és n páros, akkor eszerint $p_k = \binom{n}{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n}$.

1.9. *Mintavétel visszatevés nélkül.* Bizonyos munkadarabok közötti selejtesek arányára információt szerezhettünk azáltal, hogy közülük néhányat kiválasztva, megnézzük, hogy a kiválasztottak között hány selejtest találtunk. Az egyik módszer, hogy a kiválasztott munkadarabot mindig visszatesszük, ez a visszatevéses mintavétel. A másik, hogy a kiválasztott munkadarabot nem tesszük vissza, a következő mintát eggyel kevesebb számú munkadarabból választjuk. Ez a visszatevés nélküli mintavétel.

A minőség ellenőrzése sok esetben a munkadarab megsemmisítésével jár, ekkor visszatevéses mintavételre nincs is lehetőségünk. Ettől eltekintve, a visszatevés nélküli mintavétel mindig jobb a másikinál. Ennek precíz indokolásával, továbbá a selejtarányra való következtetés pontos módszerével később foglalkozunk (l. a 10.27 szakaszt).

Most azt a kérdést vetjük fel, hogy ha az N munkadarab között M számú selejtes van, és n -et választunk ki, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között k selejtest találunk. Célszerűbb a kérdést urnamodellre vonatkoztatva megfogalmazni, hogy a kérdésfeltevés általánosabb jellege kidomborodjék. A kérdés tehát az, hogy ha egy urnában van N golyó, ezek között M fehér, $N-M$ fekete és n -et véletlenszerűen kiválasztunk, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között k számú fehér lesz.

Meg kell jegyeznünk, hogy elvi szempontból különbözők azok az esetek, amikor a golyókat egymás után húzzuk, és amikor az n golyót egyszerre emeljük ki. Az előbbi esetben ui. különböző e kísérlet eredménye akkor is, ha ugyanazokat a golyókat húzzuk ki, de más sorrendben. Egy elemi esemény tehát nem más, mint n golyónak egy meghatározott sorrendben való kiválasztása. Ennek megfelelően az elemi események száma:

$$N(N-1)\cdots(N-n+1) = \binom{N}{n} n!.$$

A második esetben elemi esemény az n golyó kiválasztása, a sorrendre való tekintet nélkül; az elemi események száma annyi, mint ahány különböző módon N elem közül n számút ki tudunk választani, vagyis

$$\binom{N}{n}.$$

Ez utóbbi esetben több olyan eseménynek nincs is értelme, melyek az előző esetben megfogalmazhatók, pl. a második húzás eredménye fehér golyó stb.

A felvetett probléma szempontjából mindegy, melyik kiválasztási módot tartjuk szem előtt, a szóbanforgó esemény valószínűsége ugyanaz. Ha az n számú golyót egyszerre választjuk ki, akkor a lehetséges esetek száma, mint láttuk, $\binom{N}{n}$. A kedvező esetek számát a következőképpen határozhatjuk meg. Az M számú fehér golyó közül k számút $\binom{M}{k}$ különböző módon tudunk kiválasztani. Minden ilyen, k golyóból álló csoporthoz $n-k$ fekete golyót kell választanunk, amelyre $\binom{N-M}{n-k}$ különböző lehetőségünk van. A kedvező esetek száma tehát

$$\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}$$

és így a keresett valószínűség

$$P_k = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Belátható, hogy ugyanez adódik akkor is, ha a golyókat egymás után húzzuk ki, mert a számláló és a nevező egyaránt $n!$ -sal szorzódik, mellyel egyszerűsíteni lehet.

A lottó-találatok valószínűségei. Egy lottószevényt valahogy kitöltünk. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy 5, 4, 3, 2, 1, 0 találatunk legyen.

Lottóhúzáskor az 1-től 90-ig terjedő számok közül ötöt húznak véletlenszerűen. A kísérlet egy végeredményének öt szám kihúzását tekintjük, mellőzve ezek sorrendjét. A lehetséges esetek, vagyis az elemi események száma $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$.

Az ötös találatra nézve kedvező esetek száma 1.

A négyes találat kedvező eseteinek száma $5 \cdot 85 = 425$, mert a szevényen levő öt szám közül négyet ötféleképpen és ehhez egyet a fennmaradó 85 szám közül 85 különböző módon választhatunk.

A hármas találat kedvező eseteinek a száma $\binom{5}{3} \binom{85}{2}$;

a kettes találaté $\binom{5}{2} \binom{85}{3}$;

az egyes találaté $5 \binom{85}{4}$;

végül a zéró találat kedvező eseteinek száma $\binom{85}{5}$.

A találatok valószínűségei tehát rendre a következők:

$$P_5 = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} = 0,00000002;$$

$$P_4 = \frac{\binom{5}{4} \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} = 425 P_5 = 0,00000967;$$

$$P_3 = \frac{\binom{5}{3} \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} = 35\,700 P_5 = 0,00081230;$$

$$P_2 = \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} = 987\,700 P_5 = 0,02247365;$$

$$P_1 = \frac{\binom{5}{1} \binom{85}{4}}{\binom{90}{5}} = 10\,123\,925 P_5 = 0,23035480;$$

$$P_0 = \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} = 32\,801\,517 P_5 = 0,74634956.$$

Ezek a valószínűségek függetlenek a szelvény kitöltésének módjától.

VALÓSZÍNŰSÉGEK MEGHATÁROZÁSA GEOMETRIAI MÓDSZEREKKEL

1.10. Általános megjegyzések. Vannak olyan valószínűségelméleti problémák, melyekben a valószínűség meghatározását geometriai alakzatok mértékeinek meghatározására vezethetjük vissza. A „mérték” szó itt a hosszúság, ívhossz, terület, felszín, köbtartalom gyűjtőneve. *Geometriai valószínűségekről akkor beszélünk, ha a kísérlet valamely Ω geometriai alakzat (egy egyenes szakasz, görbeív, a sík vagy a tér egy tartománya stb.) mint halmaz egy pontjának véletlenszerű kiválasztásában áll és annak a valószínűsége, hogy ez a pont a tekintett alakzat egy A részébe essék, arányos az A halmaz $m(A)$ mértékével.* Jelen esetben az elemi események tehát Ω pontjai, melyeknek száma végtelen, az események Ω részhalmazai. Feltétel szerint van olyan c konstans, hogy minden A esetén

$$P(A) = cm(A).$$

Mivel $P(\Omega) = 1 = cm(\Omega)$, következik, hogy $c = 1/m(\Omega)$ és így

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \quad (1.10.1)$$

Az egyes feladatokban a problémát nem annyira a mértékek meghatározása jelenti, hanem az Ω és az A , az ún. *lehetőséges és kedvező pontok* összességeinek a meghatározása.

1.11. Példák. 1. példa. Háromszög szerkeszthetőségének valószínűsége. A $(0, d)$ intervallumban találomra választunk két pontot. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett három szakaszból egy háromszög alkotható.

Jelölje x és y a két kiválasztott pontot. E két pont kiválasztását a sík x és y koordinátájú egyetlen pontjával egyértelműen reprezentálhatjuk. Mivel az x és y pont a $(0, d)$ intervallum egy-egy tetszőleges pontja, a kísérlet végeredményei, az elemi események Ω halmaza a sík $0 \leq x \leq d$, $0 \leq y \leq d$ feltételekkel meghatározott négyzete. Kérdés, melyek ennek a négyzetnek azok a pontjai, amelyeknek esetében a $(0, d)$ intervallum három szakaszból háromszöget alkothatunk. Három szakaszból háromszög akkor alkotható, ha bármely két szakasz hosszának összege nagyobb a harmadik hosszánál. Mármost két eset van, vagy $x < y$ vagy $y < x$. Az első esetben

az előbbi feltétel azt jelenti, hogy teljesülnek az

$$x < d - x; \quad y - x < x + d - y; \quad d - y < y \quad (1.11.1)$$

egyenlőtlenségek. A második esetben x és y helyet cserél, a feltételek tehát a következők

$$y < d - y; \quad x - y < y + d - x; \quad d - x < x. \quad (1.11.2)$$

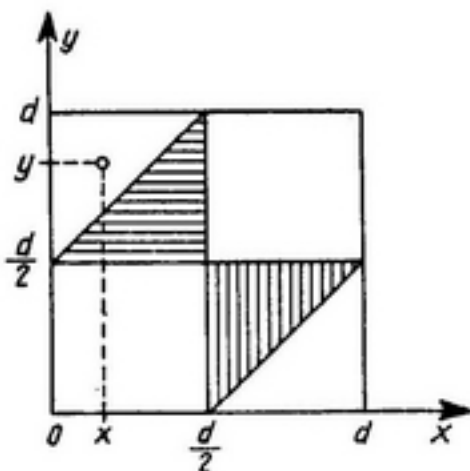
Az (1.11.1) és (1.11.2) egyenlőtlenségek ekvivalensek az alábbiakkal:

$$x < \frac{d}{2}; \quad y < x + \frac{d}{2}; \quad \frac{d}{2} < y; \quad (1.11.3)$$

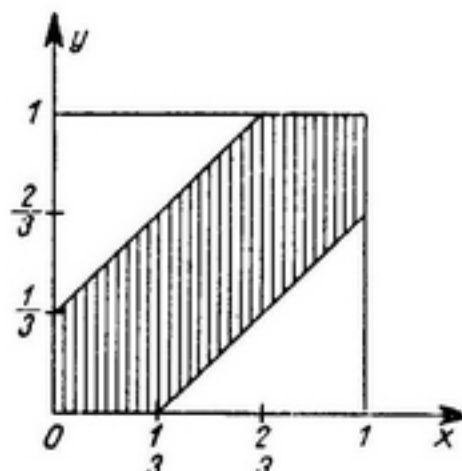
$$y < \frac{d}{2}; \quad x < y + \frac{d}{2}; \quad \frac{d}{2} < x. \quad (1.11.4)$$

Az (1.11.3) egyenlőtlenségek a 4. ábrán vízszintesen, az (1.11.4) egyenlőtlenségek pedig a függőlegesen vonalkázott tartományt határozzák meg. E két tartomány pontjai együtt a kedvező pontok összességét adják. Mivel ennek területe $d^2/4$, a négyzet területe d^2 , a keresett valószínűség

$$P = \frac{\frac{d^2}{4}}{d^2} = \frac{1}{4}.$$



4. ábra



5. ábra

2. példa. Ketten megbeszélnek, hogy du. 5 és 6 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint aki korábban érkezik, 20

percet vár a másikra, azután elmegy. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?

A probléma úgy is megfogalmazható, hogy a $(0, 1)$ intervallumban találmra választva két pontot, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek egymástól való távolsága legfeljebb $\frac{1}{3}$. Ha e két pont x és y , akkor ugyanúgy, mint az 1. példában, a kísérlet egy végeredményét a sík egységnyi-zetének x, y koordinátájú pontjával helyettesítjük. A lehetséges pontok összessége az egységnyi-zet pontjai, a kedvező pontok összessége az

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}$$

feltételnek eleget tevő pontok összessége. Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy egyidejűleg teljesül az alábbi két egyenlőtlenség:

$$y \leq x + \frac{1}{3}; \quad y \geq x - \frac{1}{3}.$$

A kedvező pontok tehát az $y = x - \frac{1}{3}$ és $y = x + \frac{1}{3}$ egyenesek között fekszenek. Ez az 5. ábrán a vonalkázott rész. Az ábráról leolvasható, hogy a keresett valószínűség $\frac{5}{9}$.

3. példa. A Bertrand-féle paradoxon. Egy r sugarú kör valamely húrját véletlenszerűen kiválasztjuk. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a húr hosszabb a körbe írt szabályos háromszög oldalánál.

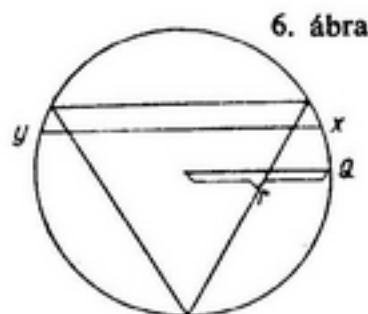
Első megoldás. Jelölje x és y a húrnak a körrel vett két metszéspontját, pontosabban azt a két ívhosszúságot, melyeket a két metszéspontig kapunk, a kör valamely rögzített pontjától (a 6. ábrán a Q ponttól) az óramutató járásával ellenkező irányban haladunk. Annak feltétele, hogy a húr hosszabb legyen a beírt szabályos háromszög oldalánál, a következő egyenlőtlenség

$$\frac{2r\pi}{3} < |x - y| < \frac{4r\pi}{3}. \quad (1.11.5)$$

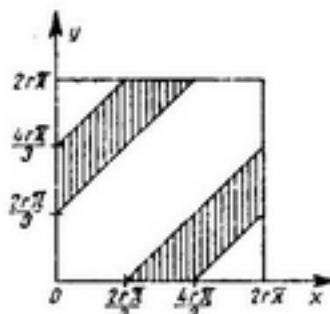
Egy húr kiválasztása ekvivalens a sík $0 \leq x < 2r\pi$, $0 \leq y < 2r\pi$ négyzete egy pontjának a kiválasztásával. Közülük kedvező pontok azok, melyekre az (1.11.5) egyenlőtlenség teljesül (a 7. ábrán vonalkázott rész). A valószínűség tehát $p = \frac{1}{3}$.

Második megoldás. A húr helyzetét a középpontja egyértelműen meghatározza. A húr hossza pedig akkor hosszabb a beírt szabályos háromszög oldalánál, ha középpontja az ebbe a szabályos háromszögbe írt kör belsejében fekszik (l. a 8. ábrát). Mivel ennek a körnek a sugara $r/2$, a keresett valószínűség

$$p = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2 \pi}{r^2 \pi} = \frac{1}{4}.$$



6. ábra



7. ábra

A fentiekén kívül még több különböző megoldás adható, amelyek különböző valószínűségekhez vezetnek. Mai szemmel nézve, a BERTRAND féle paradoxont nem nehéz feloldani. A feladat megfogalmazásában nem tettünk említést a valószínűségről. Az első és második megoldás a kör

összes húrjainak halmazán más-más valószínűségeloszlást tételez fel. Ha a húrnak a körrel vett metszéspontjait reprezentáló síkbeli (x, y) pont a sík $0 \leq x < 2r\pi$, $0 \leq y < 2r\pi$ négyzetében egyenlő területű tartományokba egyenlő valószínűséggel esik, akkor az első megoldás helyes. Ha pedig a húr középpontja a kör belsejében egyenlő területű tartományokba esik, akkor a második megoldás helyes.

Egy-egy analóg feltevésnek az első két példa esetében is teljesülnie kell. A második példánál csak akkor állíthatjuk, hogy nagyszámú kísérlet esetén a talákozás az

esetek kb. $\frac{5}{9}$ részében jön létre, ha igaz az

a kiinduló feltevés, hogy az érkezési időpontokat regisztráló síkbeli (x, y) pont a $0 \leq x \leq d$; $0 \leq y \leq d$ négyzet egyenlő területű tartományaiba egyenlő valószínűséggel esik.

Minden geometriai valószínűségekre vezető problémában a kísérlet vég-eredményeit valamely tér pontjaival reprezentáljuk, amelyet *fázistérnek* nevezünk. Ez analóg a mechanikában használatos fázistér fogalmához. (Egy n pontból álló mechanikai pontrendszer állapotát a hely- és impulzuskordinátákból alkotott $2n$ -dimenziós vektor, a $2n$ -dimenziós tér egy eleme egyértelműen jellemzi. Ezt a teret a mechanikában fázistérnek nevezik.)

4. példa. A Buffon-féle tűprobléma. Egy r hosszúságú tűt véletlenszerűen rádobunk egy párhuzamos egyenesekkel vonalkázott síklapra, ahol a szomszédos egyenesek távolsága egy állandó d szám. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy a tű valamelyik egyenest metszi, ha feltesszük, hogy $r \leq d$. Ebben a formájában a probléma még nem határozott, hozzáteesszük azonban a következőket. Mind az egyenesek valamelyik irányát, mind pedig valamelyik erre merőleges irányt rögzítve, jelölje φ a tű és az egyenesek hajlásszögét, y pedig a tű középpontjának a visszafelé legközelebb eső egyenestől való távolságát (l. a 9. ábrát). Ekkor $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq y \leq d$. A tű különböző helyzetei között csak akkor teszünk különbséget, ha a (φ, y) értékpárok különbözők, más szóval egy (φ, y) értékpár egy elemi esemény. Feltesszük, hogy a (φ, y) pont a $0 \leq \varphi \leq \pi$; $0 \leq y \leq d$ téglalap (l. a 10. ábrát) egyenlő területű tartományaiba egyenlő valószínűséggel esik. Ezzel a problémát egyértelművé tettük. A tű valamelyik egyenest akkor metszi, ha

$$y \leq \frac{r}{2} \sin \varphi \quad \text{vagy} \quad y \geq d - \frac{r}{2} \sin \varphi.$$

E két feltétel valamelyikének eleget tevő pontok összessége a 10. ábrán a vonalkázott rész. Mivel az $\frac{r}{2} \sin \varphi$ alatti terület

$$\frac{r}{2} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = r,$$

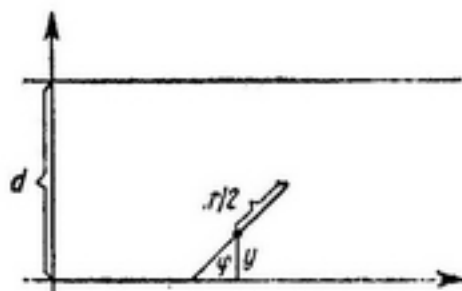
a keresett valószínűség $p = \frac{2r}{\pi d}$.

1.12. Feladatok. 1. A statisztikus fizikában nagy szerepet játszanak az ún. betöltési problémák. Ezek alapfeladata a következő módon fogalmazható meg urnamodell segítségével: n számú golyót véletlenszerűen elhelyezünk N számú urnába; kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy az elsőbe k_1, \dots , az N -edikbe k_N számú golyó kerül ($k_1 + \dots + k_N = n$), ill. mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott

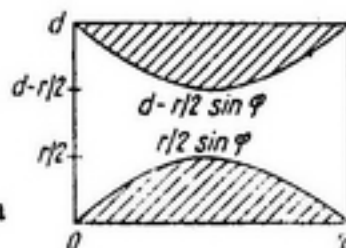
urnába k számú golyó kerül. Tegyük fel, hogy minden elhelyezkedés egyenlően valószínű (MAXWELL–BOLTZMANN statisztika) és válaszoljuk meg a második kérdést.

2. Válaszoljuk meg az 1. feladatban említett két kérdést a kísérletre vonatkozó következő feltevés mellett: a kísérlet egy kimenetele egy k_1, k_2, \dots, k_N szám N -es, másszóval két elhelyezkedés csak akkor különböző, ha van olyan urna, melyben különböző számú golyók vannak és a kísérlet minden kimenetele egyenlően valószínű (BOSE–EINSTEIN statisztika).

3. A 2. feladatban említett feltételhez vegyük még hozzá a következőt: minden urnában legfeljebb 1 golyó lehet (FERMI–DIRAC statisztika) és válaszoljuk meg az 1. feladatban említett két kérdést.



9. ábra



10. ábra

4. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a bridzslapokat találomra szétosztva

- minden játékos egyszínű lapot kap,
- egy meghatározott játékos lapeloszlása 6, 4, 2, 1,
- mind a négy ász egy meghatározott játékoshoz kerül.

5. A $(0, 1)$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy pontot, majd egy másikat ettől jobbra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett három szakaszból háromszög alkotható.

6. A $(0, 1)$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szám harmadik tizedesjegye 5.

7. Egy villamosmegállóhoz a villamosok 5 percenként érkeznek, óra-ór, óra 5-kor stb. Mondjuk du. 5 és $1/26$ között egy véletlenszerűen kiválasztott időpontban a megállóhoz megyünk. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy a várakozási idő ne legyen hosszabb 2 percnél.

A VALÓSZÍNŰSÉGEK KALKULUSA

A valószínűségek alapvető összefüggései

Feltételes valószínűség és függetlenség

2.1. Alaptételek. Ebben a pontban a valószínűség I., II., III. tulajdonságaira támaszkodva alapvető tételeket bizonyítunk be.

1. tétel. *A lehetetlen esemény valószínűsége 0, $P(O)=0$.*

Bizonyítás. Ha A egy tetszőleges esemény, akkor $A + O = A$, $AO = O$, tehát a III. tulajdonság alapján

$$P(A) = P(A + O) = P(A) + P(O),$$

amiből következik, hogy $P(O)=0$. q. e. d.

Bár a lehetetlen esemény valószínűsége 0, nem következik ebből az, hogy ha egy esemény valószínűsége 0, akkor az lehetetlen. Ha pl. egy kör pontjai közül találomra választunk egyet és annak a valószínűsége, hogy az a kör egy tartományába essék, arányos a tartomány területével, akkor annak a valószínűsége, hogy a kör középpontját választjuk, 0-val egyenlő. Ez az esemény azonban mégis lehetséges. Ugyanígy, ha egy esemény valószínűsége 1, akkor még nem biztos, hogy az be is következik. Ez az észrevétel elméleti szempontból igen fontos, gyakorlati szempontból azonban egy 0 valószínűségű eseményt elhanyagolhatunk, egy 1 valószínűségű eseményt pedig biztosra vehetünk.

Az A_1, \dots, A_n események összességét teljes eseményrendszernek nevezzük, ha közülük egy és csakis egy mindig bekövetkezik, más szóval, ha

$$A_1 + \dots + A_n = \Omega, \quad A_i A_k = O, \quad \text{ha } i \neq k.$$

2. tétel. *Ha az A_1, \dots, A_n események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor*

$$P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1.$$

A tétel állítása a valószínűség III. tulajdonságának közvetlen következménye. E tétel speciális esete a

3. tétel. Minden A eseményre igaz, az hogy

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

4. tétel. Ha az A esemény maga után vonja a B eseményt, vagyis $A \subset B$, akkor

$$P(A) \leq P(B) \text{ és } P(B - A) = P(B) - P(A).$$

Bizonyítás. Mivel $A \subset B$, következik, hogy $B = A + (B - A)$. Másrészt $A(B - A) = O$, tehát a III. tulajdonság alapján

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

ahonnan a tétel mindkét állítása leolvasható.

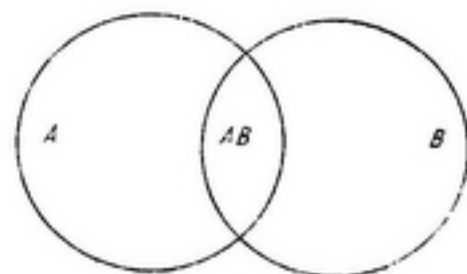
5. tétel. Tetszőleges A, B eseménypárra érvényes az alábbi egyenlőség:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.1.1)$$

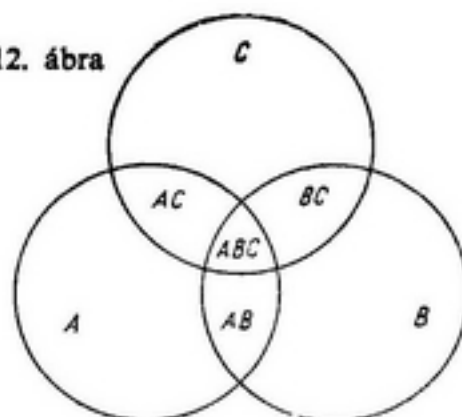
Bizonyítás. Az $A + B = A + (B - AB)$ és az $A(B - AB) = O$ egyenlőségekből a III. tulajdonság alapján következik, hogy

$$P(A + B) = P(A) + P(B - AB). \quad (2.1.2)$$

11. ábra



12. ábra



Másrészt $AB \subset B$, tehát a 4. tétel szerint

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB).$$

Ezt (2.1.2)-be helyettesítve, a tétel állítását kapjuk.

Az 5. tétel felhasználásával analóg formula nyerhető három eseményre. Ha ui. A, B, C tetszőleges események, akkor a 4. tétel ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(A + B + C) &= \\ &= P((A + B) + C) = P(A + B) + P(C) - P((A + B)C) = \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) + P(C) - P(AC + BC) = \quad (2.1.3) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el háromnál több esemény összege valószínűségének meghatározásakor is. A (2.1.1) és (2.1.3) formulákat területekkel szemléltetjük (l. a 11. és 12. ábrákat). A 11. ábrán a két kör; a 12. ábrán a három kör által lefedett tartomány területét a (2.1.1), ill. (2.1.3) szabályokhoz analóg módon tudjuk kiszámítani. Olyan geometriai valószínűségek esetén, melyeknél a fázistér a sík, a területekre vonatkozó összefüggések egyben a (2.1.1) és (2.1.3) formulák bizonyításainak is tekinthetők, mindkét formulában csupán Ω területével kell osztanunk, hogy a valószínűségekre vonatkozó összefüggéseket megkapjuk. Az 5. tétel általánosításával a következő szakaszban foglalkozunk.

6. tétel. Tetszőleges A_1, \dots, A_n eseményekre fennáll a

$$P(A_1 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=1$ -re az állítás triviális, $n=2$ -re pedig a 4. tételből közvetlenül következik. Tegyük fel, hogy a formula igaz n eseményre, és bizo-

nyítsuk be $n+1$ -re. Az 5. tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$P(A_1 + \dots + A_n + A_{n+1}) \leq P(A_1 + \dots + A_n) + P(A_{n+1}) \leq \\ \leq P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

2.2. Egy határértéktétel. Ha B_1, B_2, \dots olyan végtelen sok eseményből alkotott sorozat, melyre teljesül, hogy $B_n \supset B_{n+1}$,

$n = 1, 2, \dots$, továbbá $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B). \quad (2.2.1)$$

Bizonyítás. Legyen $D_k = B_k - B_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$. Ekkor a B, D_1, D_2, \dots események páronként kizárják egymást és

$$B_1 = B + \sum_{k=1}^{\infty} D_k,$$

tehát a valószínűség III. tulajdonsága alapján

$$P(B_1) = P(B) + \sum_{k=1}^{\infty} P(D_k) = P(B) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} P(D_k).$$

Felhasználva azt, hogy a 4. tétel szerint

$$P(D_k) = P(B_k) - P(B_{k+1}),$$

az adódik, hogy

$$P(B_1) = P(B) + \lim_{n \rightarrow \infty} (P(B_1) - P(B_n)) = \\ = P(B) + P(B_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n),$$

ahonnan állításunk már leolvasható.

1. következmény. Ha a B_n sorozatra az teljesül, hogy $B_n \subset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ és $\sum_{k=1}^{\infty} B_k = B$, akkor is teljesül a (2.2.1)

reláció. Ennek bizonyításához csupán a 2.1 szakasz 4. tételét kell figyelembe vennünk és az előbbi tételt alkalmaznunk a $C_n = B_n$ eseményekre.

2. következmény. Ha A_1, A_2, \dots egy végtelen sok eseményből alkotott sorozat, akkor

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \quad (2.2.2)$$

A 2.1 szakasz 6. tétele szerint ui. minden n -re

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Másrészt a $B_n = \sum_{k=1}^n A_k$ sorozatra teljesül az, hogy $B_n \subset B_{n+1}$,

$n = 1, 2, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, tehát az 1. megjegyzés szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

vagyis (2.2.2) valóban fennáll.

2.3. Az általános valószínűségi tétel. Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$S_1^{(n)} = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

$$S_2^{(n)} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j);$$

$$S_3^{(n)} = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k);$$

$$S_n^{(n)} = P(A_1 \dots A_n).$$

Az első egyenlőségben az összegezés valamennyi eseményre, a másodikban valamennyi eseménypárra, a harmadikban valamennyi eseményhármásra vonatkozik s. i. t. Végül n eseményből álló szorzat csak egy van. Ennek megfelelően az $S_r^{(n)}$ összegben pontosan $\binom{n}{r}$ összeadandó szerepel. Az alábbi tétel a 2.1 szakasz 5. tételének általánosítása.

1. tétel. Tetszőleges A_1, \dots, A_n eseményekre fennáll a következő egyenlőség

$$P(A_1 + \dots + A_n) = S_1^{(n)} - S_2^{(n)} + S_3^{(n)} - \dots + (-1)^{n-1} S_n^{(n)}. \quad (2.3.1)$$

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $n=2$ esetben igaz. Bebizonyítjuk, hogy ha igaz n -re, akkor igaz $n+1$ -re is. A 2.1 szakasz 5. tétele felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$P(A_1 + \dots + A_n + A_{n+1}) = P(A_1 + \dots + A_n) + P(A_{n+1}) - P(A_1 A_{n+1} + \dots + A_n A_{n+1}).$$

Alkalmazzuk indukciós feltevésünket a jobb oldal első és harmadik tagjára. Az első tag kifejtése esetén $S_1^{(n)}$ -hez hozzávéve $P(A_{n+1})$ -et, megkapjuk $S_1^{(n+1)}$ -et. $-S_2^{(n)}$ -hez a harmadik tag kifejtése esetén kapott első összeget, tehát a

$$-P(A_1 A_{n+1}) - \dots - P(A_n A_{n+1})$$

mínusz előjellel ellátott valószínűségeket hozzávéve, $-S_2^{(n+1)}$ -et kapunk. Ugyanis az A_1, \dots, A_n, A_{n+1} eseményekből az összes eseménypárokat megkaphatjuk úgy, hogy előbb vesszük az összes párokat az A_1, \dots, A_n események közül, és ezekhez hozzávéssük az $A_1 A_{n+1}, \dots, A_n A_{n+1}$ eseménypárokat. Ugyanígy $S_3^{(n)}$ -hez hozzátéve a harmadik tag kifejtéséből kapott $\sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_{n+1} A_j A_{n+1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j A_{n+1})$ tagokat, megkapjuk az $S_3^{(n+1)}$ összeget. Így tovább haladva, végül az első tag kifejtésében szereplő összegek elfogynak, a harmadik

tagból pedig megmarad $-(-1)^{n-1} P(A_1 A_{n+1} \dots A_n A_{n+1}) = -(-1)^n P(A_1 \dots A_n A_{n+1})$. A (2.3.1) egyenlőség tehát fennáll $n+1$ -re is, amivel a tételt bebizonyítottuk.

Példa. A találkozás problémája. n számozott golyót elhelyezünk egy urnában, majd ezeket egymás után véletlenszerűen kihúzzuk, és a húzás sorrendjében egymás mellé helyezzük. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy golyó sincs annyiadik pozícióban, mint amennyi a száma, feltéve, hogy minden sorrend egyenlően valószínű.

Meghatározzuk a kiegészítő esemény valószínűségét, és ezt levonjuk 1-ből. Kérdés tehát, mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy golyó annyiadik pozícióban van, mint amennyi a száma. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i -edik golyó az i -edik pozícióban van. Meg kell határoznunk a

$$P(A_1 + \dots + A_n)$$

valószínűséget. Az elemi események itt a golyók sorrendjei, permutációi. Összesen $n!$ permutáció van. Azok száma, melyeknél az i -edik pozícióban az i -vel jelzett golyó van, nyilván $(n-1)!$, tehát

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n};$$

$$S_1^{(n)} = n \frac{1}{n} = 1.$$

Az $A_i A_j$ eseményre nézve kedvezők azok a permutációk, melyeknél az i -edik pozícióban az i -vel, a j -edik pozícióban a j -vel jelzett golyó van. Ezek száma $(n-2)!$, tehát figyelembe véve még, hogy összesen $\binom{n}{2}$ különböző eseménypár van, azt kapjuk, hogy

$$P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)};$$

$$S_2^{(n)} = \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2!}.$$

Ugyanígy nyerjük a hármas szorzatokra, hogy

$$P(A_i A_j A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)};$$

$$S_3^{(n)} = \binom{n}{3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}.$$

Ezt az eljárást folytatva, végül az A_1, \dots, A_n eseményre csak egy kedvező eset van, tehát

$$S_n^{(n)} = \frac{1}{n!}.$$

A fentiekből azt kapjuk, hogy

$$P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!},$$

tehát a keresett valószínűség

$$1 - P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor ez a valószínűség tart a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = 0,36 \dots$$

számhoz.

Az 1. tétel ismét speciális esete a 2. tételnek. Az alábbi tételeket általános valószínűségi tételeknek nevezzük, ezek JORDAN KÁROLYTÓL származnak.

2. tétel. Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események, és jelölje Q_k annak a valószínűségét, hogy ezek közül legalább k számú bekövetkezik. Ekkor

$$Q_k = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i-1}{k-1} S_i^{(n)}. \quad (2.3.2)$$

3. tétel. Legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges események, és jelölje P_k annak a valószínűségét, hogy közülük pontosan k bekövetkezik. Ekkor

$$P_k = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{i}{k} S_i^{(n)}. \quad (2.3.3)$$

A 2. és 3. formulák egymásból nyerhetők a

$$Q_k = P_k + \dots + P_n;$$

$$P_k = Q_k - Q_{k+1}$$

formulák figyelembevételével. E tételeket nem bizonyítjuk.

FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG ÉS FÜGGETLENSÉG

2.4. Feltételes valószínűség. Legyen A és B két esemény, az utóbbról feltételezzük, hogy valószínűsége nem 0, tehát $P(B) > 0$. Végezzük el n -szer egymástól függetlenül azt a kísérletet, amellyel ez a két esemény kapcsolatos. Válasszuk ki azokat az eseteket, amelyekben a B esemény bekövetkezett. Ezek száma k_B , a B esemény gyakorisága. Ez utóbbi esetek között némelyekben az A esemény is bekövetkezett, ezek száma k_{AB} , az AB esemény gyakorisága. E két gyakoriság

$$\frac{k_{AB}}{k_B} \quad (2.4.1)$$

hányadosa, mint általában a gyakoriságok hányadosai, stabilitást mutat, ha a kísérletek számát egyre növeljük. A (2.4.1) hányadost az A esemény B eseményre vonatkoztatott feltételes relatív gyakoriságának nevezzük.

Ha (2.4.1)-ben a számlálót és nevezőt n -nel osztjuk, akkor mivel

$$\frac{k_{AB}}{n} \approx P(AB), \quad \frac{k_B}{n} \approx P(B),$$

következik, hogy

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB}/n}{k_B/n} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.4.2)$$

A $P(AB)/P(B)$ számot az A esemény B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűségének nevezzük, és $P(A|B)$ -vel jelöljük (olv. A vonás B):

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.4.3)$$

Belátható, hogy a feltételes valószínűségekre érvényesek a következő relációk:

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(A|B) \leq 1; \\ P(B|B) &= 1; \\ P\left(\sum_i A_i | B\right) &= \sum_i P(A_i | B), \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

ha az A_1, A_2, \dots események páronként kizárják egymást.

A (2.4.4) relációk hasonlóak a valószínűség I., II., III. tulajdonságaihoz. Ha a B eseményt rögzítjük, az A eseményt pedig változtatjuk, akkor a $P(A|B)$ feltételes valószínűségek egy valószínűségeloszlást létesítenek a B esemény AB részeseményein. A biztos esemény szerepét a B esemény veszi át.

(2.4.3) alapján világos továbbá, hogy

$$P(A|B) = 1, \text{ ha } B \subset A, \quad (2.4.5)$$

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \quad (2.4.6)$$

Példa. Egy urnában van 4 fehér és 6 fekete golyó. Egymás után kettőt kihúzzunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a második golyó fehér, feltéve hogy az első fekete.

Ez utóbbi eseményt jelöljük B -vel, az előbbi pedig A -val. Meg kell határoznunk a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget. Előbb kiszámítjuk külön-külön a $P(AB)$ és a $P(B)$ valószínűségeket.

Tekintve, hogy a húzás sorrendje is lényeges, összesen $10 \cdot 9 = 90$ különféle húzási eredmény lehetséges. Közülük azok száma, melyekben az első golyó fekete, a második fehér, pontosan $6 \cdot 4 = 24$, tehát

$$P(AB) = \frac{24}{90}.$$

Határozzuk most meg a B esemény valószínűségét. Ami a kedvező esetek számát illeti, ez azoknak a húzásoknak a száma, ahol az első golyó fekete és a második tetszőleges, így 24-hez még hozzá kell adnunk azoknak a számát, amelyekben az első is és a második is fekete. Ezek száma $6 \cdot 5 = 30$. A B esemény kedvező eseteinek a száma tehát $24 + 30 = 54$ és így

$$P(B) = \frac{54}{90}.$$

A keresett feltételes valószínűség tehát

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}.$$

Ugyanennyi a valószínűsége annak, hogy ha az urnában 4 fehér és 5 fekete golyó van, akkor egy golyót kihúzával, az fehér lesz. Ez az eredmény várható is volt, mert ha a B esemény teljesül, akkor a második húzás előtt 9 golyó van az urnában és ebből 4 fehér és 5 fekete. A $P(A|B)$ feltételes valószínűség definíciója miatt azonban mégis úgy kell eljárunk, hogy a $P(AB)$ és a $P(B)$ valószínűségek hányadosát vesszük.

2.5. A szorzási szabály. A feltételes valószínűség gyakorlati felhasználása többnyire nem abban áll, hogy $P(AB)$ és $P(B)$ alapján meghatározzuk $P(A|B)$ értékét, hanem általában fordított jellegű. Legtöbbször a feltételes valószínűségeket vagy ismerjük, vagy ezekre kézenfekvő feltevéseket tehetünk, és ezáltal következtetünk más események valószínűségeire. Az egyik ilyen következtetéshez a valószínűségek *szorzási szabálya* nyújt lehetőséget. Ha (2.4.3)-ban $P(B)$ -vel átszorozunk, akkor a valószínűségek szorzási szabályát kifejező

$$P(AB) = P(A|B)P(B) \quad (2.5.1)$$

formulát kapjuk. Ez lehetővé teszi, hogy a jobb oldalon álló valószínűségek ismeretében $P(AB)$ -t meghatározzuk.

A 2.4 szakasz példájára visszatérve, megtartva az ott használt jelöléseket, ha feltesszük, hogy mindkét húzás úgy megy végbe, hogy az urnában levő golyók mindegyike egyenlő valószínűséggel kerül kihúzásra, akkor $P(B) = \frac{6}{10}$, továbbá

$$P(A|B) = \frac{4}{9}, \text{ ennélfogva (2.5.1) értelmében}$$

$$P(AB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{90}.$$

A valószínűségek szorzási szabálya általánosítható n eseményre.

Általános szorzási szabály. Ha A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges események, akkor

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1), \quad (2.5.2)$$

feltéve, hogy a vonások mögött álló szorzatesemények valószínűségei pozitívak.

Bizonyítás. A (2.5.1) egyenlőség ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_n) &= P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) P(A_1 \dots A_{n-1}) = \\ &= P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 \dots A_{n-2}) P(A_1 \dots A_{n-2}) = \dots \\ &\dots = P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1). \end{aligned}$$

Ez pedig éppen az általános szorzási szabály.

Példa. Egy csomag magyar kártyából egymás után kihúzzunk 4 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első kettő piros, a második kettő zöld? Feltesszük, hogy minden egyes húzás alkalmával a csomagban levő lapok mindegyikét egyenlő valószínűséggel húzzuk.

Jelöljük A_1, A_2, A_3, A_4 rendre azokat az eseményeket, hogy az első lap piros, a második piros, a harmadik zöld, a negyedik zöld. Feltetésünk alapján az adódik, hogy

$$P(A_1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4};$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{7}{31};$$

$$P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15};$$

$$P(A_4 | A_1 A_2 A_3) = \frac{7}{29};$$

tehát a keresett valószínűség

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{7}{29} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{1}{4} = \frac{49}{13\,485} = 0,003\,63 \dots$$

A (2.5.2) formula egy alkalmazásával a MARKOV–PÓLYA–EGGENBERGER-eloszlás tárgyalásakor találkozunk.

2.6. A teljes valószínűség tétele. A feltételes valószínűségek egy másik felhasználására nyújt lehetőséget az alábbi tétel.

A teljes valószínűség tétele. Ha a B_1, B_2, \dots, B_n események teljes eseményrendszert alkotnak, továbbá $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$

és A egy tetszőleges esemény, akkor

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Bizonyítás. Abból, hogy B_1, B_2, \dots, B_n egymást páronként kizáró események, következik, hogy az AB_1, AB_2, \dots, AB_n események is ilyenek. Ugyanis

$$AB_i AB_k = AB_i B_k = O, \text{ ha } i \neq k.$$

Másrészt $B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$, tehát $AB_1 + AB_2 + \dots + AB_n = A(B_1 + B_2 + \dots + B_n) = A\Omega = A$. A valószínűség III. tulajdonságából következik, hogy

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i). \quad (2.6.1)$$

A (2.5.1) egyenlőség szerint, B helyébe B_i -t írva,

$$P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i).$$

Ezt (2.6.1)-be helyettesítve, a teljes valószínűség tételét kifejező egyenlőséget kapjuk.

1. példa. Három urnában fehér és fekete golyók vannak elhelyezve. Az elsőben 2 fehér, 3 fekete, a másodikban 3 fehér, 4 fekete, a harmadikban 4 fehér és 5 fekete golyó van. A kísérlet abban áll, hogy előbb véletlenszerűen kiválasztunk egy urnát. Legyen $1/2, 1/3, 1/6$ rendre az első, második, ill. harmadik urna kiválasztásának a valószínűsége. Ezután a kiválasztott urnából véletlenszerűen kihúzzunk egy golyót úgy, hogy mindegyik golyó kihúzásának a valószínűsége egyenlő legyen.⁵ Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzzunk.

Jelöljük B_1, B_2, B_3 azokat az eseményeket, hogy az első, második, ill. harmadik urnát választjuk ki, A pedig jelölje azt az eseményt, hogy fehér golyót húzzunk. A fentiek szerint

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B_2) = \frac{1}{3}, \quad P(B_3) = \frac{1}{6};$$

$$P(A|B_1) = \frac{2}{5}, \quad P(A|B_2) = \frac{3}{7}, \quad P(A|B_3) = \frac{4}{9},$$

⁵ Egy elemi esemény két adatból áll, az egyik az urnát, a másik az abból kiválasztott golyót jelenti.

tehát a keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = 0,416 \dots$$

2. példa. Egy automatagéppel kapcsolatban hosszú időn keresztül megfigyelték, hogy az egy nap alatt gyártott termékek között a selejt 3 és 4% között ingadozik, mégpedig az összes napok $100r_0\%$ -ában 3%, $100r_1\%$ -ában 3,1%, ..., $100r_{10}\%$ -ában 4% volt a selejt. Ezt úgy interpretáljuk, hogy bármelyik napot kiválasztva, r_i a valószínűsége annak, hogy a selejtszázalék $\left(3 + \frac{i}{10}\right)\%$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$, ahol $r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_{10} = 1$. Egy napon minőségellenőrzést végzünk, 1000 munkadarab közül 20 munkadarab véletlenszerű kiválasztásával. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy 20 között pontosan 2 selejtest találunk.

Jelölje B_i azt az eseményt, hogy az adott napon a gép selejtszázaléka $\left(3 + \frac{i}{10}\right)\%$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$, A pedig jelölje azt az eseményt, hogy 20 között 2 selejt van. Ekkor

$$P(B_i) = r_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Ha a B_i esemény teljesül, akkor 100 között $30 + i$ selejt van, tehát

$$P(A|B_i) = \frac{\binom{30+i}{2} \binom{1000-30-i}{18}}{\binom{1000}{20}}.$$

A keresett valószínűség pedig

$$P(A) = \sum_{i=0}^{10} \frac{\binom{30+i}{2} \binom{1000-30-i}{18}}{\binom{1000}{20}} r_i.$$

2.7. Bayes tétele. Következő tételünk a fordított kérdés megválaszolására nyújt lehetőséget. Az A esemény feltételezése mellett keressük a B_i esemény valószínűségét.

Ha a B_1, B_2, \dots, B_n események teljes eseményrendszert alkotnak, $P(B_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ és A egy tetszőleges, pozitív való-

színűségű esemény, akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciójából következik, hogy

$$P(B_k|A)P(A) = P(A|B_k)P(B_k)$$

és $P(A)$ -val osztva,

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}.$$

$P(A)$ helyébe behelyettesítve a teljes valószínűség tételét kifejező egyenlőség jobb oldalán álló összeget, éppen a kívánt formulához jutunk.

1. példa. Visszatérve a 2.6. szakasz 1. példához, meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy az első urnából húztunk és a húzás eredménye fehér golyó. Ez a $P(B_1|A)$ feltételes valószínűség a következővel egyenlő:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{189}{394} = 0,480 \dots \end{aligned}$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$P(B_2|A) = \frac{135}{394} = 0,342 \dots$$

$$P(B_3|A) = \frac{35}{197} = 0,178 \dots$$

A fenti eredményeket a következőképpen interpretáljuk. Ha a kísérletet sokszor elvégezzük és csak azokat az eseteket vesszük figyelembe, amikor fehér golyót húztunk, ezeknek az eseteknek kb. 48%-ában az első, 34%-ában a második és 18%-ában a harmadik urnából történt a húzás.

2. példa. A 2.6 szakasz 2. példájához visszatérve, BAYES tétele alapján azt kapjuk, hogy

$$P(B_k|A) = \frac{\binom{30+k}{2} \binom{1000-30-k}{18} r_k}{\sum_{i=0}^{10} \binom{30+i}{2} \binom{1000-30-i}{18} r_i}, \quad k=0, 1, 2, \dots, 10.$$

Ha történetesen $r_0 = r_1 = r_2 = \dots = r_{10}$, akkor ezekkel a fenti képletben egyszerűsíthetünk. A példa illusztratív jellegű, ilyen valószínűségeket a gyakorlatban bonyolult voltak miatt ritkán számítunk ki numerikusan.

A BAYES-tételben szereplő $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ valószínűségeket szokás *a priori*, a $P(B_1|A), P(B_2|A), \dots, P(B_n|A)$ feltételes valószínűségeket pedig *a posteriori* valószínűségeknél nevezni. A BAYES-tétel gyakorlati felhasználása során ui. általában eleve adott, a kísérlet konkrét eredményétől független $P(B_i)$ valószínűségekből indulunk ki. Ezután felhasználva a kísérlet végrehajtása során nyert konkrét információt, hogy ti. egy A esemény teljesült, a $P(B_i)$ valószínűségekre támaszkodva meghatározzuk a $P(B_i|A)$ feltételes valószínűségeket. Az előbbieket numerikus ismeretere tehát már a kísérlet előtt szükségünk van; ezek adottak. Elvben az utóbbiak is adottak, csak-hogy a kísérlet elvégzése során tudjuk meg, hogy mely A eseményről van szó, ennél fogva a $P(B_i|A)$ valószínűségeket numerikus meghatározására általában csak a kísérlet után kerül sor.

2.8. Események függetlensége. Hétköznapi értelemben két eseményt akkor nevezünk függetlennek, ha nincsenek egymásra befolyással. Nyilvánvaló, hogy ezt a definíciót ebben a formájában nem építhetjük be egy matematikai elmélet kereteibe. Ennek a kijelentésnek a matematikai megfelelőjét a következőképpen fogalmazhatjuk meg: az A eseményt a B eseménytől függetlennek nevezzük, ha

$$P(A|B) = P(A), \quad (2.8.1)$$

A feltételes valószínűség definíciója szerint ez ekvivalens a

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (2.8.2)$$

egyenlőséggel. Ez pedig ismét ekvivalens azzal, hogy

$$P(B|A) = P(B). \quad (2.8.3)$$

Ha tehát A független B -től, akkor B is független A -tól. Emiatt a függetlenség definíciójaként legcélszerűbb a (2.8.2) egyenlőséget elfogadni, mert ez A -ban és B -ben szimmetrikus.

Az A és B eseményeket (sztochasztikusan) függetleneknek nevezzük, ha teljesül a (2.8.2) feltétel.

Példa. Bizonyos késztermékek két különböző szempontból lehetnek selejtesek. Tegyük fel, hogy 1000 munkadarab között 75 azoknak a száma, melyek csak az 1. szempontból, 120 azoknak a száma, melyek csak a 2. szempontból és 9 azoknak a száma, melyek mindkét szempontból selejtesek. A többiek hibátlanok. Közülük egyet véletlenszerűen kiválasztva, jelöljük A és B azokat az eseményeket, hogy a kiválasztott munkadarab selejtes az 1., ill. a 2. szempontból. Ha az egyes munkadarabokat egyenlő valószínűséggel választjuk, akkor

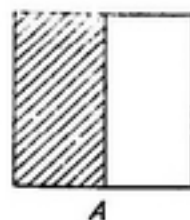
$$P(A) = \frac{75}{1000} = 0,075, \quad P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{9}{120} = 0,075,$$

tehát az A és B események függetlenek.

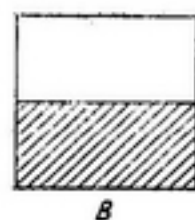
Ha több esemény függetlenségét akarjuk definiálni, óvatosan kell eljárunk. Tekintsünk három eredményt: A, B, C . Ha ezek függetlenségét a

$$P(AB) = P(A)P(B); \quad P(AC) = P(A)P(C); \quad P(BC) = P(B)P(C) \quad (2.8.4)$$

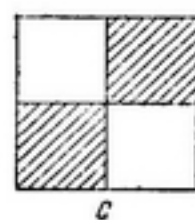
egyenlőségekkel definiálnánk, nem fejeznék ki azt, amit akarunk. Ekkor ui. az A, B, C események páronként függetlenek, összességükben tekintve azonban valami kapcsolat még lehet közöttük. Lehet olyan három eseményt konstruálni, melyekre a (2.8.4) formulák teljesülnek, de pl. az AB szorzat nem független C -től. Erre a 13.a ábrán látunk példát. Álljon a kísérlet — mondjuk — abban, hogy a négyzet egy pontját véletlensze-



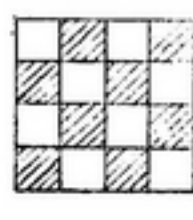
A



B



C



13b ábra

13a ábra

rően kiválasztjuk. Az A, B, C események a négyzet vonalkázott részeit jelentik. Annak a valószínűsége, hogy a pontot ezekből választottuk, legyen arányos az eseményt reprezentáló tartomány területével. Ekkor

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2};$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B);$$

$$P(AC) = \frac{1}{4} = P(A)P(C);$$

$$P(BC) = \frac{1}{4} = P(B)P(C),$$

tehát a (2.8.4) egyenlőségek teljesülnek. Ámde C nem független AB -től, mert

$$P(ABC) = \frac{1}{4},$$

ennél fogva

$$P(ABC) \neq P(AB)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Ha azonban a függetlenséget úgy definiáljuk, hogy teljesülnek a (2.8.4) egyenlőségek és még a

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \quad (2.8.5)$$

egyenlőség is, akkor az ilyen jellegű anomáliák megszűnnek. Mind a (2.8.4), mind a (2.8.5) formulák teljesülnek, ha A és B a 13a ábrán, C pedig a 13. b ábrán látható esemény.

Az A_1, A_2, \dots, A_n eseményeket teljesen függetleneknek vagy röviden függetleneknek nevezzük, ha teljesülnek a

$$\begin{aligned} P(A_i A_j) &= P(A_i)P(A_j), \quad i < j; \\ P(A_i A_j A_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad i < j < k; \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

.....

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$$

egyenlőségek, szavakban: akárhogy is választunk ki közülük bizonyos számú különböző eseményt, ezek együttes bekövetkezésének a valószínűsége egyenlő az egyes valószínűségek szorzatával.

Az első sorban annyi összefüggés áll, mint ahány különböző módon két különböző eseményt n közül kiválaszthatunk. Ez a szám $\binom{n}{2}$. A második sorban $\binom{n}{3}$ számú összefüggést foglaltunk össze s. i. t. n esemény függetlenségét tehát összesen

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$$

összefüggéssel fejezzük ki. Pl. az $n=3$ esetben ez a szám $2^3 - 3 - 1 = 4$. Közülük hármat a (2.8.4) összefüggések, egyet a (2.8.5) összefüggés fejez ki.

2.9. Egy független eseményekkel kapcsolatos tétel. Ha A_1, A_2, \dots, A_n független események, akkor valamelyiket a kiegészítőjével pótolva, újból független eseményeket kapunk. Más-
képpen kifejezve, tetszőleges k esetén $A_1, \dots, A_{k-1}, \bar{A}_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ szintén függetlenek.

Megjegyzés. Abból, hogy egy eseményt a kiegészítőjével pótolva, újból független eseményeket kapunk, következik hogy a függetlenség akkor is megmarad, ha tetszőlegesen sokat pótolunk a kiegészítőjével.

Bizonyítás. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a (2.8.6) egyenlőségekben A_k helyébe mindenütt \bar{A}_k írható. Ez rögtön következik az alábbiakból. Ha általában bizonyos B_1, \dots, B_r, B eseményekre

$$P(B_1 \dots B_r B) = P(B_1) \dots P(B_r) P(B); \quad (2.9.1)$$

$$P(B_1 \dots B_r) = P(B_1) \dots P(B_r), \quad (2.9.2)$$

akkor mivel

$$B_1 \dots B_r B + B_1 \dots B_r \bar{B} = B_1 \dots B_r,$$

következik, hogy

$$\begin{aligned} P(B_1 \dots B_r \bar{B}) &= P(B_1 \dots B_r) - P(B_1 \dots B_r B) = \\ &= P(B_1) \dots P(B_r) - P(B_1) \dots P(B_r) P(B) = \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

$$= P(B_1) \dots P(B_r) (1 - P(B)) = P(B_1) \dots P(B_r) P(\bar{B}).$$

Ahol a (2.8.6) egyenlőségekben A_k előfordul, ott ezt B -vel, a többi B_1, \dots, B_r -rel jelölve, fennáll a (2.9.1) egyenlőség. Fennáll azonban (2.9.2) is, ennél fogva (2.9.3) is teljesül. A_k tehát pótolható \bar{A}_k -sal és ezzel a bizonyítás teljes.

2.10. Megjegyzések a függetlenség fogalmához. A függetlenség fogalmával a gyakorlatban kétféle értelemben dolgozunk. Előfordul olyan eset, amikor a cél bizonyos események függetlenségének megállapítása. Ez a kérdés a matematikai statisztika körébe tartozik. Egy erre használatos módszert a 10.23. szakaszban ismertettünk. Más esetekben bizonyos események függetlenségének a feltételezését újabb valószínűségek meghatározására használjuk fel.

Tekintsünk egy példát. Hosszú időn keresztül megfigyelték, hogy egy szövőgép fonalszakadás miatt a munkaidő $100p_1\%$ -ában, egy másik pedig a munkaidő $100p_2\%$ -ában áll. Ekkor kb. p_1 és p_2 az egyes gépek állási valószínűségei, olyan értelemben, hogy p_1 annak a valószínűsége, hogy az első gép egy tetszőlegesen kiválasztott időpontban álljon. Ugyanez a p_2 jelentése a másik géppel kapcsolatban. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy a gépek egyszerre állnak? Ha feltesszük, hogy az egyes gépek állásai független események, és ennek alapján azt mondjuk, hogy a keresett valószínűség $p_1 p_2$, semmi újat nem mondtunk, mivel a két esemény függetlenségét éppen azért érteltük meg, hogy együttes bekövetkezésük valószínűsége az egyes valószínűségek szorzata. Ezt pedig ellenőriznünk kellene, és így látszólag circulus vitiosus áll elő.

Ez a circulus vitiosus azonban könnyen feloldható, ha a tapasztalatra hivatkozunk. A tapasztalat azt mutatja, hogy ha két kísérletet egymástól „függetlenül” hajtunk végre, és A az egyik, B pedig a másik kísérlettel kapcsolatos egy-egy esemény, akkor jogos ezek matematikai függetlenségének a feltételezése is, tehát annak feltételezése, hogy

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

amit a relatív gyakoriságok összehasonlításával ellenőrizhetünk,

Amikor egymástól „függetlenül” végrehajtott kísérletekről beszélünk, akkor a „függetlenül” szót gyakorlati értelemben használjuk, és ezzel arra utalunk, hogy a kísérletek között semmiféle kapcsolat nincs. Ez nem matematikai fogalom, gyakorlati szempontból azonban mégis félreérthetetlen jelentése van. Mármost azért, hogy a tapasztalatra hivatkozunk, megteremtjük a hidat az elmélet és a gyakorlat között.

Visszatérve a szövőgépek példájára, ezen az alapon mondhatjuk, hogy ha a gépek egymástól „függetlenül” dolgoznak, akkor annak valószínűsége, hogy egyszerre állnak $p_1 p_2$. Ugyanígy állíthatjuk, hogy ha két kockát egymástól „függetlenül” feldobunk, akkor annak a valószínűsége, hogy az elsővel páratlan számot dobunk, a másodikkal pedig legfeljebb 4-et,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}.$$

Eddig mindig egy kísérlettel és az azzal kapcsolatos eseményekkel foglalkoztunk, most pedig két vagy esetleg több, egymástól függetlenül végrehajtott kísérletről beszélünk egyszerre, sőt két különböző kísérlettel kapcsolatos A, B események AB együttes bekövetkezéséről is, márpedig ezek különböző halmazok részhalmazai. Két vagy több kísérletet is tekinthetünk azonban egy kísérletnek. Ha két kockát feldobunk, azt tekinthetjük egy kísérletnek is, melynek elemi eseményei az összes (i, k) számpárok, ahol i és k értékei 1 és 6 között lehetnek és i az első, k a második kockával dobott számot mutatja.

Ha általában n kísérletet egyesítünk, az i -edikhez tartozó eseménytér $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, akkor az egyesített kísérlet egy végeredményét egy

$$\omega = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(n)}) \quad (2.10.1)$$

n elemből álló sorozattal jellemezhetjük, ahol $\omega^{(i)}$ az $\Omega^{(i)}$ eseménytér egy eleme. Ha $\omega^{(1)}$ az $\Omega^{(1)}$ halmaz s. i. t., $\omega^{(n)}$ az $\Omega^{(n)}$ halmaz elemeit jelenti, akkor a (2.10.1) szerinti elem n -esekből így előálló sokaságot Ω -val jelöljük, és az egyes eseményterek

szorzatterének nevezzük. Ennek jelölése

$$\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)} \times \dots \times \Omega^{(n)}. \quad (2.10.2)$$

Ha a kísérleteket egymástól függetlenül hajtottuk végre, akkor a szorzatter részhalmazain értelmezett valószínűséget egyértelműen meghatározzák az egyes $\Omega^{(i)}$ eseményterek részhalmazainak valószínűségei.

2.11. Bernoulli problémája. Tekintsünk egy olyan kísérletet, melynek két kimenetele van: a és b , amelyeknek valószínűségei p és $q = 1 - p$. Az ilyen kísérletet *egyszerű alternatívának*, ennek egymástól független többszöri megismétlését pedig *Bernoulli-féle kísérletsorozatnak* nevezzük. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy n kísérlet során pontosan k -szor következik be az a lehetőség.

Az n kísérletet egynek tekintve, ennek kimenetelei az a és b számokból alkotott n -tagú sorozatok. Közöttük vannak olyanok, amelyek pontosan k számú a -t tartalmaznak. Egy ilyen sorozat pl. a következő:

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_k, \underbrace{b, b, \dots, b}_{n-k}.$$

Ennek a speciális sorozatnak a valószínűsége a kísérletek függetlensége következtében:

$$\underbrace{pp\dots p}_k \underbrace{qq\dots q}_{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Ugyanennyi minden olyan sorozat valószínűsége, melyben pontosan k számú a szerepel, a p és q valószínűségek permutációja ui. nem változtatja meg a szorzat értékét. Ilyen sorozat összesen $\binom{n}{k}$ van, mert az n pozíció közül az a betűk számára k pozíciót $\binom{n}{k}$ különféle módon választhatunk ki. A keresett valószínűség tehát

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.11.1)$$

Alkalmazás visszatevési mintavételre. Tegyük fel, hogy egy M piros és $N - M$ fehér golyót tartalmazó urnából n -szer húzunk ki egy golyót, de úgy, hogy minden egyes húzás után a kihúzottat visszatesszük. Ha a golyókat minden húzás előtt jól összekeverjük, akkor feltehetjük, hogy az egyes húzások egymástól független kísérletek. Egy ilyen kísérlet végeredményeinek csak azokat tekintve, hogy piros, ill. fehér golyót húzunk, egy BERNOULLI-féle kísérletsorozatról van szó. Annak a valószínűségét tehát, hogy n húzás során pontosan k -szor húzunk piros golyót, a (2.11.1) képlet adja a $p = \left(\frac{M}{N}\right)$ helyettesítéssel.

2.12. Láncmolekulák lebomlása. Tekintsünk egyetlen, a végeken levőket is beleszámítva, összesen n egységből álló láncmolekulát. Valamilyen katalizátor hatására az egyes kötések véletlenszerűen felszakadnak. Tegyük fel, hogy az egyes kötések egymástól függetlenül szakadnak fel, és a $(0, t)$ időintervallumban való felszakadás valószínűsége legyen minden kötésre ugyanaz a $p = p(t)$ szám. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy a t időpontig keletkezett, i egységet tartalmazó molekulák száma k_i legyen, $i = 1, 2, \dots, n$, ahol

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n.$$

Az n egységet tartalmazó molekulában $n - 1$ kötés van. Ha a t időpontban az i egységet tartalmazó molekulák száma k_i , $i = 1, 2, \dots, n$, akkor összesen

$$k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n - (k_1 + k_2 + \dots + k_n) = n - (k_1 + k_2 + \dots + k_n)$$

kötés maradt meg, és

$$n - 1 - n + k_1 + k_2 + \dots + k_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n - 1$$

kötés bomlott fel. Erre persze sokféle lehetőség van, mindegyiknek a valószínűsége azonban

$$p^{k_1 + k_2 + \dots + k_n - 1} (1 - p)^{n - k_1 - k_2 - \dots - k_n} = \frac{(1 - p)^n}{p} \left(\frac{p}{1 - p}\right)^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

A 2. függelék 8. pontja szerint az összes ilyen lehetőségek száma

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

tehát a keresett valószínűség

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{(1-p)^n}{p} \cdot \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

Megjegyezzük még, hogy ezeknek a valószínűségeknek az összege 1-et ad, mert az egymást kizáró esetek közül valamelyik biztosan bekövetkezik, tehát

$$\frac{(1-p)^n}{p} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{p}{1-p} \right)^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} = 1.$$

Gyakori jelenség, hogy valószínűségelméleti megfontolás alapján aránylag egyszerűen adódik olyan összefüggés, melynek bizonyítása más úton jóval bonyolultabb.

2.13. Feladatok. 1. Bizonyítsuk be, hogy ha az A, B, C események páronként függetlenek és A független $B + C$ -től, akkor A, B, C teljesen függetlenek.

2. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k öt találatos szelvény lesz.

3. Egy bolt vásárlói között 200 olyan van, aki reggel 8 és 9 óra között megy vásárolni. Kérdés, hogy ha ezek ezen az órán belül is véletlenszerűen és egymástól függetlenül választják ki a vásárlás kezdetének időpontját, mennyi annak a valószínűsége, hogy (mondjuk) 8³⁰ és 8³⁵ között pontosan 10 vásárló érkezék.

4. Egy autóbusszmegállóhoz az α és a β számú autóbuszok érkeznek. Az első 3, a második 5 percenként jár, úgy, hogy órakor a kettő egyszerre érkezik. Óra és óra 10 perc között véletlenszerűen a megállóhoz megyünk. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy az α (ill. β) jelzésű érkezik előbb, feltéve, hogy a várakozási idő 1 percnél nem hosszabb?

5. Egy urnában van 6 piros és 4 fehér golyó. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk 3-at és elhelyezzük egy másik urnába. Innen egymás után visszatevéssel húzunk 5-ször. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) az 5 húzás közül 2 esetben húzunk pirosat,
- b) a második urnában 2 piros van, feltéve, hogy 5-ször húztunk pirosat.

6. (de Méré egyik problémája) Melyik a valószínűbb, az, hogy egy kockával négy dobás közül legalább egyszer hatot dobunk, vagy két kockával 24 dobás közül legalább egyszer tizenkettőt dobunk.

7. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két kockával dobva, a hatodik dobásnál legyen először a számjegyek összege 12.

8. Ketten asztaliteniszt játszanak, mindkét játékosra nézve $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy egy pontot szerezzen és az egyes pontok nyerései egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a játék valamelyik fél 23:21 arányú nyereségével ér véget.

9. Legyen $p_x(t)$ annak a valószínűsége, hogy egy x éves személy további t évet túlél. A $t=1$ esetre a $p_x(1)=p_x$ rövidítést alkalmazzuk. Bizonyítsuk be, hogy ha t egész szám, akkor

$$p_x(t) = p_x p_{x+1} \dots p_{x+t-1}.$$

10. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n független események. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n).$$

11. Legyen B_1, B_2, \dots, B_n teljes eseményrendszer, $P(B_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ és A egy tetszőleges esemény. Bizonyítsuk be, hogy ha a $P(AB_i), i=1, 2, \dots$ valószínűségek egyenlők, akkor $P(A) = P(A|B_i), i=1, 2, \dots, n$.

12. Magyarországon a fiúk születési aránya 51,6%. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy egy ötgyermekes családban 3 fiú és 2 lány van.

13. Legyen A és B két esemény, $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P(AB) = \frac{1}{12}$.

Határozzuk meg az $\bar{A} + \bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \bar{A} + B, A\bar{B}$ események valószínűségeit.

14. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n független események, melyekre $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$. Milyen számok lehetnek a $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ valószínűségek.

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÉS ELOSZLÁSAIK

Valószínűségi változók

Valószínűségi változók eloszlásai

Két valószínűségi változó együttes eloszlása

Több valószínűségi változó együttes eloszlása

3.1. A valószínűségi változó fogalma. A gyakorlatban előforduló kísérletek túlnyomó részében a kísérlet eredményével, az elemi eseménnyel egyúttal egy vagy több numerikus érték is adódik. Foglalkozzunk előbb azzal az esettel, amikor minden elemi eseményhez csak egy ilyen számérték tartozik, ill. csak egy számértékre koncentráljuk figyelmünket. Az elemi esemény ezt a mennyiséget mindig egyértelműen meghatározza. A kísérlet újabb és újabb végrehajtása esetén más és más elemi esemény következik be, ennek megfelelően adatainkban is véletlen ingadozásokat tapasztalunk.

Emlékeztetünk arra, hogy az elemi esemény számunkra nem a kísérlet végrehajtása során fizikai értelemben létrejött eseményt jelenti, hanem a kísérlet egy lehetséges végeredményét jellemző absztrakt elemet. Pl. céltáblára lövés esetén egy elemi esemény számunkra a kör egy pontja, semmi több. Az elemi események akkor is léteznek, ha a kísérletet nem hajtjuk végre. Az egyes számértékeket tehát a kísérlet végrehajtásától függetlenül is hozzárendelhetjük az egyes elemi eseményekhez, teljesebbé téve a szóban forgó kísérlet matematikai modelljét. Így jutunk el a valószínűségi változó fogalmához.

Valószínűségi változónak egy az elemi események Ω halmazán értelmezett függvényt nevezünk.

Azt a számot, melyet az ω elemi eseményhez hozzárendelünk, többnyire görög betűvel fogjuk jelölni, melléírva zárójelbe azt az ω elemi eseményt, melyhez ez tartozik, tehát pl. $\xi(\omega)$. Az ω elemi esemény — amely most egy függvény független változója — kiírását azonban gyakran el is hagyjuk, figyelembe véve azt, hogy bennünket elsősorban a valószínűségi változó

értékei és nem maguk az elemi események érdekelnek. Egy Ω halmazon végtelen sok különböző függvény értelmezhető, tehát minden kísérlettel kapcsolatban végtelen sok különböző valószínűségi változó fogalmazható meg. Közülük azonban csak egyeseknek van gyakorlati jelentősége.

1. példa. Kockadobás. Két kocka feldobását mint kísérletet tekintve, az elemi események az (i, k) számpárok, ahol i az első, k a második kockával dobott szám. Összesen 36 elemi esemény van. Ha a dobott számok összegét vizsgáljuk, akkor az (i, k) elemi események

$$\xi = \xi((i, k)) = i + k$$

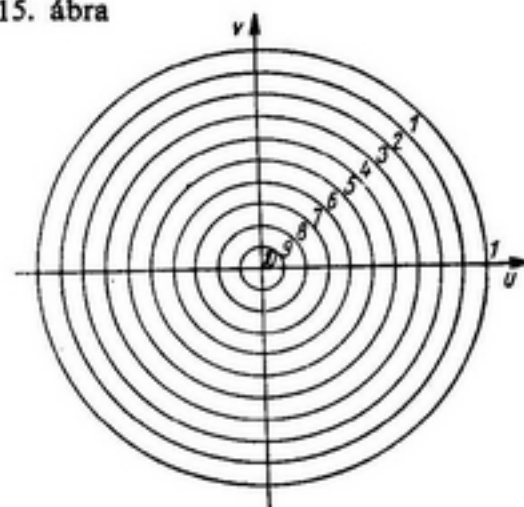
függvényével foglalkozunk. Míg minden elemi eseményhez egyértelműen tartozik egy meghatározott számérték, ebben a példában egy számérték az elemi eseményt visszafelé nem határozza meg egyértelműen, mert pl. az $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ elemi eseményekhez egyaránt a 4 érték tartozik. Vizsgálhatjuk a dobott számjegyek különbségét vagy szorzatát, ezek újabb

$$\eta = i - k, \zeta = ik$$

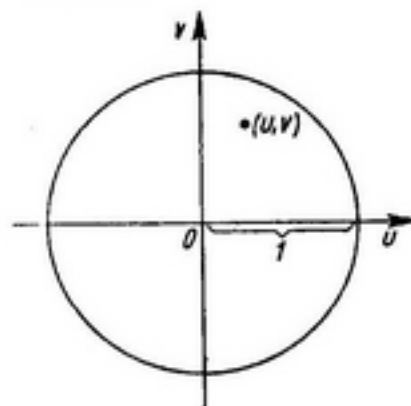
valószínűségi változók.

2. példa. Lövés kör alakú céltáblára. Tekintsünk egy egységnyi sugarú kör alakú céltáblát, melyre a lövést a lövész leadja, és feltesszük, hogy a céltáblát biztosan eltalálja. Az elemi események a céltábla összes pontjai, tehát mindazok az (u, v) számpárok (l. a 14. ábrát), amelyekre tel-

15. ábra



14. ábra



jesül, hogy

$$u^2 + v^2 \leq 1.$$

Egy valószínűségi változó pl. az a függvény, mely a céltábla minden (u, v) pontjához a céltábla középpontjától vett távolságot rendeli hozzá, ha tehát a kör középpontja az origóban van, akkor

$$\xi = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Egy másik valószínűségi változót kapunk a következő módon. Felosztjuk a céltáblát az $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, 1$ sugarú koncentrikus körök segítségével 10 részre (l. a 15. ábrát). Legbelül egy kör van, ennek pontjaihoz a 10 értéket rendeljük hozzá. Az ezt körülvevő gyűrű pontjaihoz 9-et rendelünk s. i. t., végül a külső gyűrű minden pontjához tartozzék az 1 számérték. A körök pontjait soroljuk pl. mindig a külső gyűrűhöz. Ekkor egy függvényt értelmeztünk, amelyet formulákkal is leírhatunk:

$$\eta = 10 - k, \text{ ha } \frac{k}{10} \leq \sqrt{u^2 + v^2} < \frac{k+1}{10}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9.$$

Ez az η valószínűségi változó minden lövéssel kapcsolatban a lövés szokásos értékelését adja. Értelmezhetünk egy tetszőleges kétváltozós függvényt is a kör pontjain, elvben valószínűségi változót kapunk akkor is, azonban nem mindig lesz gyakorlati szempontból értelme egy-egy ilyen valószínűségi változónak.

3. példa. Egy kísérletet, amelynek két kimenetele van (a és b) elvégzünk n -szer. Ezt az n kísérletet egynek tekintve, ennek elemi eseményei az a és b betűkből álló, n elemű sorozatok. Számuk 2^n . Minden ilyen sorozathoz hozzárendelve a benne foglalt a betűk számát, egy ξ valószínűségi változót kapunk. Ha $n=3$, akkor az elemi események és a megfelelő ξ értékek a következők

aaa	$\xi = 3$	abb	$\xi = 1$
aab	2	bab	1
aba	2	bba	1
baa	2	bbb	0

A valószínűségi változó lehetséges értékei 0, 1, 2, 3. A b betűk számát η -val jelölve, nyilván fennáll az

$$\eta = 3 - \xi$$

egyenlőség.

4. példa. Egy városban van N család. Közülük egyet véletlenszerűen kiválasztva, a kísérletnek N lehetséges kimenetele van. Ha minden csa-

ládhoz hozzárendeljük a havi összjövedelmet, akkor egy ξ valószínűségi változót kapunk. Újabb valószínűségi változót kapunk, ha minden családnak a családnagyságot, a család létszámát rendeljük hozzá. Ezt η -val jelölve, a kettő hányadosa ismét egy valószínűségi változó:

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta},$$

ez pedig az egy főre eső jövedelem. Ha egyszerre N családot választunk ki, akkor $\binom{N}{n}$ az elemi események száma. Minden ilyen elemi eseményhez hozzárendelhetjük az egy főre eső havi jövedelmek számtani átlagát ez így egy valószínűségi változó.

Egyes esetekben az elemi események számértékek és mindegyikhez ugyanazt a számot rendeljük a valószínűségi változó értékeként. Pl. egy folyó évi vízhozamát vizsgálva, az elemi események összességét a számegegyenes egy (a, b) intervallumba eső számainak összessége alkotja. Az a és b határok a folyó legalacsonyabb és legmagasabb vízhozamai, ha ilyen határok kijelölhetők. Ha ezt nem tudjuk megtenni, akkor minden nem-negatív számot megengedhetünk, legfeljebb egyesekre soha sem kerül sor. Mármint minden vízhozamhoz hozzárendelve ugyanazt a számot, amely a vízhozamot megadja, egy valószínűségi változót kapunk.

Felvetődik a kérdés, miért van szükség ez esetben erre a megkülönböztetésre, *miért kell egy számhoz önmagát még egyszer hozzárendelni, miért kell ebben az esetben egyáltalán valószínűségi változót értelmezni?* A legdöntőbb érv itt az, hogy ily módon a véletlen mennyiségek matematikai szemlélete egységesé válik. Meg kell még jegyeznünk, hogy gyakorlati szempontból nem is mindig érdekesek az elemi események, elsősorban a valószínűségi változó eloszlása az, ami fontos. Bizonyos esetekben rendkívül bonyolult feladat a gyakorlatban nyilvánvalóan létező „valószínűségi változókat” matematikai értelemben valószínűségi változókká tenni, vagyis egy alkalmas Ω eseményteret alkotni és ezen a kívánt függvényeket értelmezni. Szigorúan matematikai szempontból nézve mindig ezt kellene tennünk, és az Olvasó számára ajánljuk is, hogy minél több

problémával kapcsolatban vesse fel magában a kérdést: mik az elemi események és hogyan lehet a szóban forgó valószínűségi változókat értelmezni.⁶ A szövegben azonban csak bonyolultabb problémák tárgyalása esetén utalunk ezekre az elvi szempontokra, hogy ne tegyük túlzottan hosszúvá a tárgyalást.

3.2. Valószínűségi vektorváltozók, sztohasztikus folyamatok. Vannak olyan esetek, amikor minden elemi eseményhez nem egy, hanem több, de az elemi eseményektől független számú számértéket rendelünk hozzá. Ezeket valamilyen szempont szerint rendezve, egy vektort kapunk. Így jutunk el a valószínűségi vektorváltozó fogalmához.

Valószínűségi vektorváltozónak egy, az elemi események Ω halmazán értelmezett vektor-értékű függvényt nevezünk. Ezeket mindig aláhúzott és többnyire görög betűkkel jelöljük.

Egy valószínűségi vektorváltozó komponensei közönséges, vagyis számértékű valószínűségi változók. Ha ezek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, akkor valószínűségi vektorváltozónk jelölésére a $\underline{\xi}$ jelölés mellett a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ szimbólumot is használjuk.

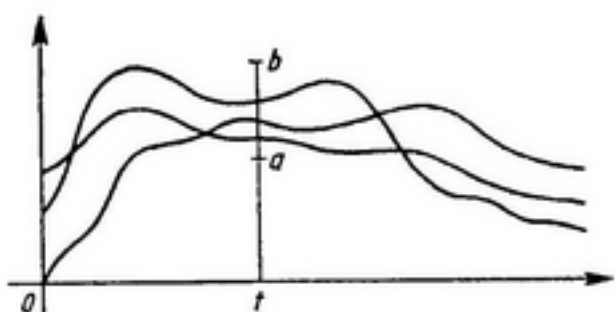
Az előbbi esetben véges sok valószínűségi változó együtteséről volt szó. Formailag ennél is általánosabb a *sztohasztikus folyamat* fogalma, a különbség csak az, hogy ezt az időben lejátszódó véletlen jellegű folyamatok matematikai leírására használjuk. Tekintsük az időtengely valamely T részhalmazát. Ez tehát bizonyos időpontok összessége, mely adott esetben lehet egy időintervallum, esetleg az egész időtengely vagy csak bizonyos t_1, t_2, \dots diszkrét időpontok halmaza. Miközben a véletlen folyamat az időben lefut, a szóban forgó rendszer egy jellemzője minden egyes $t \in T$ időpontban felvesz egy véletlen jellegű értéket. Minden $t \in T$ időponthoz tehát tartozik egy ξ_t valószínűségi változó. Szokásos a $\xi(t)$ jelölés is.

Sztohasztikus folyamatokon bizonyos ξ_t valószínűségi változók egyparaméteres sokaságát értjük, ahol a t paraméter egy T (általában időpont-) halmazon fut keresztül.

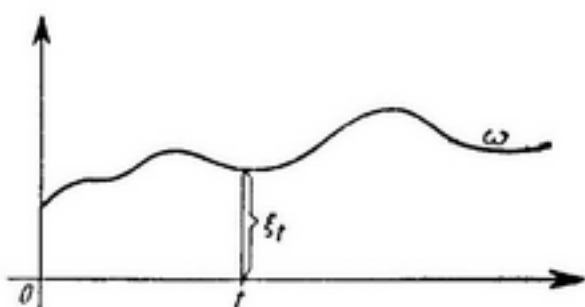
⁶ Egy kísérletet általában nagyon sok különböző eseménnyel lehet írni, ennek ellenére a legtöbb esetben van egy természetes, a problémához legjobban igazodó lehetőség.

Mindegyik ξ_t egy függvény az elemi események halmazán. Ha a $\xi_t = \xi_t(\omega)$, lényegében kétváltozós (t és ω) függvény ω változóját rögzítjük és t befutja a T időponthalmazt, akkor egy valós függvényt kapunk, melyet a sztochasztikus folyamat *realizációjának* nevezünk. Egy realizáció a folyamat egy konkrét lefutását jellemzi.

Tekintsünk egy időbeli véletlen folyamatot, melyet egy T időponthalmazon vizsgálunk. Ez egy kísérletként fogható fel, amelynek kimeneteit az idő bizonyos függvényei képviselik. Ω tehát egy, a T időponthalmazon értelmezett függvényösszesség. Egy elemi esemény egy függvény, egy lehetséges esemény pedig egy függvényhalmaz, Ω egy részhalmaza, pl. azoknak a függvényeknek a halmaza, amelyek egy $t \in T$ időpontban



16. ábra



17. ábra

a -nál nagyobb, de b -nél kisebb értéket vesznek fel (l. a 16. ábrát). Az e halmazhoz rendelt valószínűség lesz annak a valószínűsége, hogy a folyamat lefutásakor a t időpontban a és b közötti érték adódjék. Minden t időpont esetén értelmezhetünk egy ξ_t valószínűségi változót oly módon, hogy az ω elemi eseményt jelentő függvényhez hozzárendeljük ennek a t időpontban felvett értékét (l. a 17. ábrát). Ezáltal egy sztochasztikus folyamatot kapunk. Az ily módon értelmezett sztochasztikus folyamatot

függvénytér szerűnek nevezzük. Erre az a jellemző, hogy a realizáció egybeesik az elemi eseménnyel. Bár elvben minden sztochasztikus folyamat tárgyalható ily módon, ez mégsem célszerű minden esetben. Pl. értelmetlen dolog volna az $\eta_t = \xi_t^2$ vagy más, ξ_t -vel szorosan összefüggő sztochasztikus folyamatot más, a saját realizációi függvényterében tárgyalni. Adott probléma esetében legcélszerűbb valamely alapvető szerepű ξ_t sztochasztikus folyamatot függvénytér szerűnek tekinteni, ezáltal tisztázzuk, hogy mik az elemi események és a ξ_t -vel összefüggő további sztochasztikus folyamatok matematikai értelmezése már nem ütközik nehézségbe.

Egy ξ valószínűségi változónak értelmezhetjük egy $\eta = \varphi(\xi)$ függvényét. Ez szintén valószínűségi változó, melynek az $\omega \in \Omega$ elemi eseményen felvett értékét a $\varphi(x)$ függvény $x = \xi(\omega)$ helyen felvett értéke szolgáltatja. A $\varphi(x)$ függvény tehát egy utasítást rögzít, mely megadja, hogy a konkrét ξ értékhez a megfelelő η értéket hogyan kell meghatározni. Hasonlóan értelmezzük a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók egy $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ függvényét, ahol $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n változós függvény.

VALÓSZÍNÜSÉGI VÁLTOZÓK ELOSZLÁSAI

3.3. Az eloszlás és az eloszlásfüggvény. Minden ξ valószínűségi változó létesít a számegyenesen egy valószínűségeloszlást a következő értelemben. Legyen E egy számhalmaz, és tekintsük azoknak az ω elemi eseményeknek az összességét, melyeken ξ az E számhalmazba tartozó értékeket vesz fel. A gyakorlatban többnyire igen speciális halmazok érdekelnek bennünket, mégpedig főként az intervallumok és intervallumok összegeiből alkotott halmazok (egyetlen pontot is intervallumnak tekintünk, amelynek kezdő- és végpontja egybeesik), beszélhetünk azonban ezeknél bonyolultabb E halmazokról is. Azt az eseményt, hogy a ξ valószínűségi változó értéke az E halmazba esik, a $\xi \in E$ relációval jelölve, tekintsük ennek

$$P(\xi \in E) \quad (3.3.1)$$

valószínűségét. Lehetséges, hogy olyan E halmazt választunk,

amelybe ξ értéke egyáltalán nem eshet, ekkor azoknak az elemi eseményeknek az összessége, amelyekre teljesül a $\xi \in E$ reláció, az üres halmaz, tehát $P(\xi \in E) = 0$.

A (3.3.1) valószínűségek összessége kielégíti a valószínűségre vonatkozó I., II., III. követelményeket (Ω szerepét most az összes valós számok halmaza veszi át), ezek tehát valószínűségeloszlást alkotnak. Ezt a valószínűségeloszlást a ξ valószínűségi változó (valószínűség-) eloszlásának nevezzük.

A (3.3.1) valószínűségek összességének a megadása azonban nehézkes feladat, ezért célszerű olyan egyszerűbb, új fogalmat bevezetni, melyből ezek a valószínűségek mind származtathatók. Legyen x a számegyenes egy rögzített pontja, és tekintsük az

$$F(x) = P(\xi < x) \quad (3.3.2)$$

valószínűséget. Ha most x -et $-\infty$ -től ∞ -ig futtatjuk, akkor egy függvényt kapunk.

Az $F(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.

Az eloszlásfüggvénynek a következő tulajdonságai vannak:

$$a) \quad F(x_1) \leq F(x_2), \quad \text{ha } x_1 < x_2,$$

ekkor ui. a $\xi < x_1$ esemény maga után vonja a $\xi < x_2$ eseményt.

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Ezeket röviden úgy fejezzük ki, hogy $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.

A fenti határértékreklációk a 2.2. szakasz tételéből következnek. Elégdjünk meg a második összefüggés bizonyításával, az első bizonyítása ennek mintájára könnyen elvégezhető. Legyen $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, és tegyük fel, hogy $x_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$. Jelölje A_n azt az eseményt, hogy $\xi < x_n$.

Ekkor $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Eszerint

$$F(x_n) = P(\xi < x_n) = P(A_n) \rightarrow P(\Omega) = 1, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

amivel állításunkat bebizonyítottuk.

c) $F(x)$ minden x pontban balról folytonos, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x), \quad \text{ha } x_1 < x_2 < \dots \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Ugyanis ismét A_n -nel jelölve a $\xi < x_n$ és A -val a $\xi < x$ eseményt,

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots; \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n = A,$$

tehát a 2.2. szakasz tétele szerint

$$F(x_n) = P(\xi < x_n) = P(A_n) \rightarrow P(A) = P(\xi < x) = F(x), \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

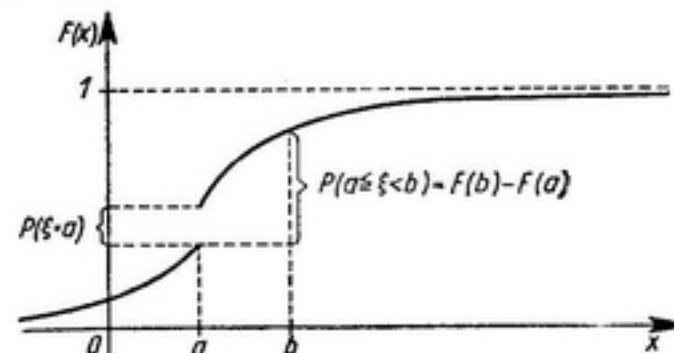
Lássuk most, hogyan származtathatók a (3.3.1) valószínűségek az eloszlásfüggvényből. Mivel

$$P(\xi < a) + P(a \leq \xi < b) = P(\xi < b), \quad (a < b),$$

$F(x)$ definíciójából következik, hogy (l. a 18. ábrát)

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a). \quad (3.3.3)$$

Meghatározhatjuk a $\xi = a$ esemény valószínűségét is. Ha (3.3.3)-ban b egy csökkenő sorozaton keresztül a -hoz tart, akkor a



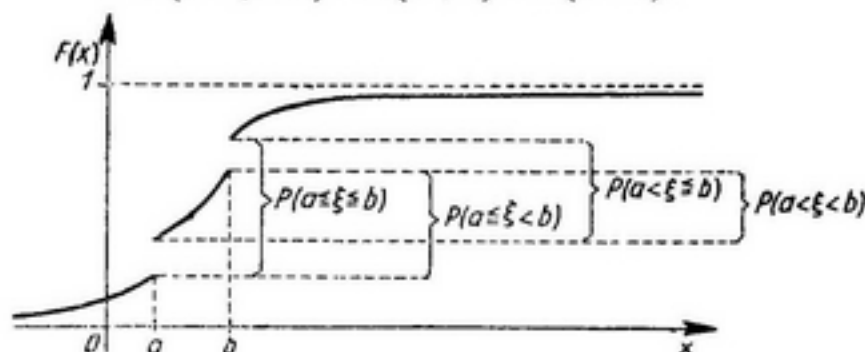
18. ábra

2.2. szakasz tétele szerint a bal oldal határértéke a $P(\xi = a)$ valószínűség, a jobb oldalon pedig $F(a+0) - F(a)$ adódik, tehát (l. a 18. ábrát)

$$P(\xi = a) = F(a+0) - F(a). \quad (3.3.4)$$

A (3.3.3) és (3.3.4) egyenlőségek összevetésével az olvasó egyszerűen beláthatja az alábbi egyenlőségek helyességét (l. a 19. ábrát).

$$\begin{aligned} P(a < \xi < b) &= F(b) - F(a+0); \\ P(a \leq \xi \leq b) &= F(b+0) - F(a); \\ P(a < \xi \leq b) &= F(b+0) - F(a+0). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$



19. ábra

A (3.3.4) egyenlőségből következik, hogy ha $F(x)$ az x változó folytonos függvénye, akkor $P(\xi = a) = 0$, ξ tehát minden értékét 0 valószínűséggel veszi fel. Ekkor a (3.3.3) és (3.3.5) valószínűségek egyenlők.

Ha egy E számhalmaz közös pont nélküli időintervallumok összege, akkor a $P(\xi \in E)$ valószínűség az egyes intervallumok valószínűségeinek az összege, (3.3.3) és (3.3.5) szerint tehát az $F(x)$ függvény a $P(\xi \in E)$ valószínűséget is meghatározza. Ennél bonyolultabb E halmazok esetén az okoskodás is bonyolultabb, gyakorlati szempontból azonban ilyen halmazok valószínűségeinek az ismeretére nincs szükségünk.

3.4. Eloszlások osztályozása. A valószínűségi változóknak és eloszlásaiknak a következő fajtáit különböztetjük meg.

1. Diszkrét eset. Diszkrétnek nevezzük a ξ valószínűségi változót és annak eloszlását, ha ξ lehetséges értékei egy véges vagy végtelen x_1, x_2, \dots sorozatot alkotnak. Ekkor az $F(x)$

eloszlásfüggvény helyett szívesebben dolgozunk a

$$p_k = P(\xi = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

valószínűségekkel. Ezek egyértelműen meghatározzák ξ eloszlását. A $\xi \in E$ esemény ui. úgy jöhet létre, hogy a $\xi = x_k$ események közül valamelyik bekövetkezik, ahol $x_k \in E$. Ennek alapján kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$P(\xi \in E) = \sum_{x_k \in E} P(\xi = x_k); \quad (3.4.1)$$

speciálisan:

$$F(x) = P(\xi < x) = \sum_{x_k < x} P(\xi = x_k). \quad (3.4.2)$$

2. Folytonos eset. Folytonosnak nevezzük a ξ valószínűségi változót és annak eloszlását is, ha van olyan $f(x) \geq 0$ függvény, hogy a számegetes minden (a, b) intervalluma esetén

$$F(b) - F(a) = P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.4.3)$$

Az $f(x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük. Az a és b határok lehetnek $-\infty$ -nel, ill. $+\infty$ -nel is egyenlők. (3.4.3)-ból az $a = -\infty$, $b = x$ esetben azt kapjuk, hogy

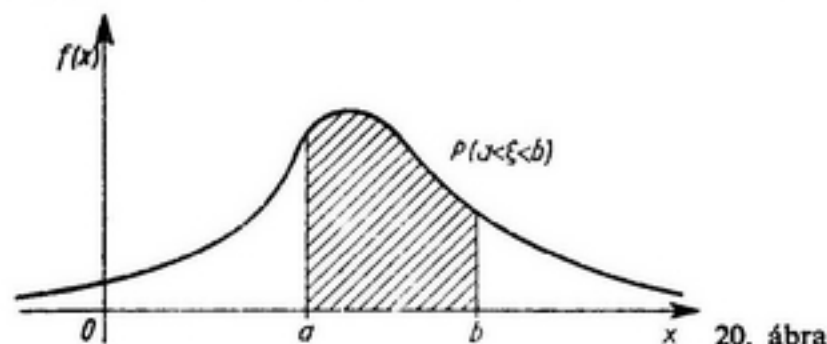
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (3.4.4)$$

Ha pedig $a = -\infty$, $b = \infty$, akkor mivel $P(-\infty < \xi < \infty) = 1$, az adódik, hogy a sűrűségfüggvénynek az egész számegetesen vett integrálja 1-gyel egyenlő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (3.4.5)$$

A (3.4.4) egyenlőség szerint $F(x)$ az x változó folytonos függvénye, ξ tehát minden értékét 0 valószínűséggel veszi fel.

ennélfogva az $a \leq \xi \leq b$, $a \leq \xi < b$, $a < \xi \leq b$ események valószínűségei megegyeznek az $a < \xi < b$ esemény valószínűségével, az



20. ábra

$f(x)$ függvény a -tól b -ig vett integráljával (l. a 20. ábrát). Végül (3.4.4) szerint $F(x)$ nemcsak folytonos, de differenciálható függvény is és

$$f(x) = F'(x), \quad (3.4.6)$$

amiből az is következik, hogy ξ eloszlása egyértelműen meghatározza az $f(x)$ sűrűségfüggvényt.

Ha egy ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékeinek a száma igen nagy, és ezek sűrűn egymás mellett helyezkednek el, akkor célszerű ξ eloszlását alkalmas folytonos eloszlással közelíteni. Ilyenkor ξ értékeit véges sok csoportba osztjuk, és keresünk egy olyan $f(x)$ sűrűségfüggvényt, melynek az egyes csoporthatárok közötti integráljai közelítően megadják az egyes csoportok valószínűségeit.

3. Kevert eset. A gyakorlatban előfordul olyan valószínűségi változó is, amelynek eloszlása az előbbi két típus keverékének tekinthető, vagyis bizonyos x_1, x_2, \dots értékeket pozitív valószínűséggel vesz fel, de van az eloszlásnak folytonos része is, pontosabban van egy olyan $f(x) \geq 0$ függvény, melynek az egész számegegyenesen vett integrálja pozitív (nem zérus!) és

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{a < x_k < b} P(\xi = x_k). \quad (3.4.7)$$

Speciálisan

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt + \sum_{x_k < x} P(\xi = x_k). \quad (3.4.8)$$

A kevert eset mégis aránylag ritkán fordul elő, ezért az elméleti tárgyalásban főként csak a diszkrét és a folytonos esettel foglalkozunk.

4. Az előbbiektől eltérő, logikailag lehetséges, tehát mesterségesen konstruálható valószínűségi változók és eloszlások, melyek azonban a gyakorlatban nem fordulnak elő. Ilyenekkel nem is foglalkozunk.

1. példa. Jelentse ξ két kocka feldobása esetén a dobott számjegyek összegét. A ξ valószínűségi változó diszkrét, lehetséges értékei a 2-től 12-ig terjedő egész számok. Ha bevezetjük a $p_j = P(\xi = j)$ jelölést, akkor az egyes p_j valószínűségek a következők:

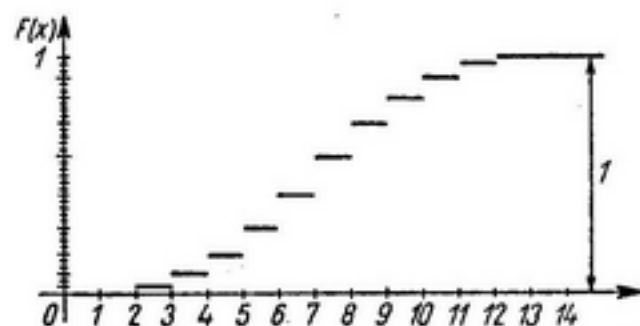
$$p_2 = \frac{1}{36}, p_3 = \frac{2}{36}, p_4 = \frac{3}{36}, p_5 = \frac{4}{36}, p_6 = \frac{5}{36}, p_7 = \frac{6}{36},$$

$$p_8 = \frac{5}{36}, p_9 = \frac{4}{36}, p_{10} = \frac{3}{36}, p_{11} = \frac{2}{36}, p_{12} = \frac{1}{36}.$$

Az $F(x)$ eloszlásfüggvényt az

$$F(x) = \sum_{j < x} p_j$$

formulára támaszkodva konstruáljuk. Grafikonját a 21. ábrán ábrázoltuk. $F(x)$ olyan lépcsős függvény, melynek a $j = 2, 3, \dots, 12$ helyeken

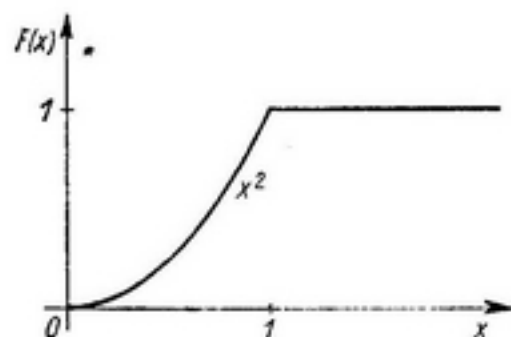


21. ábra

vannak ugrásai, és az ugrás nagysága a j helyen p_j -vel egyenlő. Ha $x \leq 2$, akkor $F(x) = 0$, ha pedig $x > 2$, akkor $F(x) = 1$.

2. példa. Tekintsük az előző szakasz 2. példájában szereplő $\xi = \sqrt{u^2 + v^2}$ valószínűségi változót, és tegyük fel, hogy a céltáblára leadott lövés a céltábla egyes tartományaiban a tartomány területével arányos valószínűséggel esik. Ha $x \leq 0$, akkor mivel $\xi < x$ lehetetlen esemény, $F(x) = 0$. Ha $x > 1$, akkor $\xi < x$ biztos esemény, tehát $F(x) = 1$. Ha $0 < x \leq 1$, akkor a $\xi < x$ esemény azt jelenti, hogy a találat a céltáblával koncentrikus, x sugarú körbe esik. Ennek alapján

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{x^2 \pi}{\pi} = x^2, \text{ ha } 0 < x \leq 1.$$



22. ábra

Az $F(x)$ eloszlásfüggvényt a 22. ábrán láthatjuk. A ξ valószínűségi változó folytonos, mert

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

ahol az $f(x)$ sűrűségfüggvény a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 1. \end{cases}$$

3. példa. Egy üres víztárolót egy folyó vizével akarunk feltölteni. Ezt a feltöltést — mondjuk — az év egy meghatározott hónapjában végezzük. Jelölje η a folyónak a szóban a forgó hónapra eső vízhozamát, η általában folytonos eloszlású valószínűségi változó. Jelölje $g(x)$ ennek sűrűségfüggvényét ($g(x) = 0$, ha $x < 0$), és jelölje K a tároló köbtartalmát. Mind az η , mind a K értékét m^3 -ben szokás kifejezni. Ha $\eta < K$, akkor a tároló

η , ha $\eta \geq K$, akkor a tároló $K m^3$ vizet tartalmaz, és a felesleges víz túlfolyik. Jelölje ξ a hónap végén a tárolóban levő víz mennyiségét m^3 -ben. Ez szintén valószínűségi változó, amelynek kevert eloszlása van, ha

$$\int_K^\infty g(x) dx > 0.$$

Ennyi ui. annak a valószínűsége, hogy $\xi = K$, vagy ami ugyanazt jelenti, $\eta \geq K$. Ha $f(x)$ a következő függvény:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \leq K, \\ 0, & \text{ha } x > K, \end{cases}$$

akkor minden $a < b$ esetén

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx, \text{ ha } K \leq a \text{ vagy } K \geq b;$$

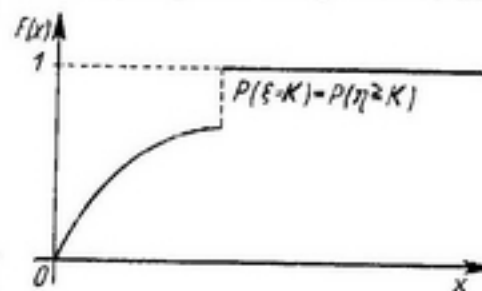
$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx + P(\xi = K), \text{ ha } a < K < b.$$

A ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének alakját a 23. ábra szemlélteti. Az $F(x)$ függvénynek az $x = K$ helyen

$$P(\xi = K) = \int_K^\infty g(x) dx$$

nagyságú ugrása van.

Az eloszlásokra vonatkozó további és tulajdonképpen legfontosabb „példákkal” az 5., 6. és a 7. fejezetek foglalkoznak.

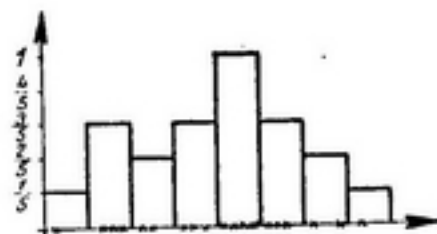


23. ábra

3.5. A hisztogram. A folytonos eloszlás esetén eléggé kis Δx -et választva, azt kapjuk, hogy

$$P(x \leq \xi \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \approx f(x) \Delta x. \quad (3.5.1)$$

Ez a formula lehetővé teszi a sűrűségfüggvény empirikus közelítését. Osszuk fel azt az intervallumot, melybe ξ lehetséges értékei esnek, sok kis, egyenként Δx hosszúságú intervallum összegére. Azt a kísérletet, mellyel ξ kapcsolatos, elvégezzük n -szer, és feljegyezzük a ξ -re kapott értékeket. Jelölje k_x azoknak az értékeknek a számát, amelyek x alatt vannak. Az $(x, x + \Delta x)$ intervallum fölé felrajzolunk egy



24. ábra

$$\frac{k_{x+\Delta x} - k_x}{n\Delta x} \quad (3.5.2)$$

magasságú téglalapot. Ezeknek a téglalapoknak a területe összegezve 1-et ad. Másrészt a

(3.5.2) szám nem más, mint az $x \leq \xi \leq x + \Delta x$ esemény relatív gyakorisága Δx -szel osztva. Ez (3.5.1) figyelembevételével $f(x)$ közelítő értékének tekinthető. A téglalapok felső oldalai tehát egy sűrűségfüggvény geometriai képe, mely az $f(x)$ pontos sűrűségfüggvény közelítésének tekinthető. Ezt a grafikont *hisztogramnak* nevezzük. (l. a 24. ábrát).

3.6. Valószínűségi változó függvényének eloszlása. Sok esetben találkozunk a következő feladattal: meghatározandó egy ξ valószínűségi változó $\eta = \psi(\xi)$ függvényének eloszlása ξ eloszlása ismeretében. Azzal az esettel érdemes csak részletesebben foglalkozni, amikor ξ folytonos eloszlású. Ekkor fennáll a következő tétel:

Ha ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$, és abban az intervallumban, melyből értékeit veszi, az $y = \psi(x)$ függvény monoton növekvő vagy monoton csökkenő, de mindig differenciálható függvény, amelynek inverz függvénye $x = \psi^{-1}(y)$, akkor az $\eta = \psi(\xi)$ valószínűségi változó is folytonos eloszlású és sűrűségfüggvénye a következő:

$$g(y) = f(\psi^{-1}(y)) \left| \frac{d\psi^{-1}(y)}{dy} \right|. \quad (3.6.1)$$

Bizonyítás. Elégedjünk meg annak az esetnek a bizonyításával, amikor $\psi(x)$ monoton növekvő, a másik eset bizonyítása lényegében nem különbözik ettől. η eloszlásfüggvénye a következő:

$$P(\eta < y) = P(\psi(\xi) < y) = P(\xi < \psi^{-1}(y)) = F(\psi^{-1}(y)),$$

ahol F a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ebből y szerinti differenciálással a kívánt formulára jutunk. $\psi^{-1}(y)$ deriváltja ez esetben pozitív, az abszolút értékre tehát nincs is szükség.

1. példa. Legyen $y = \varphi(x) = cx + b$ ($c \neq 0$), $\eta = c\xi + b$. Ekkor $\varphi^{-1}(y) = \frac{y-b}{c}$, tehát a (3.6.1) formula szerint η sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \frac{1}{|c|} f\left(\frac{y-b}{c}\right). \quad (3.6.2)$$

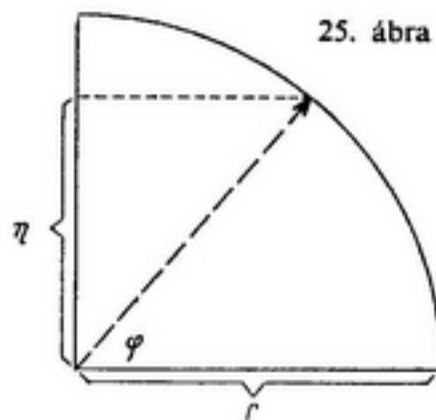
2. példa. Egy negyedkör alakú ernyőt a kör centrumából kiinduló és egyenletesen szóródó elektronnyalábbal bombázunk. Az egyenletességen azt értjük, hogy minden elektron φ szögének eloszlása egyenletes a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban (l. a 25. ábrát és az 5. fejezet 12. szakaszát), vagyis φ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a becsapódás η vetületének sűrűségfüggvényét. A rajzról leolvasható, hogy $\eta = r \cos \varphi$, tehát a (3.6.1) formulát az $y = r \cos x$ függvényre kell alkalmaznunk. Mivel $\varphi^{-1}(y) = \arccos \frac{y}{r}$, η sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}}, \quad \text{ha } 0 < y < r$$

és 0 egyébként.



25. ábra

3.7. Két valószínűségi változó együttes eloszlása. Több valószínűségi változó együttes vizsgálata esetén nem elégedhetünk meg külön-külön mindegyik valószínűségeloszlásnak az ismeretével. Ebből ui. semmilyen felvilágosítást nem kapunk az egymás között esetleg fennálló kapcsolatra.

Legyen pl. ξ és η két valószínűségi változó, mindegyik vegye fel az 1, 2, 3 értékeket, egyaránt $\frac{1}{3}$ valószínűséggel:

$$\begin{aligned} P(\xi = 1) &= P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = \\ &= P(\eta = 1) = P(\eta = 2) = P(\eta = 3) = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Ezek a valószínűségek semmiképpen nem határozzák meg a

$$p_{ik} = P(\xi = i, \eta = k), \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (3.7.2)$$

valószínűségeket. A zárójelben a $\xi = i$ és $\eta = k$ események összekapcsolása vesszővel e két esemény együttes bekövetkezését, szorzatát jelenti. A p_{ik} számok egészen tetszőlegesek természetesen nem lehetnek, (3.7.1) ui. megkívánja, hogy teljesüljenek a

$$p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$p_{1k} + p_{2k} + p_{3k} = \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, 3$$

feltételek. Ezek azonban még végtelen sok lehetőséget nyújtanak a p_{ik} számok megválasztására, hiszen egy 3×3 -as négyzetes séma egyes kockáiba kell olyan nem-negatív számokat írunk, melyeknek soronkénti és oszloponkénti összege mindig 1. Ez végtelen sok különböző módon lehetséges.

Ha a két ξ, η valószínűségi változót egyszerre vizsgáljuk, akkor lényegében egy (ξ, η) valószínűségi vektorváltozóval foglalkozunk. Ennek lehetséges értékei a sík pontjai. Legyen E egy síkbeli tartomány, és tekintjük annak a valószínűségét, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű síkbeli pont ebbe a halmazba essék (l. a 26. ábrát). Ezeknek a

$$P((\xi, \eta) \in E) \quad (3.7.3)$$

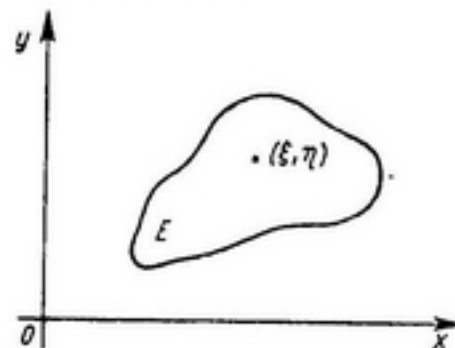
valószínűségeknek az összességét, mely rendelkezik a valószínűség I., II., III. tulajdonságaival (Ω szerepét a sík összes pontjainak a halmaza veszi át), a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó (valószínűség-) eloszlásának vagy a ξ és η valószínűségi változók együttes (valószínűség-) eloszlásának nevezzük.

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, lehetséges értékeik

$$\xi: x_1, x_2, \dots,$$

$$\eta: y_1, y_2, \dots,$$

akkor a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei az (x_i, y_k) , $i, k = 1, 2, \dots$ vektorok között vannak.⁷ Tekintsük az



26. ábra

$$r_{ik} = P(\xi = x_i, \eta = y_k), \quad i, k = 1, 2, \dots \quad (3.7.4)$$

valószínűségeket, melyek között ξ és η speciális kapcsolata folytán 0-k is lehetnek. Ezek meghatározzák a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó eloszlását, a (3.7.3) valószínűségek összességét, mégpedig

$$P((\xi, \eta) \in E) = \sum_{(x_i, y_k) \in E} r_{ik}. \quad (3.7.5)$$

Az ilyen esetben a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót és egyben annak eloszlását is *diszkrétnek* nevezzük.

Ha van olyan $h(x, y) \geq 0$ kétváltozós függvény, hogy a sík minden E tartománya esetén

$$P((\xi, \eta) \in E) = \iint_E h(x, y) dx dy, \quad (3.7.6)$$

akkor a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót és annak eloszlását is *folytonosnak* nevezzük. A $h(x, y)$ függvényt a (ξ, η) valószí-

⁷ Lehetséges értéken csak pozitív valószínűségű értéket értünk.

nűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényének, vagy a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének nevezzük. A (3.7.6) formulából következik, hogy az együttes sűrűségfüggvénynek az egész síkon vett integrálja 1-gyel egyenlő.

Sem kevert, sem más speciális típusú valószínűségeloszlással valószínűségi vektorváltozókkal kapcsolatban nem foglalkozunk.

3.8. Az együttes eloszlásfüggvény. Akármilyenek legyenek is a ξ és η valószínűségi változók, mindenképpen értelmezhető ezek $H(x, y)$ ún. *együttes eloszlásfüggvénye*. Ennek definíciója a következő:

$$H(x, y) = P(\xi < x, \eta < y). \quad (3.8.1)$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan bebizonyítható, hogy a $H(x, y)$ függvénynek megvan az alábbi három tulajdonsága, melyek hasonlóak az egyváltozós eloszlásfüggvény három tulajdonságához.

- a) $H(x, y)$ az x és y változók monoton nem csökkenő függvénye;
- b) $H(-\infty, y) = H(x, -\infty) = 0$;
- c) $H(\infty, \infty) = 1$.

Ezekon kívül a $H(x, y)$ függvénynek van még egy további tulajdonsága is:

- d) Tetszőleges $\Delta x > 0, \Delta y > 0$ esetén fennáll a

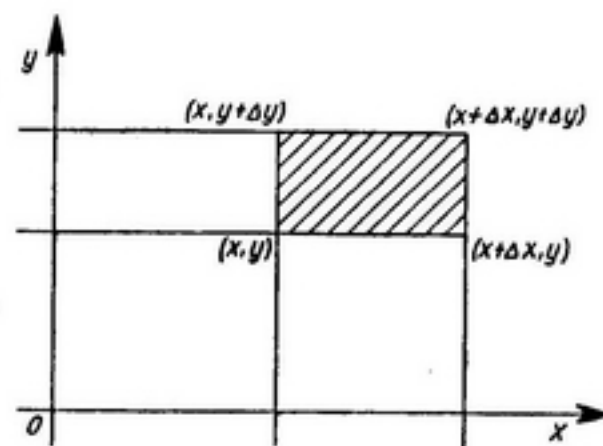
$$H(x + \Delta x, y + \Delta y) - H(x + \Delta x, y) - H(x, y + \Delta y) + H(x, y) \geq 0 \quad (3.8.2)$$

egyenlőtlenség. A bal oldalon álló kifejezés ui. pontosan egyenlő a

$$P(x \leq \xi < x + \Delta x, y \leq \eta < y + \Delta y) \quad (3.8.3)$$

valószínűséggel, mint az a 27. ábráról egyszerű megfontolással leolvasható. Tetszőleges x és y esetén $H(x, y)$ ui. nem más, mint annak a valószínűsége, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű vektor az (x, y) koordinátájú csúccsal bíró síknegyedbe, kvad-

rásba essék. Mármint annak a valószínűsége, hogy (x, y) a 27. ábrán látható besatírozott téglalapba essék, melyhez a baloldali és alsó határszakasz hozzátartozik, de a jobb oldali és a felső határszakasz nem, egyrészt (3.8.3)-mal egyenlő, másrészt a valószínűség additivitása miatt egyenlő (3.8.2) baloldalával is.



27. ábra

Folytonos együttes eloszlás esetén az E tartományt a sík (x, y) csúcspontú kvadránsának választva, (3.7.6) alapján azt kapjuk, hogy

$$H(x, y) = P(\xi < x, \eta < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y h(u, v) du dv; \quad (3.8.4)$$

ahonnan parciális deriválással a

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (3.8.5)$$

formula adódik. Ebből az is következik, hogy (ξ, η) egyértelműen meghatározza a $h(x, y)$ sűrűségfüggvényt, ha tehát van olyan $h(x, y)$, hogy (3.7.6) a sík minden tartományára teljesül, akkor csak egy ilyen függvény van.

Megfordítva, (3.8.5)-ből is következik (3.7.6), pontosabban, ha a $H(x, y)$ függvény $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y}$ vegyes parciális deriváltja

létezik, és ezt $h(x, y)$ -nal jelöljük, akkor fennáll a (3.7.6) egyenlőség ugyanezzel a $h(x, y)$ -nal, vagyis $h(x, y)$ a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye. Ez az állítás a koordinátatengelyekkel párhuzamos téglalap alakú tartományokra egyszerűen belátható. Ugyanis (3.8.3) egyenlő (3.8.2) bal oldalával, továbbá

$$\int_y^{y+\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 H(u, v)}{\partial u \partial v} du dv = \int_y^{y+\Delta y} \frac{\partial}{\partial y} (H(x + \Delta x, v) - H(x, v)) dy = \\ = H(x + \Delta x, y + \Delta y) - H(x, y + \Delta y) - H(x + \Delta x, y) + H(x, y).$$

Ha E ilyen téglalap alakú E_1, E_2, \dots tartományok összege, akkor a (3.7.6) egyenlőség a valószínűség III. tulajdonságából és az integrál additivitásából következik. Ennél bonyolultabb E halmazokkal nem foglalkozunk.

3.9. Peremeloszlások. Egy (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó eloszlása egyértelműen meghatározza a ξ és η valószínűségi változók külön-külön vett valószínűségeloszlását. Ezeket *peremeloszlásoknak* vagy *vetületi eloszlásoknak* nevezzük. Ha $F(x)$ a ξ , $G(y)$ pedig az η valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor nyilvánvalóan fennállnak az

$$F(x) = P(\xi < x, \eta < \infty) = H(x, \infty); \\ G(y) = P(\xi < \infty, \eta < y) = H(\infty, y) \quad (3.9.1)$$

egyenlőségek. Diszkrét ξ és η valószínűségi változók esetén, az előző szakasz jelöléseit megtartva, és bevezetve még a

$$p_i = P(\xi = x_i), \quad i = 1, 2, \dots, \\ q_k = P(\eta = y_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

jelöléseket, egyszerűen beláthatók a

$$p_i = \sum_k r_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ q_k = \sum_i r_{ik} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9.2)$$

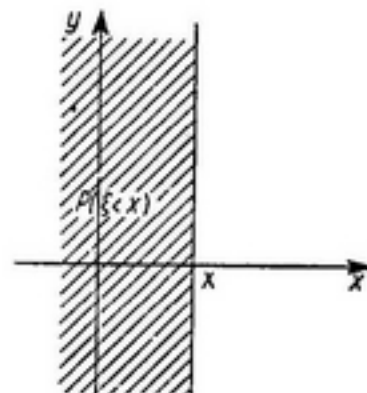
formulák. A peremeloszlás elnevezést az indokolja, hogy az r_{ik} számokkal egy négyzetes sémát tölthetünk ki, amelyben r_{ik} az i -edik sor k -adik eleme: ebben a négyzetes sémában az i -edik sorban álló elemek összege p_i , a k -adik oszlopban álló elemek összege q_k , melyeket a négyzetes séma peremén tüntetünk fel. A „vetületi eloszlás” elnevezést pedig az indokolja, hogy a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének x helyen felvett értéke, tehát a $P(\xi < x)$ valószínűség egyenlő annak a valószínűségével, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű síkbeli pont abba a félsíkba essék, mely a koordinátarendszer vízszintes tengelyére merőlegesen húzott és az x pontot metsző egyenestől balra fekszik (l. a 28. ábrát). Ennek a félsíknak a valószínűségét tehát ráhelyezzük, rávetítjük a vízszintes tengelyre, és így kapjuk meg a $P(\xi < x)$ valószínűséget. Hasonlóan értelmezhetjük a $G(y)$ eloszlásfüggvényt is. Ilyen értelemben egy síkbeli valószínűségeloszlást a sík egy tetszőleges egyenesére is rávetíthetünk.

Ha a ξ és η valószínűségi változók folytonos együttes eloszlásúak, akkor mindegyiknek külön-külön folytonos eloszlása van. A (3.9.1) egyenlőségekből ui. következik, hogy

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} h(u, v) dv du; \quad (3.9.3) \\ G(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} h(u, v) du dv.$$

Ezek differenciálható függvények, léteznek tehát az x és y valószínűségi változók,

$$F'(x) = f(x), \quad G'(y) = g(y)$$



28. ábra

sűrűségfüggvényei. (3.9.3)-ból adódik, hogy

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, v) dv,$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u, y) du,$$

melyekből, ha kényelmi szempontból az integrációs változókat átjelöljük, végül az

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy, \quad (3.9.4)$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx$$

formulákat kapjuk.

1. példa. Ha ξ és η az 1, 2, 3 értékeket veszik fel, és az egyes értékpárok valószínűségeit az alábbi táblázat középső része tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	Összeg
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
Összeg	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

akkor a $\xi = 1, 2, 3$ események valószínűségei az alsó sorban, az $\eta = 1, 2, 3$ események valószínűségei pedig a jobb oldali oszlopba rendre beírt számok,

2. példa. Ha ξ és η együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2), & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy = \frac{6}{5} \int_0^1 (x + y^2) dy = \frac{6}{5} \left(x + \frac{1}{3} \right), \quad \text{ha } 0 < x < 1$$

és 0 egyébként;

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx = \frac{6}{5} \int_0^1 (x + y^2) dx = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2} + y^2 \right), \quad \text{ha } 0 < y < 1$$

és 0 egyébként.

3.10. Feltételes eloszlások. Egy ξ valószínűségi változó A eseményre vonatkozó feltételes eloszlásfüggvényén az x változó

$$F(x|A) = P(\xi < x|A) \quad (3.10.1)$$

függvényét értjük, feltéve, hogy $P(A) > 0$. Ha az $F(x|A)$ függvény x szerint differenciálható, akkor az

$$f(x|A) = F'(x|A) \quad (3.10.2)$$

függvényt ξ A eseményre vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvényének nevezzük.

Ha A_1, A_2, \dots teljes eseményrendszer, akkor a teljes valószínűség tételéből kifolyólag

$$F(x) = \sum_k F(x|A_k)P(A_k). \quad (3.10.3)$$

Ha ξ diszkrét, lehetséges értékei x_1, x_2, \dots , akkor közvetlenül is belátható, de (3.10.3)-ból is következik, hogy

$$P(\xi = x_i) = \sum_k P(\xi = x_i|A_k)P(A_k). \quad (3.10.4)$$

Ha viszont léteznek az $f(x|A_k) = F'(x|A_k)$ feltételes sűrűség-

függvények, akkor (3.10.3)-ból következik, hogy létezik $f(x) = F'(x)$ is és

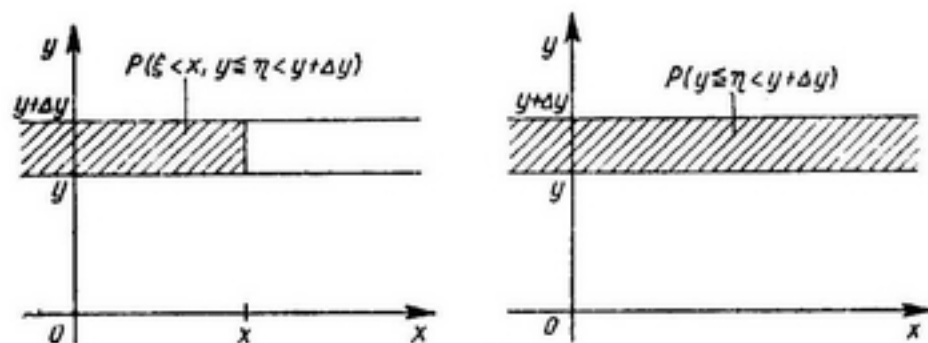
$$f(x) = \sum_k f(x|A_k)P(A_k), \quad (3.10.5)$$

Az A_1, A_2, \dots események gyakran egy η diszkrét valószínűségi változóval kapcsolatosak, és A_k azt az eseményt jelenti, hogy $\eta = y_k$, ahol y_1, y_2, \dots az η lehetséges értékei.

Bizonyos értelemben beszélhetünk olyan feltételes eloszlásról is, ahol az A feltétel valószínűsége 0, $P(A) = 0$. A gyakorlatban az A esemény ilyenkor általában abban áll, hogy egy η folytonos eloszlású valószínűségi változó egy y értékkel egyenlő. A ξ valószínűségi változó $\eta = y$ feltétel melletti $F(x|y)$ feltételes eloszlásfüggvényének definíciója a következő:

$$F(x|y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(\xi < x | y \leq \eta < y + \Delta y) \quad (3.10.6)$$

(l. a 29. ábrát), ahol természetesen feltételezzük, hogy a határérték létezik.



29. ábra

Mivel a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása e két változó segítségével megfogalmazott valamennyi esemény valószínűségét egyértelműen meghatározza, más szóval a valószínűségekre vonatkozó összes információt implicit tartalmazza, nem meglepő, hogy $F(x|y)$ a $H(x, y)$ eloszlásfüggvényből egyértelműen származtatható.

Különösebb figyelmet arra az esetre fordítunk, amikor ξ és η együttes eloszlása folytonos. Ekkor ξ és η külön-külön is folytonos eloszlásúak, tehát az $\eta = y$ feltétel valószínűsége 0, ennél fogva $F(x|y)$ -t a (3.10.6) határértékkel kell értelmeznünk. Mint az alábbiakból kitűnik, ez esetben a (3.10.6) határérték mindig létezik. A feltételes valószínűség és az eloszlásfüggvények definíciója szerint

$$\begin{aligned} P(\xi < x | y \leq \eta < y + \Delta y) &= \frac{P(\xi < x, y \leq \eta < y + \Delta y)}{P(y \leq \eta < y + \Delta y)} = \\ &= \frac{H(x, y + \Delta y) - H(x, y)}{G(y + \Delta y) - G(y)}. \end{aligned}$$

A számlálót és nevezőt egyaránt Δy -nal osztva, a tört értéke nem változik. Ha most elvégezzük a $\Delta y \rightarrow 0$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$F(x|y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y} H(x, y)}{g(y)}. \quad (3.10.7)$$

Figyelembe véve, hogy létezik a $h(x, y)$ sűrűségfüggvény, a jobb oldalon álló függvénynek létezik az x szerinti parciális deriváltja, tehát létezik az

$$f(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|y) \quad (3.10.8)$$

függvény is. Az $f(x|y)$ függvényt a ξ valószínűségi változó $\eta = y$ feltétel melletti *feltételes sűrűségfüggvényének* nevezzük. (3.10.7) és (3.10.8) szerint

$$f(x|y) = \frac{h(x, y)}{g(y)}. \quad (3.10.9)$$

Ha az η valószínűségi változó $\xi = x$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét $g(y|x)$ jelöli, akkor ugyanígy

$$g(y|x) = \frac{h(x, y)}{f(x)}. \quad (3.10.10)$$

A (3.10.9) és (3.10.10) egyenlőségekben a nevezőben álló függvénnyel átszorozva és figyelembe véve a (3.9.4) formulákat, azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)g(y)dy; \quad (3.10.11)$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y|x)f(x)dx.$$

Ezek a teljes valószínűség tételéhez analóg formulák. A BAYES-tételnek is megvan a folytonos analogonja. Ha (3.10.9)-ben $g(y)$ helyébe beírjuk (3.10.11) alsó sorának jobb oldalát, továbbá figyelembe vesszük, hogy (3.10.10) szerint $h(x, y) = g(y|x)f(x)$, akkor az adódik, hogy

$$f(x|y) = \frac{g(y|x)f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(y|x)f(x)dx}. \quad (3.10.12)$$

Analóg formula nyerhető $g(y|x)$ -re. A (3.10.12) formulára példát a 3.14. szakasz végén közlünk.

3.11. Valószínűségi változók függetlensége. A ξ és η valószínűségi változókat függetleneknek nevezzük, ha tetszőleges $a \leq b$, $c \leq d$ számok esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$P(a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d) = P(a \leq \xi \leq b)P(c \leq \eta \leq d). \quad (3.11.1)$$

A 2.2 szakasz tételére támaszkodva bebizonyítható, hogy ez ekvivalens azzal a feltétellel, mely szerint

$$H(x, y) = F(x)G(y), \quad (3.11.2)$$

ahol a bal oldalon a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye áll, a jobb oldalon szereplő $F(x)$ és $G(y)$

pedig a ξ és η valószínűségi változók eloszlásfüggvényei. A bizonyítást mellőzzük.

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, lehetséges értékeik az x_1, x_2, \dots , ill. y_1, y_2, \dots számok, akkor (3.11.1) ekvivalens azzal, hogy

$$P(\xi = x_i, \eta = y_k) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_k) \quad (3.11.3)$$

teljesül minden i -re és k -ra. Ezt könnyen bebizonyíthatjuk. Ha ui. a (3.11.1) egyenlőségben $a = b = x_i$, $c = d = y_k$, akkor (3.11.3)-hoz jutunk. Megfordítva, ha (3.11.3) teljesül minden i, k számpár esetén, akkor

$$\begin{aligned} P(a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d) &= \sum_{c \leq y_k \leq d} \sum_{a \leq x_i \leq b} P(\xi = x_i, \eta = y_k) = \\ &= \sum_{c \leq y_k \leq d} \sum_{a \leq x_i \leq b} P(\xi = x_i)P(\eta = y_k) = \\ &= \sum_{c \leq y_k \leq d} P(\eta = y_k) \sum_{a \leq x_i \leq b} P(\xi = x_i) = \\ &= P(a \leq \xi \leq b)P(c \leq \eta \leq d) \end{aligned}$$

és így a (3.11.1) egyenlőség teljesül.

Ha ξ és η folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvényeik $f(x)$ és $g(y)$, akkor $F'(x) = f(x)$, $G'(y) = g(y)$, amiből következik, hogy

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x)G(y)}{\partial x \partial y} = f(x)g(y).$$

Eszerint, ha ξ és η független valószínűségi változók és külön-külön folytonos eloszlásúak, akkor együttes eloszlásuk is folytonos és a $h(x, y)$ együttes sűrűségfüggvény egyenlő a két sűrűségfüggvény szorzatával:

$$h(x, y) = f(x)g(y). \quad (3.11.4)$$

Megfordítva: integrálással megmutatható, hogy (3.11.4)-ből

következik (3.11.2). Ugyanis

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x h(u, v) du dv = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u)g(v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^x f(u) du \int_{-\infty}^y g(v) dv = F(x)G(y). \end{aligned}$$

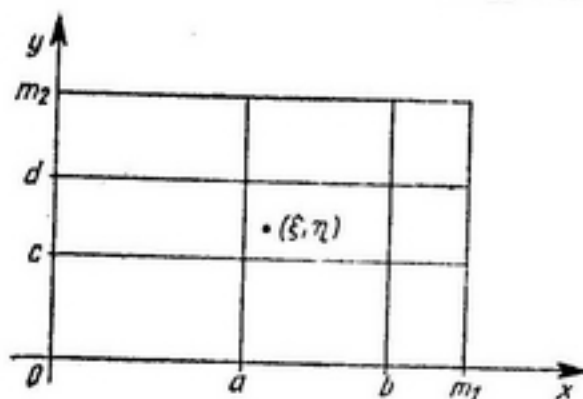
A (3.11.4) egyenlőség tehát a ξ, η valószínűségi változók függetlenségének szükséges és elegendő feltétele.

Ha mindkét valószínűségi változó diszkrét vagy mindkettő folytonos, akkor a függetlenség feltétele többnyire a (3.11.3), ill. (3.11.4) egyenlőségek formájában kerül felhasználásra.

A valószínűségi változók függetlenségével kapcsolatban ugyanazt elmondhatjuk, mint amit az események függetlenségével kapcsolatban mondtunk. Egyes esetekben éppen azt kell megállapítani, hogy a ξ és η valószínűségi változók függetlenek-e vagy sem. Pl. független-e egy folyó júliusi vízhozama egy közeli meteorológiai állomás által mért — mondjuk — június havi középhőmérséklettől. Független-e a családok havi összjövedelme a család nagyságától (egy családot véletlenszerűen kiválasztva, az összjövedelem és a család nagysága valószínűségi változókká válnak). A gyakorlatban ilyen jellegű kérdés sokszor vetődik fel. Megválaszolásukkal a matematikai statisztika foglalkozik. Más esetekben feltételezzük, hogy a valószínűségi változók függetlenek és erre támaszkodva következtetünk további valószínűségekre. Ez a feltételezés természetesen nem lehet légből kapott. Alaposan meg kell gondolnunk, hogy nincs-e valamilyen nem elhanyagolható kapcsolat valószínűségi változóink között. Ha ilyet nem találunk, a függetlenséget feltételezhetjük. Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy ezzel a (3.11.1) egyenlőség teljesülését tételezzük fel, vagyis szemléletes megfontolások alapján egy matematikai formula fennállására következtetünk. Ez a logikai ugrás

a kezdőnek nehézséget okozhat. Tulajdonképpen arról van itt szó, hogy a függetlenség, kapcsolat nélkülség tényének a (3.11.1) egyenlőség a matematikai megfogalmazása. A kettő között a hidat a tapasztalat teremti meg. Ilyen értelemben függetleneknek tekinthetjük pl. a következő valószínűségi változókat: egy folyó júliusi vízhozama és a júliusi csapadékmennyiség; két egymástól távoli kiszolgáló berendezésnél a várakozók számai; két izzólámpa élettartamai stb. Utóbbi esetben a függetlenséget (3.11.1) alapján nem lehet ellenőrizni, mert ha az élettartam ismeretessé válik, akkor természetesen az izzólámpa tönkremegy, és egy kísérlet esetén egy esemény relatív gyakorisága csak 0 vagy 1 lehet, egy kísérlet tehát semmit sem mond a valószínűségekre. Az élettartamok függetlenségének feltételezése mégis jogosnak tekinthető, mert sok más hasonló esetben, amikor a kísérlet többször is megismételhető, a függetlenséget ténylegesen ellenőrizték. Függetlenségvizsgálattal konkrét numerikus példán illusztrálva, a matematikai statisztika részben foglalkozunk.

1. példa. Tekintsünk egy téglalap alakú, m_1, m_2 oldalhosszúságú céltáblát. Ha a lövés egyenlő területű tartományokba egyenlő valószínűséggel esik és ξ, η a találati hely koordinátái (l. a 30. ábrát), akkor ξ és η független valószínűségi változók. U.



30. ábra

$$\begin{aligned} P(a \leq \xi \leq b) &= \\ &= \frac{(b-a)m_2}{m_1 m_2} = \frac{b-a}{m_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(c \leq \eta \leq d) &= \\ &= \frac{(d-c)m_1}{m_1 m_2} = \frac{d-c}{m_2}; \end{aligned}$$

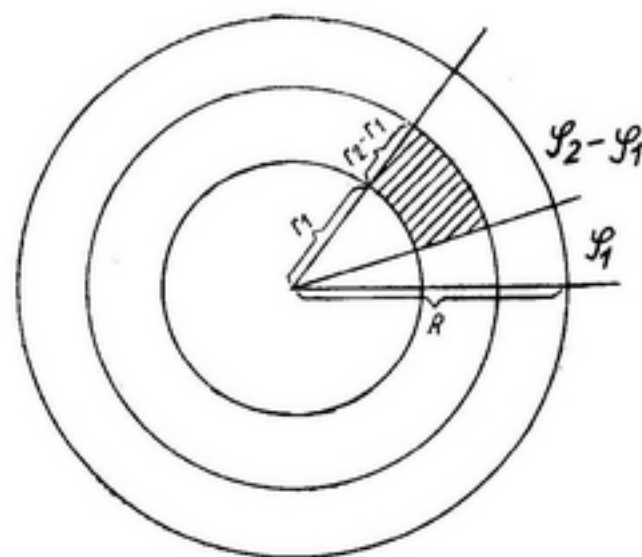
$$P(a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d) = \frac{(b-a)(d-c)}{m_1 m_2} = \frac{b-a}{m_1} \cdot \frac{d-c}{m_2}.$$

2. példa. Ha a céltábla kör alakú, sugara r és a találati hely polárkoordinátái ϱ és φ (l. a 31. ábrát), akkor ezek független valószínűségi változók. Uí.

$$P(r_1 \leq \varrho \leq r_2) = \frac{r_2^2 \pi - r_1^2 \pi}{R^2 \pi} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{R^2};$$

$$P(\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2) = \frac{R^2(\varphi_2 - \varphi_1)/2}{R^2 \pi} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi};$$

$$P(r_1 \leq \varrho \leq r_2, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2) = \frac{r_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) - r_1^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{2R^2 \pi} = \\ = \frac{r_2^2 - r_1^2}{R^2} \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}.$$



31. ábra

Az Olvasó könnyen beláthatja, hogy kör alakú céltábla esetén a derékszögű koordináták nem függetlenek, és négyzet alakú céltábla esetén a polárkoordináták nem függetlenek.

3.12. Diszkrét eloszlások kompozíciója. Gyakran előfordulnak olyan problémák, melyekben a vizsgált ζ valószínűségi változó két független, ξ és η valószínűségi változó összege:

$$\zeta = \xi + \eta.$$

Ha pl. két kockával dobunk, ξ és η az egyes kockákkal dobott számokat jelentik, akkor ζ a dobott számok összege. Két izzólámpa vagy gépalkatrész összegezett élettartama is két független valószínűségi változó összege. Azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy ξ és η valószínűségeloszlásainak segítségével hogyan határozhatjuk meg ζ valószínűségeloszlását. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor vagy mindkét valószínűségi változó diszkrét, vagy mindkettő folytonos eloszlású. Az előbbi esetben még azt is feltesszük, hogy ξ és η csak egész értékeket vehetnek fel. A gyakorlatban főként ezek az esetek fordulnak elő.

Ha ξ és η egész értékeket vesznek fel, akkor ζ is csak egész értékeket vesz fel. Vezessük be a

$$p_i = P(\xi = i),$$

$$q_k = P(\eta = k),$$

$$r_n = P(\zeta = n)$$

jelöléseket. A p_i és q_k valószínűségek ismeretében az r_n valószínűségek meghatározhatók. A $\zeta = n$ esemény a következő esetekben jöhet létre

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \xi = n+2, \quad \eta = -2, \\ & \xi = n+1, \quad \eta = -1, \\ & \xi = n, \quad \eta = 0, \\ & \xi = n-1, \quad \eta = 1, \\ & \xi = n-2, \quad \eta = 2, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

általában $\xi = n-k, \eta = k$, k tetszőleges egész szám. Ezek egymást páronként kizáró események, összegük pedig a $\zeta = n$ esemény. Ebből következik, hogy

$$r_n = P(\zeta = n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = n-k, \eta = k).$$

Mivel ξ és η függetlenek, fennáll a

$$P(\xi = n-k, \eta = k) = P(\xi = n-k)P(\eta = k) = p_{n-k}q_k$$

egyenlőség, ennél fogva

$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k}q_k. \quad (3.12.1)$$

A (3.12.1) formula a p_k , ill. q_k valószínűségekből alkotott eloszlásokból egy újabb r_n valószínűségeloszlást származtat. Ez utóbbit az előbbieket kompozíciójának nevezzük.

Ha ξ és η negatív értékeket nem vehetnek fel, akkor

$$p_k = q_k = 0, \text{ ha } k = -1, -2, \dots,$$

tehát (3.12.1) az

$$r_n = \sum_{k=0}^n p_{n-k}q_k \quad (3.12.2)$$

egyenlőségre redukálódik.

Példa. Valamilyen alkatrészt egymás utáni időtartamok alatt működ-tetünk. Tegyük fel, hogy minden egyes időtartamra u_1 annak a valószínűsége, hogy az alkatrész működjen, $v_1 = 1 - u_1$ annak a valószínűsége, hogy ne működjen, amellyel egyben az alkatrész használhatatlanná is válik. Jelölje ξ az alkatrész élettartamát, azoknak az időtartamoknak a számát, amelyeken keresztül működött. Ha az alkatrész működése az egyes időtartamokban független, akkor

$$p_k = P(\xi = k) = u_1^k v_1, k = 0, 1, 2, \dots$$

Ha ez az alkatrész használhatatlanná válik, akkor egy másikkal pótoljuk, amelyhez tartozó valószínűségek lehetnek az előbbi u_1, v_1 számok, de lehetnek valamilyen más u_2, v_2 számok is. Ennek az alkatrésznek az élettartamát η -val jelölve, az előzőkhöz hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$q_k = P(\eta = k) = u_2^k v_2, k = 0, 1, 2, \dots$$

A $\zeta = \xi + \eta$ összegezett élettartam valószínűség-eloszlását a (3.12.2) képlet

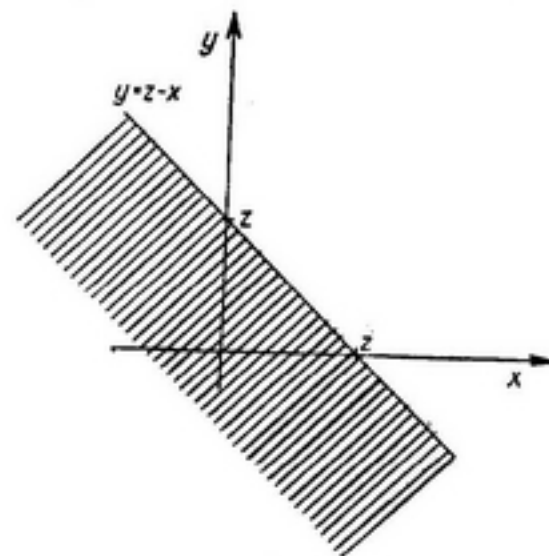
szerint kell meghatároznunk (ξ és η függetlenek). Eszerint

$$\begin{aligned} r_n = P(\zeta = n) &= \sum_{k=0}^n u_1^{n-k} v_1 u_2^k v_2 = \\ &= u_1^n v_1 v_2 \sum_{k=0}^n \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^k = u_1^n v_1 v_2 \frac{\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n+1} - 1}{\frac{u_2}{u_1} - 1} = \\ &= v_1 v_2 \frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{u_2 - u_1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, (u_1 \neq u_2). \end{aligned}$$

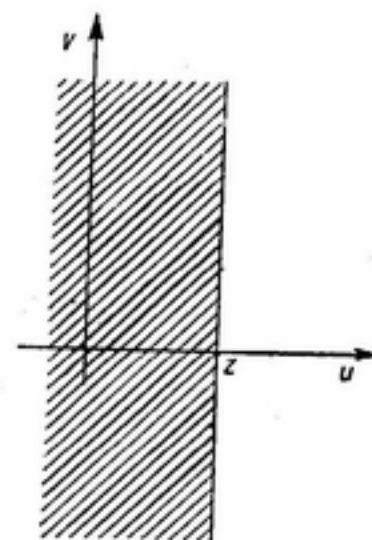
Ha $u_1 = u_2 = u, v_1 = v_2 = v$, akkor a geometriai sor összege $n+1$, tehát

$$r_n = (n+1)v^2 u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.13. Folytonos eloszlások kompozíciója. Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor mindkét valószínűségi változó folytonos eloszlású. Jelölje $R(z)$ a $\zeta = \xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A $\zeta < z$ esemény azt jelenti, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű síkbeli pont eleme annak az E tarto-



32a ábra



32b ábra

mánynak, melyet a 32a ábrán vonalkázással jelöltünk. Figyelembe véve, hogy a függetlenség miatt

$$h(x, y) = f(x)g(y),$$

a (3.7.6) formula felhasználásával az adódik, hogy

$$R(z) = P(\zeta < z) = \iint_E h(x, y) dx dy = \iint_E f(x)g(y) dx dy.$$

Vezessük be az

$$\begin{aligned} u &= x + y, \\ v &= y \end{aligned}$$

új változókat. Ez a transzformáció az x, y sík $x + y = z_0$ egyenesét az u, v sík függőleges tengelyével párhuzamos egyenesbe viszi át, mely az u -tengelyt a z_0 helyen metszi. Az E tartomány tehát a 32b ábrán vonalkázással jelölt E_1 tartományba transzformálódik. A transzformáció függvénydeterminánsa 1, tehát

$$\begin{aligned} R(z) &= \iint_E f(x)g(y) dx dy = \iint_{E_1} f(u-v)g(v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f(u-v)g(v) dv du. \end{aligned}$$

Innen látható, hogy $R(z)$ differenciálható, ζ tehát folytonos eloszlású. Ha ζ sűrűségfüggvényét $r(z)$ -vel jelöljük, $R'(z) = r(z)$, akkor tehát z szerinti differenciálással az

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)g(y) dy \quad (3.13.1)$$

formulához jutunk (v helyett y -t írtunk). Ha egy $r(z)$ sűrűségfüggvényt a (3.13.1) formula alapján származtatunk, akkor $r(z)$ -t az $f(x)$ és $g(y)$ sűrűségfüggvények kompozíciójának nevezzük. Ha $\xi \geq 0, \eta \geq 0$, akkor

$$f(x) = g(x) = 0, \quad \text{ha } x < 0$$

és ezáltal a (3.13.1) formula az

$$r(z) = \int_0^z f(z-y)g(y) dy \quad (3.13.2)$$

formulára redukálódik.

Példa. Egy izzólámpát addig használunk, míg ki nem ég, majd egy másik, nem feltétlenül ugyanolyan típusúval pótoljuk. Jelöljék ξ és η az egyes élettartamokat, és tegyük fel, hogy ezek függetlenek, továbbá sűrűségfüggvényeik a következők:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

$$g(y) = \mu e^{-\mu y}, \quad y > 0,$$

ahol λ és μ pozitív állandók. A $\zeta = \xi + \mu$ valószínűségi változó, az összegezett élettartam sűrűségfüggvényét a (3.13.2) formula alapján kell meghatároznunk. Eszerint a $\lambda \neq \mu$ esetben

$$r(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \mu e^{-\mu y} dy = \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}), \quad z > 0.$$

Ha $\lambda = \mu$, akkor

$$r(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, \quad z > 0.$$

3.14. Szorzat és hányados sűrűségfüggvénye. Független és folytonos eloszlású ξ, η valószínűségi változók $\xi\eta$ szorzatának és $\frac{\xi}{\eta}$ hányadosának a sűrűségfüggvényét is meghatározhatjuk az előbbi módszerrel. Mégis, más utat követünk, ezáltal ui. be tudunk mutatni egy általános eljárást, amely más problémák megoldásánál is előnyösen alkalmazható.

Jelölje $h(z)$ a szorzat, $s(z)$ pedig a hányados sűrűségfüggvényét, ezeket kell meghatároznunk. Határozzuk meg előbb $\xi\eta$ sűrűségfüggvényét az $\eta = y$ és ξ/η sűrűségfüggvényét ugyancsak az $\eta = y$ feltétel mellett. Az $\eta = y$ feltétel mellett $\xi\eta = \xi y$, $\xi/\eta = \xi/y$, ezek sűrűségfüggvényei pedig a 3.6. szakasz 1. pél-

dája szerint

$$\frac{1}{|y|} f\left(\frac{x}{y}\right), \quad (3.14.1)$$

ill.

$$|y| f(xy). \quad (3.14.2)$$

A (3.14.1) függvény $\xi\eta$, a (3.14.2) függvény pedig ξ/η sűrűségfüggvénye az $\eta=y$ feltétel mellett.⁸ Alkalmazva a (3.10.11) képletek közül — mondjuk — az első, az ottani ξ helyett $\xi\eta$ -ra, ill. ξ/η -ra, azt kapjuk, hogy

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) dy; \quad (3.14.3)$$

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f(xy) g(y) dy. \quad (3.14.4)$$

Ha történetesen $\eta \geq 0$, akkor $g(y)=0$ minden negatív y -ra, az előbbi formulák tehát a következőképpen specializálódnak:

$$h(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) g(y) dy; \quad (3.14.5)$$

$$s(x) = \int_0^{\infty} y f(xy) g(y) dy. \quad (3.14.6)$$

Ezzel a módszerrel $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényének képlete is levezethető, $f(x-y)$ ui. nem más, mint $\xi + \eta$ sűrűségfüggvénye az $\eta=y$ feltétel mellett.

⁸ A $\xi\eta$ szorzat ill. a ξ/η hányados $\eta=y$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényének felírásánál kihasználtuk azt a tényt, hogy ξ és η függetlenek. Függetlenség esetén ugyanis az $\eta=y$ feltétel megváltoztatja ξ eloszlását, most pedig mind a (3.14.1), mind a (3.14.2) sűrűségfüggvény felírásánál kihasználtuk azt, hogy ξ sűrűségfüggvénye az $\eta=y$ feltétel esetén is $f(x)$.

Példa. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, mindkettő egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumban. Határozzuk meg $\xi\eta$ sűrűségfüggvényét. Jelen esetben

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az (a, b) intervallum a pozitív féltengelyen fekszik, vagyis $a \geq 0$. Ebben az esetben (3.14.3) helyett elegendő a (3.14.5) formulát alkalmaznunk. Mivel $g(y)=0$, ha y az (a, b) intervallumon kívül fekszik, az intervallumon belül pedig $\frac{1}{b-a}$ -val egyenlő, következik, hogy

$$h(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dy.$$

A $\xi\eta$ szorzat értékei a^2 és b^2 közé esnek, $h(x)$ tehát 0-val egyenlő, ha $x \leq a^2$ vagy $x \geq b^2$. Tekintsük azt az esetet, amikor $a^2 < x < b^2$. Míg y fut a -tól b -ig, $\frac{x}{y}$ befutja az $\left(\frac{x}{b}, \frac{x}{a}\right)$ intervallumot. Ennek és az (a, b) intervallumnak a közös részén $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{b-a}$, az (a, b) intervallum fennmaradó részén pedig $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$. Ha $x \leq ab$, akkor ez a közös rész az $\left(a, \frac{x}{a}\right)$, ha pedig $x \geq ab$, akkor az $\left(\frac{x}{b}, b\right)$ intervallum.

Következésképpen

$$h(x) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{x}{a}} \frac{1}{y} dy = \frac{1}{(b-a)^2} \ln \frac{x}{a^2}, \quad \text{ha } a^2 < x \leq ab,$$

$$h(x) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_{\frac{x}{b}}^b \frac{1}{y} dy = \frac{1}{(b-a)^2} \ln \frac{b^2}{x}, \quad \text{ha } ab \leq x < b^2,$$

$$h(x) = 0, \quad \text{ha } x \leq a^2 \text{ vagy } x \geq b^2.$$

Egy példa feltételes sűrűségfüggvény meghatározására. Tegyük fel most, hogy ismeretes a ξ és ζ független valószínűségi változók eloszlása, azon-

ban valamilyen okból kifolyólag csak az összegüket tudjuk mérni, külön-külön egyiket sem. Határozzuk meg ξ feltételes sűrűségfüggvényét az $\eta = \xi + \zeta = y$ feltétel mellett. Az eljárás illusztrálására tekintsük azt az esetet, amikor ξ és ζ exponenciális eloszlásúak (l. az 5.9 szakaszt) λ , ill. μ paraméterrel, sűrűségfüggvényeik tehát

$$\lambda e^{-\lambda x}, \text{ ha } x > 0;$$

$$\mu e^{-\mu x}, \text{ ha } x > 0.$$

Megtartva a 3.10 szakasz jelöléseit és figyelembe véve a (3.10.12) formulát, az adódik, hogy

$$g(y|x) = \mu e^{-\mu(y-x)}, \text{ ha } 0 < x < y,$$

$$g(y|x)f(x) = \lambda \mu e^{-\mu(y-x)} e^{-\lambda x}, \text{ ha } 0 < x < y,$$

$$\int_0^y g(y|x)f(x) dx = \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} (e^{-\mu y} - e^{-\lambda y}), \text{ ha } y > 0, \lambda \neq \mu,$$

$$f(x|y) = (\lambda - \mu) \frac{e^{-(\lambda - \mu)x}}{1 - e^{-(\lambda - \mu)y}}, \text{ ha } 0 < x < y.$$

A $\lambda = \mu$ esetben azt kapjuk, hogy

$$f(x|y) = \frac{1}{y}, \text{ ha } 0 < x < y,$$

vagyis a $\xi + \zeta = y$ feltétel mellett egyenletes eloszlású a $(0, y)$ intervallumban.

3.15. Eloszlások keveréke. Ha általában egy $F(x)$ eloszlásfüggvény egy diszkrét vagy folytonos α paramétertől függő $F(x, \alpha)$ eloszlásfüggvény-sereg súlyozott átlaga, pontosabban

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha, \quad (3.15.1)$$

ahol $p(\alpha) \geq 0$ és $\int_{-\infty}^{\infty} p(\alpha) d\alpha = 1$ vagy

$$F(x) = \sum_{\alpha} F(x, \alpha) p(\alpha), \quad (3.15.2)$$

ahol $p(\alpha) \geq 0$, ill. $\sum_{\alpha} p(\alpha) = 1$, akkor az $F(x)$ eloszlásfüggvényt (ill. azt a valószínűségeloszlást, melyet $F(x)$ a számegyenesen meghatároz) az $F(x, \alpha)$ eloszlásfüggvény-sereg (ill. az általuk meghatározott valószínűségeloszlások) keverékének nevezzük. Ha az $F(x, \alpha)$ eloszlások folytonosak, vagyis léteznek az $f(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \alpha)$ sűrűségfüggvények, akkor az $F(x)$ eloszlás is folytonos és az $f(x) = F'(x)$ sűrűségfüggvényre fennáll az

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha, \quad (3.15.3)$$

ill. az

$$f(x) = \sum_{\alpha} f(x, \alpha) p(\alpha) \quad (3.15.4)$$

egyenlőség. Az $F(x, \alpha)$ eloszlások azonban lehetnek diszkréttek is, sőt lehetnek egyesek diszkréttek, mások folytonosak. A 3.4. szakaszban említett kevert eloszlástípus elnevezését is onnan kapta, hogy az tulajdonképpen nem egyéb, mint súlyozott átlaga egy diszkrét és egy folytonos eloszlásnak és így (3.15.2) alá tartozik. Eloszlások keverése szerepel pl. a (3.10.11), (3.13.1) formulákban is. Ezekben az átlagolt eloszlások egyben feltételes eloszlások is, és a formulák $F(x)$ meghatározását célozzák az $F(x, \alpha)$ eloszlások ismeretében. Más principium alapján is létrejöhetnek azonban keverékeloszlások, és gyakran a probléma abban áll, hogy egy keverékeloszlást összetevőire bontsunk, pl. $F(x, \alpha)$ analitikus alakja ismeretében (l. [21]).

3.16. Az együttes eloszlás értelmezése. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, akkor ezeket összefoglalhatjuk a

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

valószínűségi vektorváltozóba. Ez az n -dimenziós tér egy véletlen helyzetű pontja. Ha E az n -dimenziós tér egy tartománya, akkor megadható annak a valószínűsége, hogy $\underline{\xi}$ ebbe a tartományba essék, tehát a

$$P(\underline{\xi} \in E) \quad (3.16.1)$$

valószínűség. Akár ismerjük ezeket konkrétan, akár nem, mindenesetre elvben létező valószínűségek, melyeknek megvannak a valószínűség I., II., III. tulajdonságai (Ω szerepét az n -dimenziós tér összes pontjainak a halmaza tölti be).

A (3.16.1) valószínűségek összességét a $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásának vagy másképpen a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásának nevezzük.

A gyakorlatban a (3.16.1) valószínűségek közül csak egyesek, mégpedig általában az egyszerű alakú E tartományokhoz tartozó valószínűségek érdekelnek bennünket. Ami a valószínűségi vektorváltozók eloszlásainak típusait illeti, két fontos esetet említünk meg, a diszkrét és a folytonos esetet.

A $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozót és ennek eloszlását is diszkrétnek nevezzük, ha $\underline{\xi}$ az n -dimenziós tér vektorainak egy x_1, x_2, \dots véges vagy végtelen sorozatából veszi értékeit. Világos, hogy $\underline{\xi}$ akkor és csak akkor diszkrét, ha valamennyi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ komponense diszkrét.

Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók lehetséges értékei rendre

$$\begin{aligned} \xi_1 &: x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots; \\ \xi_2 &: x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots; \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_n &: x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, \end{aligned}$$

akkor a

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei az

$$(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)}) \quad (3.16.2)$$

vektorok között vannak, ahol i_1, i_2, \dots, i_n egymástól függetlenül befutják a pozitív egész-számokat. Minden ilyen vektornak van egy valószínűsége:

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}), \quad (3.16.3)$$

ezek közül egyesek esetleg 0-val egyenlők. A (3.16.3) valószínűségek összessége egyértelműen meghatározza a (3.16.1) valószínűségeket, ui.

$$P(\underline{\xi} \in E) = \sum_{(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)}) \in E} p_{i_1, i_2, \dots, i_n}. \quad (3.16.4)$$

Megfordítva: a (3.16.1) valószínűségek egyértelműen meghatározzák, sőt tartalmazzák a (3.16.3) valószínűségeket, mert ha E az egyetlen $(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)})$ pontból áll, akkor

$$P(\underline{\xi} \in E) = p_{i_1, i_2, \dots, i_n}.$$

Ha a (3.16.1) valószínűségeket valamennyi i_1, i_2, \dots, i_n számszámrendszerre összegezzük, 1-et kell kapnunk:

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = 1.$$

Ha van olyan $h(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ n -változós függvény, hogy az n -dimenziós tér minden E tartománya esetén

$$P(\underline{\xi} \in E) = \iint_E \dots \int h(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (3.16.5)$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\underline{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó folytonos eloszlású, vagy másképpen, a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi

változók együttes eloszlása folytonos. A $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényt az eloszlás sűrűségfüggvényének vagy a valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének nevezzük.

Ha az E tartomány maga az n -dimenziós tér, akkor $P(\xi \in E) = 1$, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1. \quad (3.16.6)$$

A sűrűségfüggvény integrálja az egész téren mindig 1-gyel egyenlő.

A (3.16.5) formulára támaszkodva belátható, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlása folytonos, akkor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ közül tetszőlegesen sokat kiválasztva, ezek együttes eloszlása is folytonos, amelynek sűrűségfüggvényét úgy kapjuk meg, hogy a $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényt minden azon változói szerint integráljuk ($-\infty$ -tól $+\infty$ -ig), amelyeknek megfelelő valószínűségi változók nem szerepelnek a kiválasztottak között. Ha az első k -t választjuk ki, akkor tehát $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ együttes sűrűségfüggvénye:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n. \quad (3.16.7)$$

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényén a

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) \quad (3.16.8)$$

n -változós függvényt értjük.

Ez a függvény mindegyik változójának monoton nem-csökkenő és balról folytonos függvénye, továbbá

$$\begin{aligned} H(-\infty, x_2, \dots, x_n) &= H(x_1, -\infty, \dots, x_n) = \\ &= \dots = H(x_1, x_2, \dots, -\infty) = 0; \quad H(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1, \end{aligned}$$

végül fennáll egy, a (3.8.2) egyenlőséghez analóg egyenlőség is.

A $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényben bizonyos változók helyébe ∞ -t helyettesítve, megkapjuk a többi változónak megfelelő valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényét. Így pl. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ együttes eloszlásfüggvénye a következő:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty).$$

Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlása folytonos, akkor (3.16.5) alapján

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \dots \int_{-\infty}^{x_1} h(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n, \end{aligned} \quad (3.16.9)$$

ahonnan következik, hogy

$$\frac{\partial^n H(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = h(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.16.10)$$

Megfordítva, ha létezik a (3.16.10) egyenlőség bal oldalán álló parciális derivált, akkor az eloszlás folytonos, sűrűségfüggvénye $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$, (3.16.10)-ből ui. egyszerűen következik (3.16.9), ebből pedig bebizonyítható (3.16.5) is.

3.17. A feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvény. A ξ_1, \dots, ξ_k valószínűségi változók $\xi_{k+1} = x_{k+1}, \dots, \xi_n = x_n$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvényét az

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) &= \\ &= P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k | \xi_{k+1} = x_{k+1}, \dots, \xi_n = x_n), \end{aligned}$$

ill. az

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) &= \\ &= \lim_{\Delta x_{k+1} \rightarrow 0} \dots \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n | x_{k+1} \leq \xi_{k+1} < x_{k+1} + \\ &\quad + \Delta x_{k+1}, \dots, x_n \leq \xi_n < x_n + \Delta x_n) \end{aligned}$$

egyenlőséggel értelmezzük, attól függően, hogy a feltétel valószínűsége pozitív, vagy 0. Utóbbi esetben még a határérték létezését is fel kell tételeznünk. Ez a határérték, továbbá a

$$\frac{\partial^k F(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_k} = f(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$$

ún. *feltételes sűrűségfüggvény* is mindig létezik, ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együttes eloszlása folytonos és

$$f(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(x_{k+1}, \dots, x_n)},$$

ahol a számlálóban $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, a nevezőben pedig ξ_{k+1}, \dots, ξ_n együttes sűrűségfüggvénye áll. Ebből egyszerűen adódnak a (3.10.11) formulák általánosításai.

3.18. Valószínűségi változók és vektorváltozók függetlensége.

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat függetleneknek nevezzük, ha bármilyen $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n$ számok esetén fennáll a

$$P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq \xi_n \leq b_n) = P(a_1 \leq \xi_1 \leq b_1) P(a_2 \leq \xi_2 \leq b_2) \dots P(a_n \leq \xi_n \leq b_n) \quad (3.18.1)$$

egyenlőség.

Ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye egyenlő az egyes eloszlásfüggvények szorzatával, tehát

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \dots F_n(x_n),$$

ahol

$$F_i(x_i) = P(\xi_i \leq x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18.2)$$

Diszkrét eloszlás esetén a függetlenség feltétele ekvivalens azzal, hogy

$$P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}) = P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}) P(\xi_2 = x_{i_2}^{(2)}) \dots P(\xi_n = x_{i_n}^{(n)}). \quad (3.18.3)$$

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és külön-külön folytonos eloszlásúak, akkor együttes eloszlásuk is folytonos, és együttes sűrűségfüggvényük egyenlő az egyes sűrűségfüggvények szorzatával:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n);$$

$$f_i(x_i) = F'_i(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18.4)$$

Megfordítva: e feltételből következik a valószínűségi változók függetlensége.

Beszélhetünk valószínűségi vektorváltozók függetlenségéről is.

A $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\underline{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)$, ..., $\underline{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s)$ valószínűségi vektorváltozókat függetleneknek nevezzük, ha bármilyen $a_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n; c_i \leq d_i, i = 1, 2, \dots, r; \dots, u_i \leq v_i, i = 1, 2, \dots, s$ számok esetén

$$P(a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n; c_i \leq \eta_i \leq d_i, i = 1, 2, \dots, r, \dots, u_i \leq \zeta_i \leq v_i, i = 1, 2, \dots, s) =$$

$$= P(a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n) P(c_i \leq \eta_i \leq d_i, i = 1, 2, \dots, r) \dots P(u_i \leq \zeta_i \leq v_i, i = 1, 2, \dots, s). \quad (3.18.15)$$

Ha az egyes vektorváltozókon belül a komponensek is függetlenek, akkor (3.18.5) szerint a rendelkezésre álló $n + r + \dots + s$ számú valószínűségi változó független.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő fontos tételt.

Tétel. Ha a $\underline{\xi}, \underline{\eta}, \dots, \underline{\zeta}$ valószínűségi vektorváltozók függetlenek és $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n -változós, $g(x_1, x_2, \dots, x_r)$ egy r -változós, ..., $k(x_1, x_2, \dots, x_s)$ egy s -változós függvény, akkor az

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$g(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r)$$

$$\vdots$$

$$k(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_s)$$

valószínűségi változók függetlenek.

E tétel egyik alkalmazási módja a következő: Meg akarjuk határozni bizonyos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók összegének az eloszlását. Először meghatározzuk $\xi_1 + \xi_2$ eloszlását. Mivel a (ξ_1, ξ_2) vektor független ξ_3 -tól, az előbbi tétel szerint $\xi_1 + \xi_2$ is független ξ_3 -tól. Ennek alapján meghatározzuk $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ eloszlását s. i. t.

Végtelen sok valószínűségi változót, ill. valószínűségi vektorváltozót akkor nevezünk függetlennek, ha akárhogyan is választunk ki közülük véges sokat, független valószínűségi változókat, ill. valószínűségi vektorváltozókat kapunk.

Példa. Bolyongás a számegeyenesen és a síkon. Tegyük fel, hogy egy pont a számegeyenes 0 pontjából elindulva ugrásszerű mozgást végez. Minden egyes ugrás történhet előre, vagy hátra, de mindig a szomszédos egész értékű pontok valamelyikébe. Feltesszük még, hogy minden egyes esetben $\frac{1}{2}$ a jobbra, ill. balrahaladás valószínűsége, és az egyes ugrások egymástól függetlenek.

Definiáljuk a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változókat a következő módon: $\xi_i = 1$, ill. -1 aszerint, amint az i -edik ugrás jobbra, ill. balra történik. Az ugrásokra vonatkozó feltételünk következtében ξ_1, ξ_2, \dots függetlenek, továbbá

$$P(\xi_i = 1) = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2},$$

$$i = 1, 2, \dots$$

A bolyongó pont helyét az n -edik lépés (ugrás) után az

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

valószínűségi változó adja meg. A bolyongás problémájával az 1.8 szakasz példájában is foglalkoztunk, de ott más feltételből indultunk ki. E két feltétel azonban ugyanarra az eredményre vezet, mostani feltételünk alapján ui. belátható, hogy

$$P(\eta_n = k) = \binom{n}{\frac{n-k}{2}} \frac{1}{2^n}, \quad \text{ha } n-k \text{ páros.}$$

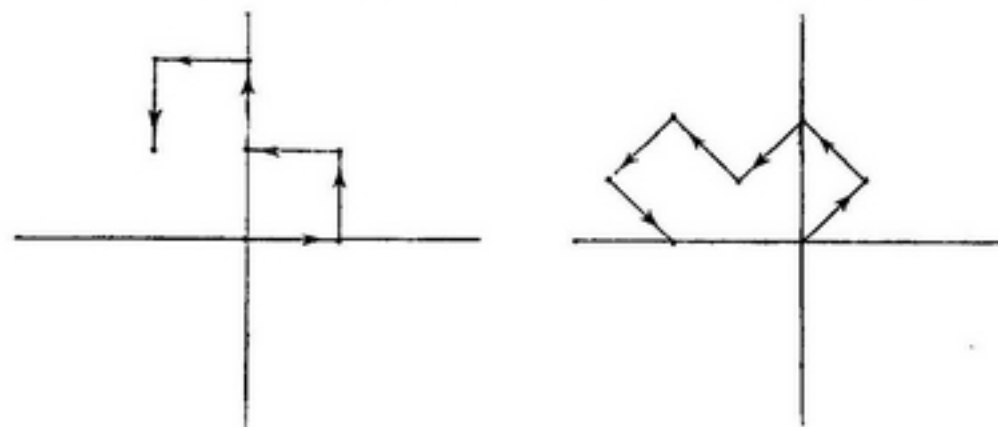
Ha $n-k$ páratlan, akkor az $\eta_n = k$ esemény lehetetlen.

Hasonlóan értelmezhető a sík rácspontjain történő bolyongó mozgás, a különbség csak az, hogy minden egyes pontból négy szomszédos pontba léphet a bolyongó pont. Feltesszük, hogy az ugrások egymástól függetlenek és mindig mind a négy lehetőség valószínűsége $\frac{1}{4}$. Most az i -edik ugrást egy ξ_i valószínűségi vektorváltozóval jellemezhetjük, mely az $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ értéket veszi fel, mégpedig mindegyiket $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. ξ_1, ξ_2, \dots függetlenek, a pont helyzetét az n -edik lépés után az

$$\underline{\eta}_n = \underline{\xi}_1 + \underline{\xi}_2 + \dots + \underline{\xi}_n$$

vektor adja meg. A $\underline{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2})$ valószínűségi vektorváltozó komponensei nem függetlenek, mert pl. $P(\xi_{i1} = 0) = \frac{1}{2}$, $P(\xi_{i2} = 0) = \frac{1}{2}$, de $P(\xi_{i1} = 0, \xi_{i2} = 0) = 0$.

Az $\eta_n = k$ valószínűség meghatározása végett célszerű a bolyongást átlós irányba történő ugrásokkal követni, amint az a 33. ábrán látható.



33. ábra

Ez is bolyongó mozgásként fogható fel, melynél az i -edik ugrást jellemző $\underline{\xi}_i$ valószínűségi vektorváltozó az $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ értékeket veszi fel, mindegyiket $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Könnyű belátni, hogy a $\underline{\xi}_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2})$ valószínűségi vektorváltozó komponensei függetlenek, és a $+1$, ill. -1 értékeket veszik fel, mindegyiket $\frac{1}{2}$ valószínűség-

gel. Minthogy a ζ_1, ζ_2, \dots valószínűségi vektorváltozók függetlenek, és mindegyik független komponensekből áll, a $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{21}, \zeta_{22}, \dots$ valószínűségi változók függetlenek. Ez a tény lehetővé teszi a

$$\mu_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n = \underline{m} = (m_1, m_2)$$

esemény valószínűségének egyszerű meghatározását, ahol \underline{m} a sík valamely rácpontja.

Mivel $\zeta_{11}, \zeta_{21}, \dots$ és $\zeta_{12}, \zeta_{22}, \dots$ a számegyenesen végbemenő bolyongásokként foghatók fel,

$$\begin{aligned} P(\mu_n = \underline{m}) &= P\left(\sum_{i=1}^n \zeta_i = \underline{m}\right) = \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n \zeta_{i1} = m_1, \sum_{i=1}^n \zeta_{i2} = m_2\right) = P\left(\sum_{i=1}^n \zeta_{i1} = m_1\right) \\ &P\left(\sum_{i=1}^n \zeta_{i2} = m_2\right) = \binom{n}{m_1} \binom{n}{m_2} \frac{1}{2^{2n}}, \end{aligned}$$

ha $n - m_1$ és $n - m_2$ páros. A $\mu_n = \underline{m}$ esemény egyébként lehetetlen.

Megjegyezzük még, hogy ζ_{11}, ζ_{12} és ξ_{11}, ξ_{12} között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$\zeta_{11} = \xi_{11} - \xi_{12}$$

$$\zeta_{12} = \xi_{11} + \xi_{12}.$$

Ugyanílyan kapcsolatban vannak μ_n és η_n komponensei is.

3.19. Ekvivalens valószínűségi változók. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat ekvivalenseknek nevezzük, ha minden r ($1 \leq r \leq n-1$) esetén a közülük kiválasztható valószínűségi változó r -esek együttes eloszlása azonos (r -től természetesen függetlenül).

1. példa. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ azonos eloszlásúak és függetlenek, akkor ekvivalensek is. Az állítás nyilvánvaló. Ha valószínűségi változóink közös eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor bármely valószínűségi változó r -es együttes eloszlása $F(x_1)F(x_2)\dots F(x_r)$.

2. példa. Mintavétel véges sokaságból. Egy urnában van N -cédula, melyek el vannak látva bizonyos x_1, x_2, \dots, x_N számokkal. Egymás után

véletlenszerűen kiválasztunk (visszatevés nélkül) n -et. Jelölje ξ_i az i -edik cédulán álló számot. Ekkor a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók ekvivalensek.

Az állítás bizonyítása egyszerű, ha az r_i számok között nincsenek egyenlők. Feltéhetjük, hogy ezek a számok $1, 2, \dots, N$. Mármost az $1, 2, \dots, N$ számok tetszőleges i_1, i_2, \dots, i_n n -ed osztályú (ismétlés nélküli) variációja esetén

$$P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_n = i_n) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdots \frac{1}{N-n+1}.$$

A $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektornak csak ezek a variációk (mint vektorok) a lehetséges értékei. Ha a $\xi_j = i_j$ események közül r -et kiválasztunk, akkor ezek együttes bekövetkezésének a valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy a fenti valószínűséget annyiszor vesszük, mint ahányszor a fennmaradó $n-r$ pozícióban a fennmaradó $N-r$ egész szám az összes különböző módon elhelyezhető. Ez a szám $(N-r)(N-r-1)\dots(N-n+1)$, tehát a $\xi_j = i_j$ események közül bármely r esemény együttes bekövetkezésének a valószínűsége

$$\frac{(N-r)(N-r-1)\dots(N-n+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}.$$

Az általános eset bizonyítására nem térünk ki.

3.20. Feladatok. 1. Egy A esemény indikátorváltozóján a következő $\xi = \xi(\omega)$ valószínűségi változót értjük: $\xi(\omega) = 1$, ha $\omega \in A$, $\xi(\omega) = 0$, ha $\omega \notin A$. Rajzoljuk fel ξ eloszlásfüggvényét.

2. Legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$. Határozzuk meg e^x sűrűségfüggvényét.

3. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye a következő: $h(x, y) = x + y$, ha $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $h(x, y) = 0$ egyébként. Határozzuk meg $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

4. Legyen ξ sűrűségfüggvénye $\lambda e^{-\lambda x}$, ha $x > 0$ és 0 egyébként, η sűrűségfüggvénye $\mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$ és 0 egyébként, legyenek továbbá e valószínűségi változók függetlenek. Határozzuk meg ξ/η sűrűségfüggvényét.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ és η azonos, folytonos eloszlású és független valószínűségi változók, akkor $P(\xi < \eta) = \frac{1}{2}$.

6. Az (a, b) intervallumban egymástól független és véletlenszerűen (egyenletes eloszlás szerint) választunk n pontot. Jelöljük ezeket $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Határozzuk meg az $\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ és a $\zeta = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit.

7. Legyenek $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}$ független valószínűségi változók, melyek csak a 0 és 1 értékeket veszik fel, mégpedig $P(\xi_{11} = 1) = P(\xi_{12} = 1) =$

$=P(\xi_{21}=1)=P(\xi_{22}=1)=\frac{1}{2}$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a

$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}$ determináns értéke $-1, 0$ ill. 1 .

8. Legyen $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Határozzuk meg ξ -nek a $\xi < K$ feltétel melletti feltételes eloszlásfüggvényét, ahol K valós állandó és $P(\xi < K) > 0$.

9. Legyen ξ és η két azonos eloszlású, független valószínűségi változó, közös sűrűségfüggvényük

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Bizonyítsuk be, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű síkbeli pont $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\varphi = \arctg \frac{\eta}{\xi}$ polárkoordinátái függetlenek és határozzuk meg ezek sűrűségfüggvényeit.

10. Bizonyítsuk be, hogy (3.11.1)-ből következik (3.11.2) és megfordítva.

11. Tekintsük azt a kísérletet, mely egy $(0, 1)$ intervallumbeli szám véletlenszerű kiválasztásában áll. Legyen $b-a$ annak a valószínűsége, hogy a számot az $(a, b) \subset (0, 1)$ intervallumból választjuk. Defináljuk a következő valószínűségi változókat:

$$f_k(x) = j, \text{ ha } x \text{ } k\text{-adik tizedesjegye } j, \\ 0 \leq x \leq 1; j = 0, 1, \dots, 9; k = 1, 2, \dots$$

Ábrázoljuk az $f_1(x), f_2(x), \dots$ valószínűségi változókat, melyek most a $(0, 1)$ intervallumban értelmezett függvények és bizonyítsuk be, hogy függetlenek.

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK JELLEMZŐI

A várható érték

A szórás

Korreláció

Valószínűségi változók további jellemző adatai

4.1. A várható érték értelmezése. A várható érték majdnem olyan régi fogalom, mint a valószínűség, mindkettő létrejöttében nagy szerepe volt a szerencsejátékoknak. Elősegíti tehát e fogalom megértését, ha utalunk arra, milyen jelentősége van a szerencsejátékoknál. Tegyük fel, hogy két egyén játszik egy játékot. Az 1. játékos a játék kimenetelétől függően r különböző összeget nyerhet, legyenek ezek

$$x_1, x_2, \dots, x_r.$$

Az x_1, x_2, \dots, x_r számok között negatívak is lehetnek, ezek a veszteséget jelentik. Az előbbi nyereségek mindegyike bizonyos valószínűséggel fordul elő, jelöljük ezeket

$$p_1, p_2, \dots, p_r.$$

Ha n számú, egymástól független játékot játszanak, az 1. játékos által nyert összeg (mely negatív szám is lehet):

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r,$$

ahol k_i az x_i összeg nyereségének gyakorisága. Ha n elég nagy, akkor a nagy számok törvénye szerint

$$\frac{k_1}{n} \approx p_1, \frac{k_2}{n} \approx p_2, \dots, \frac{k_r}{n} \approx p_r.$$

Az 1. játékos által nyert összeg egy játékra eső része

$$\begin{aligned} \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r}{n} &= x_1 \frac{k_1}{n} + x_2 \frac{k_2}{n} + \dots + x_r \frac{k_r}{n} \approx \\ &\approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_r p_r. \end{aligned}$$

A játékok számát egyre növelve, az 1. játékos nyereségösszege egyre inkább megközelíti a jobb oldalon álló összeget, ezt az 1. játékos nyeresége várható értékének nevezzük. A játék az 1. játékosra nézve előnyös, ill. hátrányos aszerint, amint a várható érték pozitív, ill. negatív. Ha a várható érték 0, akkor a játék méltányos.

A valószínűségelmélet már régóta kinőtte a szerencsejátékok kereteit. Ma már kísérletekről beszélünk játékok helyett (ami speciálisan lehet játék is) és valószínűségi változókról nyereségek helyett. Változatlanul érdeklődésre tart azonban számot egy valószínűségi változóval kapcsolatban egy olyan számérték, melyhez a kísérlet egymás utáni végrehajtása során nyert számértékek számtani átlaga konvergál, ha a kísérletek száma minden határon túl növekszik. Ez a konvergencia igen általános feltételek mellett teljesül (l. a 9. fejezetet) és a határérték a ξ valószínűségi változó várható értéke, amelyet $M(\xi)$ -vel jelölünk, és a következőképpen értelmezzük.⁹

Diszkrét eset. Ha ξ lehetséges értékei x_1, x_2, \dots , és ezeket rendre a p_1, p_2, \dots valószínűségekkel veszi fel, akkor

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i. \quad (4.1.1)$$

⁹ A következő három definíciót az ún. STIELTJES-integrál segítségével egyetlen definícióba foglalhatjuk össze. Eszerint

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Általában, ha $F(x)$ egy tetszőleges monoton függvény és $g(x)$ egy további függvény, akkor a $g(x)$ függvény $F(x)$ -re vonatkoztatott STIELTJES-integrálján a

$$\lim_{\sup (x_{k+1} - x_k) \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(x_k) (F(x_{k+1}) - F(x_k))$$

határértéket értjük. Ezzel a formulával egyben a fenti három kategóriába nem tartozó, tehát a gyakorlatban elő nem forduló, mesterségesen konstruált eloszlásokhoz is hozzárendelhetünk várható értéket, feltéve, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty.$$

Az ilyen eloszlásokkal azonban e könyv keretein belül nem foglalkozunk.

Végtelen sok x_i esetén feltesszük, hogy a jobb oldalon álló végtelen sor abszolút konvergens, különben a várható értéket nem értelmezzük. Erre a feltételre azért van szükség, mert a ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek egymásutáni elrendezése önkényes, márpedig ha egy végtelen sor csak konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor a tagok alkalmas átrendezésével tetszőleges összeget állíthatunk elő, sőt a (4.1.1) végtelen sort divergenssé is tehetjük. Az $M(\xi)$ várható értéket tehát csak abban az esetben értelmezzük, ha

$$\sum_i |x_i| p_i < \infty, \quad (4.1.2)$$

különben azt mondjuk, hogy ξ -nek nincs várható értéke. Ha $\xi \equiv c = \text{állandó}$, akkor $p(\xi = c) = 1$, tehát $M(\xi) = c$.

Folytonos eset. Ha ξ folytonos eloszlású, sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (4.1.3)$$

A diszkrét esethez hasonlóan, feltesszük hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty, \quad (4.1.4)$$

különben a várható értéket nem értelmezzük.

Kevert eset. Ha ξ kevert eloszlású valószínűségi változó és $p_i = P(\xi = x_i)$, akkor

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \sum_i x_i p_i, \quad (4.1.5)$$

feltéve, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx + \sum_i |x_i| p_i < \infty, \quad (4.1.6)$$

különben a várható értéket nem értelmezzük.

Mivel a várható érték nem függ a valószínűségi változó konkrét jelentésétől, hanem csak az eloszlásától, a várható értéket a ξ valószínűségi változó által a számegegyenesen létesített *eloszlás várható értékének* is nevezzük. A várható értékre több példát a speciális eloszlásokkal kapcsolatban és az ezután következő fejezetekben tárgyalunk. A fogalom illusztrálására azonban néhányat itt is megemlíünk.

Mindenekelőtt a diszkrét és folytonos eloszlás esetére megemlíünk egy-egy példát, amikor a várható érték nem létezik.

1. példa. Egy urnában van n piros és 1 fehér golyó. Egymás után húzunk, mindig egy golyót, a kihúzottakat minden egyes húzás után visszatesszük, és minden egyes húzás után még egy piros golyót teszünk az urnába. Jelölje ξ annak a húzásnak a sorszáma, amikor először húzunk fehér golyót. ξ az 1, 2, ... értéket veszi fel, mégpedig a valószínűségek szorzási szabálya alapján

$$P_k = P(\xi = k) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdots \frac{n+k-2}{n+k-1} \cdot \frac{1}{n+k} = \frac{n}{(n+k-1)(n+k)}.$$

A p_k valószínűségek összege 1, mivel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{(n+k-1)(n+k)} = n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= n \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{N+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

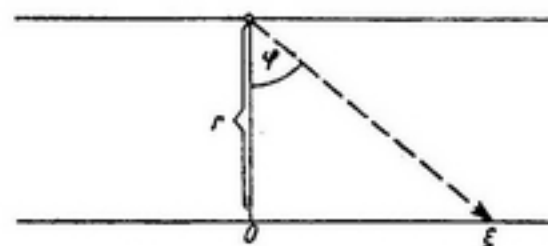
Eszerint annak a valószínűsége, hogy előbb-utóbb fehér golyót húzunk, 1. $M(\xi)$ azonban nem létezik, ill. azt is mondhatjuk, hogy $M(\xi) = \infty$, ui.

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = n \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \infty.$$

Ha pl. egy hivatalban a miénkkel együtt $n+1$ akta van, és amíg egyet elintéznek addig két új érkezik, továbbá minden intézkedés előtt az aktákat összekeverik, és úgy választanak egyet, akkor annak a valószínűsége, hogy véges idő alatt a miénkre is sor kerül, 1, a várakozási idő várható értéke azonban végtelen.

2. példa. Egy fényforrásból egy tőle r távolságra levő síkernyőre fényt bocsátunk. Egyszerűség kedvéért tekintsük az ernyő és a fény síkbeli vetületét, és tegyük fel, hogy minden egyes foton — mely rácsik az ernyőre — φ szöge (l. a 34. ábrát) egyenletes eloszlású a $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ intervallumban, vagyis φ sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



34. ábra

Egy foton tekintve, jelölje η annak becsapódási helyét (pontosabban a becsapódási hely vetületét). Ekkor nyilván $\eta = r \operatorname{tg} \varphi$, tehát a (3.6.1) formulát az $y = \varphi(x) = r \operatorname{tg} x$ függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy η sűrűségfüggvénye a következő:

$$g(y) = \frac{r}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2 + y^2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

η várható értéke nem létezik, mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| g(y) dy = \frac{r}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{r^2 + y^2} dy = \infty.$$

Ha egy eloszlás sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$g(y) = \frac{r}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2 + (y-a)^2}, \quad -\infty < y < \infty,$$

ahol $r > 0$, a pedig tetszőleges valós állandó, akkor azt *Cauchy-eloszlásnak* nevezzük. Ha $a = 0$, akkor az előbbi η valószínűségi változó sűrűségfüggvényét kapjuk. A Cauchy-féle eloszlásnak azonban nyilvánvalóan akkor sincs várható értéke, ha $a \neq 0$.

3. példa. Két ember asztaliteniszt játszik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p és q annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az 1. játékos nyerjen, ill. veszítsen. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egyes játszmák egymástól függetlenek. Kérdés, mennyi a szükséges játszmák számának a várható értéke.

Nyilvánvaló, hogy a mérkőzés összesen csak 3, 4 vagy 5 játszmából állhat. Jelöljük p_3, p_4, p_5 a megfelelő valószínűségeket. Ezek a következő kifejezésekkel egyenlők

$$p_3 = p^3 + q^3;$$

$$p_4 = 3p^3q + 3q^3p = 3pq(p^2 + q^2) = 3pq(1 - 2pq);$$

$$p_5 = 6p^3q^2 + 6q^3p^2 = 6p^2q^2(p + q) = 6p^2q^2.$$

Az első esetben ui. vagy az 1. vagy a 2. játékos nyer három játszmát egymás után. A második esetben vagy az 1. nyer három és a 2. egyet, vagy fordítva. Az utolsót mindenesetre a győztes nyeri. Az egyes játékosok által nyert játszmákat 1-es és 2-es számmal jelölve, a következő lehetséges sorrendek vannak:

A mérkőzést

az 1. nyeri
 1 1 2 | 1
 1 2 1 | 1
 2 1 1 | 1

a 2. nyeri
 2 2 1 | 2
 2 1 2 | 2
 1 2 2 | 2

Az utolsó számok előtt azért húztunk vonalat, hogy feltüntessük, mely számok permutálhatók egymás között. A bal oldalon minden sor valószínűsége p^3q , a jobb oldalon q^3p , három-három sor van mindkét oszlopban, tehát p_4 formulája helyes. p_5 meghatározásakor a vonás előtt mindkét oszlopban két 1-es és két 2-es van. Ezeknek $\binom{4}{2} = 6$ különböző sorrendje van, és mindegyik sor valószínűsége a vonás utáni számot is figyelembe véve p^3q^2 , ill. q^3p^2 . Tehát p_5 formulája is helyes. Nyilvánvaló, hogy teljesítenie kell a

$$p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

egyenlőségnek. Ezt egyébként a fenti formulák alapján ellenőrizni is lehet. A játszmák számát ξ -vel jelölve:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = \\ &= 3p_3 + 3p_4 + 3p_5 + p_4 + 2p_5 = 3 + p_4 + 2p_5 = \\ &= 3 + 3pq(1 - 2pq) + 12p^2q^2 = \\ &= 3(1 + pq + 2p^2q^2). \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló kifejezés a pq szorzat monoton növekvő függvénye. Mivel $q = 1 - p$ és az $y = x(1 - x)$ függvény maximuma az $x = \frac{1}{2}$ helyen van, azért a legnagyobb pq szorzat $\frac{1}{4}$, ennélfogva $M(\xi)$ a $p = q = \frac{1}{2}$

esetben lesz maximális, mégpedig ekkor

$$M(\xi) = \frac{33}{8} = 4,125.$$

Ha tehát a p és a q számokat nem is ismerjük, annyit mondhatunk, hogy nagyszámú mérkőzés esetén, minden 8 mérkőzésre 33 játszmát számítva, a tényleges játszmák száma egy ennél kisebb vagy ezzel egyenlő szám körül ingadozik. Az ingadozás nagyságára a szórás ad feleletet, melyet később tárgyalunk.

4. példa. A BANACH-GYUFÁK. Banach professzor szenvedélyes dohányos és igen szórakozott ember. Két zsebében van egy-egy doboz gyufa, mindegyiket $\frac{1}{2}$ valószínűséggel használja, ha rá akar gyújtani. Kérdés, hogy amikor valamelyik dobozt először húzza elő üresen, mennyi a másik dobozban levő gyufaszálak számának a várható értéke, ha eredetileg mindkét dobozban n gyufaszál volt.

Tekintsük azt az eseményt, hogy a bal zsebből húzza ki az üres dobozt, és most a jobb zsebében levő dobozban k gyufaszál van. Ekkor a bal zsebében levő dobozt $n+1$ -szer, a másikat $n-k$ -szor választotta, összesen tehát $2n+1-k$ húzásra volt szükség. Minden ilyen húzássorozat valószínűsége $\frac{1}{2^{2n+1-k}}$, ezek száma pedig

$$\binom{2n-k}{n},$$

mivel az utolsó húzásnak a bal zsebből kell történnie, az előző $2n-k$ húzás között pedig ennyi különböző módon lehet a bal zsebből való n számú húzást elosztani. A fenti esemény valószínűsége tehát $\binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n+1-k}}$. Ugyanennyi annak a valószínűsége, hogy a jobb zsebből húzza ki először az üres dobozt, és most a bal zsebében k gyufaszál van. E két valószínűség összege

$$P_k = \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Ezek összege nyilván 1-et ad:

$$\sum_{k=0}^n P_k = \sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}} = 1.$$

A másik dobozban levő gyufaszálak számának várható értéke pedig

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^n k p_k = \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

Ezt az összeget annak felhasználásával, hogy minden n esetén $\sum_{k=0}^n p_k = 1$, ki is számíthatjuk. A számolást nem részletezzük, csak a végeredményt közöljük:

$$M(\xi) = \binom{2n+1}{n} \frac{n+1}{2^{2n}} = 1.$$

A Stirling-formulára támaszkodva bebizonyítható, hogy

$$M(\xi) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}, \text{ ha } n \rightarrow \infty. \quad \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,128 \dots \right).$$

A feladat általánosítható több doboz, különböző számú gyufaszál és különböző használati valószínűségek esetére. Ebben a formájában a feladatnak nagy gyakorlati jelentősége van pl. üzletek, raktárak árukészletének a vizsgálatában.

5. példa. Meghatározzuk a 3.1. szakasz 2. példájában említett valószínűségi változók várható értékeit. Az η valószínűségi változó az 1, 2, ..., 10 értéket veszi fel, mégpedig

$$P(\eta = 10 - k) = \frac{\left(\frac{k+1}{10}\right)^2 \pi - \left(\frac{k}{10}\right)^2 \pi}{\pi} = \frac{2k+1}{100},$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned} M(\eta) &= \sum_{k=1}^{10} (10-k) P(\eta = 10-k) = \\ &= 10 - \sum_{k=1}^{10} k P(\eta = 10-k) = 10 - \sum_{k=1}^{10} k \frac{2k+1}{100} = 1,75. \end{aligned}$$

Ez a szám lesz körülbelül az eredmények számtani átlaga sok lövés után. Elég alacsony érték, ne felejtsük azonban el, hogy feltevés szerint a találat egyenlő területű tartományokba egyenlő valószínűséggel esik.

A ξ valószínűségi változó várható értékét a (4.1.3) formula alapján számítjuk ki. A sűrűségfüggvényt a III. fejezet 3.4 szakasz 2. példájában

határoztuk meg. Eszerint

$$M(\xi) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

6. példa. Visszatérünk a 3.4 szakasz 3. példájához. A víztárolóban levő vízmennyiséget megadó ξ valószínűségi változó várható értéke

$$M(\xi) = \int_0^M x g(x) dx + M \int_M^\infty g(x) dx.$$

Abban az esetben, ha $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$), ahol λ pozitív állandó, integrálással azt kapjuk, hogy

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda M}).$$

Közgazdasági vonatkozásban is felvetődik egy hasonló módon tárgyalható probléma. Jelölje η valamely piacon egy meghatározott cikk iránti keresletet. Ezt valószínűségi változónak tekintjük, feltételezve hogy eloszlása folytonos (ilyen közelítést alkalmaztunk), $g(x)$ -szel jelöljük a megfelelő sűrűségfüggvényt. A cikk kínálata legyen egy konstans M számérték. Ha ξ jelöli az eladott mennyiséget, akkor ez kevert eloszlású, melynek várható értékét a fenti formula adja meg.

7. példa. Várakozási idők minimumának várható értéke. A legkülönbébb vonatkozásban előforduló várakozási időre mint valószínűségi változóra gyakran feltételezik, hogy exponenciális eloszlású, (l. az 5.9 szakaszt), vagyis az eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

alakú, ahol λ pozitív állandó. Ha ez egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor

$$m = M(\xi) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Tegyük fel, hogy n számú, egymástól független történet van folyamatban, és jelöljük $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ezek véletlen hosszúságú időtartamait. Feltesszük még, hogy mindegyik exponenciális eloszlású; ξ_i várható értékét m_i -vel, ennek reciprokát, a sűrűségfüggvényben szereplő paramétert pedig λ_i -vel jelöljük. Határozzuk meg a

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

valószínűségi változó várható értékét. Ha a ξ_i -k egy autóbusz- vagy villamosmegállóhoz beérkező különböző számú autóbuszok vagy villamosok érkezéséig tartó időt jelentik, egy általunk választott időponttól kezdve, akkor ξ a leghamarabb érkezőre való várakozási idő. Ugyanez a helyzet áll elő, ha egy vállalatot telefonon fel akarunk hívni, és valamennyi vonal foglalt; ξ ekkor a szabad vonalra való várakozási idő. A ξ valószínűségi változó m várható értéke igen érdekes összefüggésben van az egyes valószínűségi változók m_i várható értékeivel. Határozzuk meg előbb ξ eloszlását. Mivel

$$\begin{aligned} P(\xi < x) &= P[\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < x] = \\ &= 1 - P(\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \dots, \xi_n \geq x) = \\ &= 1 - P(\xi_1 \geq x)P(\xi_2 \geq x) \cdots P(\xi_n \geq x) = \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \cdots e^{-\lambda_n x} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \end{aligned}$$

tehát ξ is exponenciális eloszlású, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ paraméterrel. Ebből következik, hogy

$$m = M(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}}.$$

Eszerint ξ várható értéke egyenlő az egyes várakozási idők várható értékei harmonikus átlagának n -ed részével. Ha pl. $n=2$, $m_1=3$, $m_2=6$, akkor

$$m = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2.$$

4.2. A várható érték néhány alapvető tulajdonsága. Az alábbiakban a várható értékre vonatkozó tételekkel foglalkozunk. Közülük egyeseket csak arra az esetre bizonyítunk, amikor a szóban forgó valószínűségi változók mind diszkrét. További tételeket bebizonyítunk arra az esetre is, amikor a valószínűségi változók mind folytonos eloszlásúak. A felsorolt tételek azonban egészen általános érvényűek.

1. tétel. Ha ξ korlátos, tehát $m_1 \leq \xi \leq m_2$, akkor létezik a várható értéke és

$$m_1 \leq M(\xi) \leq m_2.$$

Bizonyítás a diszkrét esetre. Feltétel szerint ξ valamennyi lehetséges értéke az m_1 és m_2 határok közé esik. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1(p_1 + p_2 + \dots) \leq x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots = \\ &= M(\xi) \leq m_2(p_1 + p_2 + \dots) = m_2. \end{aligned}$$

Bizonyítás a folytonos esetre. Feltételünkből következik, hogy az $f(x)$ sűrűségfüggvény 0-val egyenlő, ha $x < m_1$ vagy $x > m_2$. Ennek alapján

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_{m_1}^{m_2} m_1 f(x) dx \leq \int_{m_1}^{m_2} x f(x) dx = M(\xi) \leq \\ &\leq \int_{m_1}^{m_2} m_2 f(x) dx = m_2. \end{aligned}$$

2. tétel. Ha ξ várható értéke létezik, és c tetszőleges valós szám, akkor $c\xi$ várható értéke is létezik, és

$$M(c\xi) = cM(\xi).$$

Bizonyítás a diszkrét esetre. A $c\xi$ valószínűségi változó lehetséges értékei cx_1, cx_2, \dots , az ezekhez tartozó valószínűségek pedig változatlanul a p_1, p_2, \dots számok. A várható érték definíciója szerint

$$M(c\xi) = \sum_i cx_i p_i = c \sum_i x_i p_i = cM(\xi).$$

Bizonyítás a folytonos esetre. Ha $c=0$, az állítás nyilvánvalóan igaz. Ha $c \neq 0$, akkor $c\xi$ sűrűségfüggvénye:

$$g(x) = \frac{1}{|c|} f\left(\frac{x}{c}\right).$$

Ezt felhasználva, az adódik, hogy

$$M(c\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|c|} f\left(\frac{x}{c}\right) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = cM(\xi).$$

3. tétel. Ha $\xi \geq 0$ és $M(\xi) = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$.

Bizonyítás.¹⁰ ξ nem lehet folytonos eloszlású, mert abból, hogy $f(x) \geq 0$,

$$\int_0^{\infty} xf(x) dx = 0,$$

következik, hogy $f(x) = 0$, ekkor viszont $f(x)$ nem lehet sűrűségfüggvény. Hasonló okok miatt ξ nem lehet kevert eloszlású sem, marad tehát a diszkrét eset. Ha

$$M(\xi) = \sum_k x_k p_k = 0$$

és $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, akkor az $x_k > 0$ esetben $p_k = 0$, tehát a 0-nak x_1, x_2, \dots között elő kell fordulnia, és a megfelelő valószínűségnek 1-nek kell lennie. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $P(\xi = 0) = 1$.

4.3. Valószínűségi változók függvénye várható értékének meghatározása. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n valószínűségi változó, és tekintjük ezek $\eta = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ függvényét, akkor η várható értéke meghatározásának direkt útja az volna, hogy meghatározzuk (pl. folytonos eloszlás esetén) η sűrűségfüggvényét és $M(\eta)$ -t (4.1.3) alapján számítjuk ki. Erre azonban nincs szükség, mert $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együttes eloszlása ismeretében $M(\eta)$ -t egyszerűbben is meghatározhatjuk. Erre nyújt lehetőséget az alábbi tétel.

Tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ diszkrét valószínűségi változók, ξ_i lehetséges értékei $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$ és $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ egy n -változós függvény, akkor az $\eta = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vál-

¹⁰ A 124. oldal lábjegyzetében megjegyeztük, hogy az eloszlások osztályozásánál említett 4. kategóriába sorolt eloszlásokhoz is hozzárendelhető várható érték, amennyiben egy STEIJTER-integrál létezik. A 3. tétel egészen általános érvényű, mi azonban csak azt bizonyítottuk, hogy ha ξ eloszlása a diszkrét, a folytonos és a kevert eloszlások kategóriájába tartozik, akkor $P(\xi = 0) = 1$.

tozó várható értéke a következő

$$M(\eta) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \psi(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)}) \times \\ \times P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}), \quad (4.3.1)$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor abszolút konvergens. Ez egyben η várható értékének a létezését is biztosítja.

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együttes eloszlása folytonos, együttes sűrűségfüggvényük

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ akkor } \eta = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

várható értéke egyenlő a következő integrállal:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ \times h(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4.3.2)$$

feltéve, hogy az integrál az $|\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)|$ függvénnyel véve, véges. Ez a feltétel biztosítja $M(\eta)$ létezését is.

Bizonyítás a diszkrét esetre. Az η valószínűségi változó lehetséges értékei a

$$\psi(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)}) \quad (4.3.3)$$

számok, miközben az argumentumok befutják az egyes valószínűségi változók lehetséges értékeit. Eközben (4.3.3) több esetben is ugyanazt a számot adhatja. Jelöljük y_1, y_2, \dots a (4.3.3) eredményeként kapott különböző számértékeket. Ezek η lehetséges értékeinek az összességét alkotják. Nyilvánvaló, hogy

$$P(\eta = y_k) = \sum_{\psi = y_k} P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}),$$

ahol az összegezés minden olyan i_1, i_2, \dots, i_n számrendszerre vonatkozik, melyre

$$\psi(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)}) = y_k. \quad (4.3.4)$$

Az η valószínűségi változó várható értéke

$$M(\eta) = \sum_k y_k P(\eta = y_k) = \sum_k y_k \sum_{\psi=y_k} P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}). \quad (4.3.5)$$

Ha (4.3.1) jobboldalán előbb összeadjuk azokat a tagokat, amelyekre teljesül a (4.3.4) egyenlőség, akkor egy csoportösszeget kapunk, amelynek értéke

$$y_k \sum_{\psi=y_k} P(\xi_1 = x_{i_1}^{(1)}, \xi_2 = x_{i_2}^{(2)}, \dots, \xi_n = x_{i_n}^{(n)}).$$

Ezek a csoportok közös elemet nem tartalmaznak, másrészt a (4.3.1) jobb oldalán álló tagok mindegyike valamely csoporthoz hozzátartozik. Ebből már következik a (4.3.1) egyenlőség. Az, hogy a (4.3.5) sor abszolút konvergens, a fenti megfontolásból szintén kiadódik.

Ami a folytonos esetet illeti, ezt nem bizonyítjuk, megjegyezzük azonban, hogy az állítás eléggé plauzibilis. A várható érték ui. — durván szólva — a lehetséges értékeknek a valószínűségekkel vett szorzatösszege. Mármint $\eta = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ lehetséges értékei a $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény értékei között vannak, melyeket a

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n$$

valószínűségekkel szorozva és összegezve, a (4.3.2) integrál közelítő értékét kapjuk.

1. példa. Láncmolekulák kialakulása. Visszatérve az 1.8 szakasz 3. példájában tárgyalt problémához, meghatározzuk a k difunkciós egységet tartalmazó molekulák ξ_j számának a várható értékét. Az (1.8.3) formula a $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$ valószínűségi változók együttes eloszlásának a képlete, tehát annak a valószínűsége, hogy $\xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N$ legyen. Tételünk a $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_N) = x_j$ függvényre alkalmazva, azt kapjuk, hogy (M_j -vel jelölve ξ_j várható értékét)

$$M_j = \frac{1}{\binom{N+R-1}{R-1}} \sum_{k_0+k_1+\dots+k_N=R} k_j \frac{R!}{k_0!k_1!\dots k_N!}.$$

A jobb oldalon álló összegben nyilván elegendő csak azokra a k_0, k_1, \dots, k_N értékrendszerekre összegezni, amelyekben $k_j \neq 0$. Ekkor azonban k_j -vel egyszerűsíteni lehet és így

$$M_j = \frac{1}{\binom{N+R-1}{R-1}} \sum_{\substack{k_0+\dots+k_{j-1}+\dots+k_N=R-1 \\ k_1+\dots+j(k_j-1)+\dots+Nk_N=N-j \\ k_j-1 \geq 0}} \frac{R!}{k_0!\dots(k_j-1)!\dots k_N!}.$$

A $k_0, \dots, k_{j-1}, k_j-1, k_{j+1}, \dots, k_N$ számokat rendre $b_0, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_N$ -nel jelölve, az adódik, hogy $b_{N-j+1} = \dots = b_N = 0$, tehát

$$M_j = \frac{R}{\binom{N+R-1}{R-1}} \sum_{b_0+b_1+\dots+b_{N-j}=R-1} \frac{(R-1)!}{b_0!b_1!\dots b_{N-j}!}.$$

A 2. függelék (6) formulája felhasználásával tehát azt kapjuk, hogy

$$M_j = R \frac{\binom{N-j+R-2}{R-2}}{\binom{N+R-1}{R-1}} = R(R-1) \frac{N(N-1)\dots(N-j+1)}{(N+R-1)(N+R-2)\dots(N+R-j-1)}, \quad j=0, 1, \dots, N.$$

Ha j kicsiny R -hez és N -hez képest, akkor

$$M_j \approx M_j = N \left(\frac{R}{N+R} \right)^2 \left(\frac{N}{N+R} \right)^{j-1}, \quad j=0, 1, \dots, N.$$

2. példa. Legyen A egy $n \times n$ -es nem szinguláris mátrix, és jelölje $R = (r_{ik})$ ennek inverzét: $R = A^{-1}$. Ha B egy olyan $n \times n$ -es mátrix, melynek csak az i -edik sorában álló k -adik eleme különbözik 0-tól, és ezt az elemet b -vel jelöljük, akkor — mint arról mindkét oldal $A+B$ -vel való szorzása útján meggyőződhetünk —

$$(A+B)^{-1} = R - \frac{b}{1+br_{ki}} R_{i1} R_{k*},$$

ahol R_{i1} az R mátrix i -edik oszlopából, R_{k*} pedig a k -adik sorából álló mátrix. Tegyük most fel, hogy b valószínűségi változó, és emiatt jelöljük inkább ξ -vel. Az $(A+B)^{-1}$ mátrix j -edik sora i -edik elemének várható értéke a fenti egyenlőség szerint

$$r_{ji} - M \left(\frac{\xi}{1+\xi r_{ki}} \right) r_{ji} r_{ki}.$$

Ha pl. $r_{ki} > -\frac{1}{a}$ és ξ egyenletes eloszlású a $(0, a)$ intervallumban, akkor tételünket a $\psi(x) = \frac{x}{1+r_{ki}x}$ függvényre alkalmazva:

$$M\left(\frac{\xi}{1+\xi r_{ki}}\right) = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{x}{1+r_{ki}x} dx = 1 - \frac{1}{ar_{ki}} \ln(1+ar_{ki}).$$

Ennek alapján meghatározhatjuk az $(A+B)x=c$ egyenletrendszer x megoldásvektora komponenseinek várható értékét. Hasonló eljárás adható arra az esetre is, amikor B -nek nemcsak egy eleme, hanem egy egész sora vagy oszlopa különbözik 0-tól, vagy még általánosabban: ha B egy $n \times 1$ -es és egy $1 \times n$ -es mátrix szorzata (ún. diád).

4.4. Összeg és szorzat várható értéke. Az alábbiakban két valószínűségi változóval kapcsolatban a 3.9. szakasz jelöléseire támaszkodunk.

1. tétel. Ha létezik ξ és η várható értéke, akkor létezik $\zeta = \xi + \eta$ várható értéke is és

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta). \quad (4.4.1)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző szakasz tételét a $\psi(x, y) = x + y$ függvényre (x_1 helyett x -et, x_2 helyett y -t írunk). Eszerint a diszkrét esetben

$$\begin{aligned} M(\xi) + M(\eta) &= \sum_k x_k p_k + \sum_k y_k q_k = \sum_i x_i \sum_k r_{ik} + \sum_k y_k \sum_i r_{ik} = \\ &= \sum_i \sum_k x_i r_{ik} + \sum_i \sum_k y_k r_{ik} = \sum_i \sum_k (x_i + y_k) r_{ik} = M(\xi + \eta), \end{aligned}$$

a folytonos esetben

$$\begin{aligned} M(\xi) + M(\eta) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x h(x, y) dy dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y h(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x h(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y h(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) h(x, y) dx dy = M(\xi + \eta). \end{aligned}$$

Teljes indukcióval bebizonyítható, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók várható értékei léteznek, akkor létezik a $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ valószínűségi változó várható értéke is, és

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + \dots + M(\xi_n) \quad (4.4.2)$$

Ha ξ diszkrét eloszlású, $M(\xi)$ létezik, és c egy valós állandó, akkor az előző tétel szerint $M(\xi + c)$ is létezik, és $M(\xi + c) = M(\xi) + c$. A c állandó ui. felfogható olyan valószínűségi változóként, amely csak a c értéket veszi fel. Ha azonban ξ folytonos eloszlású, akkor a megfelelő állítást formailag tartalmazza ugyan a tétel, de sem a diszkrét, sem a folytonos eset alá nem tartozik, ezért külön bizonyítjuk. A $\xi + c$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x - c)$, ahol $f(x)$ ξ sűrűségfüggvénye, tehát

$$\begin{aligned} M(\xi + c) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x - c) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u + c) f(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du + c \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = M(\xi) + c. \end{aligned}$$

$M(\xi)$ definíciójából következik, hogy ha $\xi \geq 0$, akkor $M(\xi) \geq 0$. Ebből és az előző tételből pedig következik, hogy ha $\xi \geq \eta$, akkor $M(\xi) \geq M(\eta)$, ugyanis $\xi - \eta \geq 0$ és így $M(\xi - \eta) = M(\xi) - M(\eta) \geq 0$.

2. tétel. Ha ξ és η független valószínűségi változók, várható értékeik léteznek, akkor létezik a $\zeta = \xi \eta$ valószínűségi változó várható értéke is és

$$M(\xi \eta) = M(\xi) M(\eta). \quad (4.4.3)$$

Bizonyítás a diszkrét és folytonos esetre. Alkalmazva a 4.3 szakasz tételét a $\psi(x, y) = xy$ függvényre, eszerint a diszkrét

esetben

$$\begin{aligned} M(\xi)M(\eta) &= \\ &= \left(\sum_i x_i p_i\right) \left(\sum_k y_k q_k\right) = \\ &= \sum_i \sum_k x_i y_k p_i q_k = \\ &= \sum_i \sum_k x_i y_k r_{ik} = \\ &= M(\xi\eta), \end{aligned}$$

a folytonos esetben

$$\begin{aligned} M(\xi)M(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y g(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x) g(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy h(x, y) dx dy = M(\xi\eta). \end{aligned}$$

Teljes indukcióval bebizonyítható, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, várható értékeik léteznek, akkor létezik a $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ szorzat várható értéke is és

$$M(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) = M(\xi_1) M(\xi_2) \dots M(\xi_n). \quad (4.4.4)$$

Tegyük fel ui., hogy az állítás igaz n -re, és bizonyítsuk be $n+1$ -re. Mivel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}$ függetlenek, a $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ szorzat független ξ_{n+1} -től. Felhasználva a 4.4 szakasz 2. tételét és indukciós feltevésünket, következik, hogy

$$\begin{aligned} M(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \xi_{n+1}) &= M(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) M(\xi_{n+1}) = \\ &= M(\xi_1) M(\xi_2) \dots M(\xi_n) M(\xi_{n+1}). \end{aligned}$$

4.5. A feltételes várható érték. Egy ξ valószínűségi változó A eseményre vonatkoztatott $M(\xi|A)$ feltételes várható értéke a ξ -nek az A eseményre vonatkoztatott feltételes eloszlásának a várható értéke. Ha tehát ξ diszkrét, lehetséges értékei az x_1, x_2, \dots szá-

mok, akkor

$$M(\xi|A) = \sum_i x_i P(\xi = x_i|A), \quad (4.5.1)$$

ha pedig ξ -nek az A eseményre vonatkoztatott feltételes eloszlása folytonos, akkor

$$M(\xi|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|A) dx, \quad (4.5.2)$$

ahol $f(x|A)$ a ξ valószínűségi változó A eseményre vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvénye. Ha A_1, A_2, \dots egy teljes eseményrendszer, akkor a teljes valószínűség tétele felhasználásával (4.5.1)-ből következik, hogy

$$M(\xi) = \sum_k M(\xi|A_k) P(A_k), \quad (4.5.3)$$

ha ξ diszkrét, ugyanez az egyenlőség fennáll azonban abban az esetben is, ha az $F(x|A_k)$ eloszlások folytonosak, ui.

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k x f(x|A_k) P(A_k) dx = \\ &= \sum_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x|A_k) dx \right) P(A_k) = \sum_k M(\xi|A_k) P(A_k). \end{aligned}$$

Speciális esetben az A_k esemény jelentheti azt, hogy egy η diszkrét valószínűségi változó az y_k értéket veszi fel, $\eta = y_k$.

Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor ξ -nek az $\eta = y$ feltételre vonatkoztatott $M(\xi|\eta = y)$ feltételes várható értékét a következő módon értelmezzük

$$M(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx. \quad (4.5.4)$$

Ha ezt $g(y)$ -nal megszorozzuk, és y szerint $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig

integrálunk, megkapjuk az

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} M(\xi|\eta = y)g(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx \right) g(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)g(y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\end{aligned}$$

egyenlőséget, tehát

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi|\eta = y)g(y)dy. \quad (4.5.5)$$

Rögzített $\eta = y$ feltétel esetén $M(\xi|\eta = y)$ egy meghatározott számérték, akár diszkrét, akár folytonos eloszlású is legyen η . Ha ezután y -t η lehetséges értékein keresztül futtatjuk, akkor $M(\xi|\eta = y)$ az y változó egy függvénye lesz. Ezt a függvényt ξ η -ra vonatkoztatott regressziójának nevezzük. (Erre a 10. fejezetben még visszatérünk.)

Ha a kísérletet, amellyel valószínűségi változóink kapcsolatosak, elvégezzük, akkor η -ra kapunk egy — mondjuk — y számértéket. Ehhez pedig tartozik egy $M(\xi|\eta = y)$ feltételes várható érték. Ilyen értelemben a feltételes várható érték valószínűségi változóként is felfogható, ebben az esetben a feltételben $\eta = y$ helyett egyszerűen csak η -t írunk, a feltételes várható érték mint valószínűségi változó jelölése tehát $M(\xi|\eta)$. Ez nem egyéb, mint az η valószínűségi változó $h(\eta)$ függvénye, ahol

$$h(y) = M(\xi|\eta = y), \quad (4.5.6)$$

vagyis ξ -nek η -ra vonatkoztatott regressziója. Mármint, ha η diszkrét és A_k azt jelenti, hogy $\eta = y_k$, vagy ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor a 4.3 szakasz tételét a $h(y)$ egyváltozós függvényre alkalmazva, és ezt összevetve a (4.5.3), ill. (4.5.5) egyenlőségekkel, e két esetre azt kapjuk, hogy

$$M[M(\xi|\eta)] = M(\xi). \quad (4.5.7)$$

E formula segítségével sok esetben egyszerű lehetőség nyílik $M(\xi)$ meghatározására. Éppen ebben áll a feltételes várható érték egyik felhasználási módja. Ez esetben a feltételes várható érték meghatározása csupán egy közbeeső lépés. Más esetekben $M(\xi|\eta)$, ill. az $M(\xi|\eta = y)$ regresszió meghatározása a cél, és ennek segítségével közelítjük, becsüljük ξ konkrét értékét, η konkrét értékének ismeretében. Ez utóbbi kérdéssel most nem foglalkozunk.

Az $M(\xi|\eta)$ feltételes várható értékhez hasonló módon értelmezzük az $M(\xi|\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ feltételes várható értéket, mely az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók egy függvénye. Erre fennáll a (4.5.7)-hez analóg és annál általánosabb

$$M[M(\xi|\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)] = M(\xi) \quad (4.5.8)$$

egyenlőség és ezt ugyanúgy bizonyítjuk, mint (4.5.7)-et. Most bizonyítás nélkül megemlítünk egy fontos tételt, melyet a 10. fejezet 25—26. szakaszaiban használunk fel.

Tétel. Ha $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ befutja az n -változós függvényeket, akkor az

$$M[\xi - g(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^2] \quad (4.5.9)$$

várható érték a

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = M(\xi|\eta_1 = y_1, \eta_2 = y_2, \dots, \eta_n = y_n) \quad (4.5.10)$$

esetben veszi fel a minimumát.

A (4.5.10) függvényt a ξ valószínűségi változó $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókra vonatkoztatott regressziójának nevezzük.

1. példa. Alkalmazás liftek közlekedésére. Egy munkahelyen egy vagy több lift közlekedik, amelyek különösen a reggeli és délutáni csúcsforgalom idején a sok megállás miatt igen lassúak. Gyakorlati szempontból fontos probléma tehát, hogy meghatározzuk egy lift egy menete megállásai számának várható értékét.

Tegyük fel, hogy a lift n emeleten közlekedik, mondjuk a földszintről indul, és ott k személy száll be, minden személy a többitől függetlenül $\frac{1}{n}$ valószínűséggel száll ki az egyes emeleten, és újabb személyek a lift menete közben nem szállnak be. Kérdés, hogy ekkor mennyi a megállások számának várható értéke.

A problémát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy k golyót egymástól függetlenül egy urnába elhelyezve, mindegyik golyót $\frac{1}{n}$ valószínűséggel téve mindegyik urnába, mennyi a nem üres urnák számának a várható értéke.

Tekintsük azt az esetet, amikor $k+1$ golyót helyezünk el. Jelölje ξ_{k+1} a nem üres urnák számát, ξ_k pedig — mondjuk — az első k golyó elhelyezése során kapott nem üres urnák számát. Ekkor ξ_{k+1} vagy ξ_k -val vagy $\xi_k + 1$ -gyel egyenlő, mégpedig

$$P(\xi_{k+1} = j | \xi_k = j) = \frac{j}{n};$$

$$P(\xi_{k+1} = j + 1 | \xi_k = j) = 1 - \frac{j}{n},$$

tehát

$$M(\xi_{k+1} | \xi_k = j) = \frac{j}{n} + (j+1) \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 1 + j \left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$M(\xi_{k+1} | \xi_k) = 1 + \xi_k \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Bevezetve az $M_k = M(\xi_k)$ jelölést, a (4.5.7) formula alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M[M(\xi_{k+1} | \xi_k)] = 1 + M(\xi_k) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \\ &= 1 + M_k \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + M_{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \dots = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = \\ &= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right]. \end{aligned}$$

(Ez a levezetés RÉNYI ALFRÉD-től származik.)

2. példa. Láncmolekulák lebomlása. Visszatérünk a 2.12 szakaszban tárgyalt problémához. Célunk az, hogy meghatározzuk egy n egységet tartalmazó láncmolekulából a $(0, t)$ időintervallumban keletkezett, k ($k < n$) egy-

séget tartalmazó láncmolekulák ξ_k számának a várható értékét. Erre azt az utat választjuk, hogy az $N_k(k, t) = M(\xi_k)$ várható értékekre felírunk egy rekurzív összefüggést, melyet később a 8.6 szakaszban a generátorfüggvény módszerével fogunk megoldani.

Az n egységet, tehát $n-1$ kötést tartalmazó molekula valamelyik, gondolatban rögzített végétől elindulva, jelölje A_i azt az eseményt, hogy t idő alatt az első $i-1$ kötés nem bomlik el, de az i -edik igen. Tekintettel arra, hogy az egyes kötések — feltétel szerint — egymástól függetlenül bomlanak, és mindegyik $p = p(t)$ valószínűséggel bomlik el t idő alatt, következik, hogy

$$P(A_i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Másrészt az A_i feltétel teljesülése esetén az első i egység egy molekulát alkot, a fennmaradó $n-i$ egységből kapott k egységet tartalmazó molekula számának várható értéke pedig N_{n-i} , tehát

$$M(\xi_k | A_1) = N_{n-1};$$

$$M(\xi_k | A_2) = N_{n-2};$$

$$\vdots$$

$$M(\xi_k | A_{k-1}) = N_{n-k+1};$$

$$M(\xi_k | A_k) = N_{n-k} + 1;$$

$$M(\xi_k | A_{k+1}) = N_{n-k-1};$$

$$\vdots$$

$$M(\xi_k | A_{n-k}) = N_k;$$

$$M(\xi_k | A_i) = 0, \quad i = n-k-1, \dots, n-1$$

$$M(\xi_k | A_n) = 0,$$

ahol A_n definíciószerűen azt az eseményt jelenti, hogy egy kötés sem bomlik el. Mivel A_1, A_2, \dots, A_n teljes eseményrendszer, a (4.5.3) egyenlőségből következik, hogy

$$\begin{aligned} N_n &= pN_{n-1} + p(1-p)N_{n-2} + \dots + \\ &+ p(1-p)^{k-2}N_{n-k+1} + p(1-p)^{k-1}(N_{n-k} + 1) + \\ &+ p(1-p)^kN_{n-k-1} + \dots + p(1-p)^{n-k-1}N_k, \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

ha $n > k$. Az $n = k$ esetben csak 0 vagy k egységet tartalmazó molekula keletkezhetik. Mivel az utóbbi eset valószínűsége $(1-p)^{k-1}$,

$$N_k = (1-p)^{k-1}.$$

4.6. A szórás értelmezése. Csupán a várható érték még eléggé kevés információt szolgáltat egy valószínűségi változó eloszlására. Adott várható értékű ξ valószínűségi változó eloszlása még sokféle lehet. Pl. minden, a 0 pontra szimmetrikus eloszlású valószínűségi változó várható értéke 0. Sőt, vannak olyan valószínűségi változók, melyek eloszlása nem is szimmetrikus a 0 pontra, várható értékük mégis 0.

A várható érték egy ξ valószínűségi változó eloszlásának a „centrumát” adja meg. Az ezután következő legfontosabb fogalom az eloszlásnak a centrum körüli szóródását hivatott mérni. Ez a fogalom a *szórás*.

Egy ξ valószínűségi változó szórása a $\xi - M(\xi)$ valószínűségi változó négyzetének várható értékéből vont pozitív négyzetgyök, jele: $D(\xi)$. Tehát definíciószerűen:

$$D(\xi) = \sqrt{M[(\xi - M(\xi))^2]}. \quad (4.6.1)$$

Ahhoz, hogy ξ szórásáról beszélhessünk, eleve fel kell tételeznünk, hogy ξ várható értéke létezik. Ez azonban a szórás létezéséhez még nem elegendő. Fel kell még azt is tételeznünk, hogy létezik a $(\xi - M(\xi))^2$ valószínűségi változó várható értéke is. Ellenkező esetben vagy azt mondjuk, hogy ξ szórása végtelen, vagy azt, hogy ξ szórása nem létezik. Bebizonyítható, hogy ξ szórása akkor és csak akkor létezik, ha létezik az $M(\xi^2)$ várható érték, és ez a feltétel egyben $M(\xi)$ létezését is biztosítja.

A ξ valószínűségi változó $D^2(\xi)$ ún. szórásnégyzete kifejezhető az $M(\xi^2)$ és $M(\xi)$ mennyiségekkel. Ha ui. (4.6.1) mindkét oldalának négyzetreemelését után még a várható érték jele után álló négyzetreemelését is elvégezzük, és figyelembe vesszük, hogy az összeg várható értéke egyenlő az egyes várható értékek összegével, konstans szorzó a várható érték jele elé kiemelhető, és egy konstans várható értéke önmagával egyenlő, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= M[(\xi - M(\xi))^2] = M[\xi^2 - 2\xi M(\xi) + M^2(\xi)] = \\ &= M(\xi^2) - 2M(\xi)M(\xi) + M^2(\xi), \end{aligned}$$

tehát

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi). \quad (4.6.2)$$

E formulából egyúttal az is következik, hogy

$$M^2(\xi) \leq M(\xi^2). \quad (4.6.3)$$

Ha a (4.6.1) formulában $M(\xi)$ helyébe egy a állandót helyettesítünk, akkor az a számtól vett négyzetes eltérés várható értékének pozitív négyzetgyökét kapjuk. Ennek négyzete és a szórásnégyzet között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$M[(\xi - a)^2] = D^2(\xi) + (M(\xi) - a)^2. \quad (4.6.4)$$

Ezt igen egyszerűen beláthatjuk, ui.

$$\begin{aligned} M[(\xi - a)^2] &= M[(\xi - M(\xi) + M(\xi) - a)^2] = \\ &= M[(\xi - M(\xi))^2] + 2M[(\xi - M(\xi))(M(\xi) - a)] + \\ &\quad + (M(\xi) - a)^2 = D^2(\xi) + (M(\xi) - a)^2, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az

$$M[\xi - M(\xi)] = M(\xi) - M(\xi) = 0$$

egyenlőséget. A (4.6.4) formulát STEINER-formulának nevezzük, mivel ez analóg a mechanikából jól ismert STEINER-formulához.

Alkalmazva a 4.3 szakasz tételét az $n=1$ esetben, a $\varphi(x) = (x - M(\xi))^2$ és $\varphi(x) = x^2$ függvényekre, a diszkrét, a folytonos és kevert eloszlású valószínűségi változók szórásnégyzeteit (4.6.2) felhasználásával a következőképpen fejezhetjük ki:

Diszkrét eset. Ha ξ lehetséges értékei x_1, x_2, \dots , melyekhez p_1, p_2, \dots valószínűségek tartoznak, akkor

$$D^2(\xi) = \sum_i (x_i - M(\xi))^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - M^2(\xi). \quad (4.6.5)$$

Folytonos eset. Ha ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2(\xi). \quad (4.6.6)$$

Kevert eset. Megtartva a 3.4 szakaszban alkalmazott jelöléseket,

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx + \sum_i (x_i - M(\xi))^2 p_i = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx + \sum_i x_i^2 p_i - M^2(\xi). \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Az egyes egyenlőségek utolsó tagjait az előző szakasz tételének a $\varphi(x) = x^2$ függvényre való alkalmazása, és a (4.6.2) formula felhasználása nélkül is könnyen megkaphatjuk a középső tagokból.

1. példa. Határozzuk meg a 4.1 szakasz 3. példájában szereplő ξ valószínűségi változó szórását. A (4.6.5) formula alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= 3^2 p_3 + 4^2 p_4 + 5^2 p_5 - M^2(\xi) = \\ &= 9(p_3 + p_4 + p_5) + 7p_4 + 16p_5 - 9(1 + pq + 2p^2 q^2)^2 = \\ &= 9 + 21pq(1 - 2pq) + 96p^2 q^2 - 9(1 + pq + 2p^2 q^2)^2. \end{aligned}$$

Ha speciálisan $p = q = \frac{1}{2}$, akkor $pq = \frac{1}{4}$ és

$$D^2(\xi) = \frac{39}{64} = 0,609 \dots$$

2. példa. Tekintsük az egységnyi sugarú kör alakú céltáblára leadott lövés találati helyének a céltábla középpontjától való távolságát mint valószínűségi változót. Ennek várható értékét a 4.1 szakasz 5. példájában határoztuk meg. Számítsuk most ki a szórását. Mivel $f(x) = 2x$ ($0 < x < 1$), $M(\xi) = \frac{2}{3}$, következik, hogy

$$D^2(\xi) = \int_0^1 2x^3 dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} = 0,0555 \dots$$

3. példa. Határozzuk meg a 4.1 szakasz 6. példájában szereplő valószínűségi változó szórását az $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$) esetben; λ pozitív állandó.

Az $M(\eta)$ várható értéket már ismerjük. A (4.6.7) formulát alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(\eta) &= \int_0^M \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx + M^2 \int_M^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda M})^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-2\lambda M}) - 2 \frac{M}{\lambda} e^{-\lambda M}. \end{aligned}$$

4.7. A szórás tulajdonságai. Ebben a pontban két tételt bizonyítunk be a szórással kapcsolatban.

1. tétel. Ha ξ szórása létezik, továbbá a és b tetszőleges valós számok, akkor

$$D^2(a\xi + b) = a^2 D^2(\xi).$$

Bizonyítás. Felhasználva a várható értékre vonatkozó ismereteinket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(a\xi + b) &= M[(a\xi + b - M(a\xi + b))^2] = \\ &= M[(a\xi + b - aM(\xi) - b)^2] = M[(a\xi - aM(\xi))^2] = \\ &= a^2 M[(\xi - M(\xi))^2] = a^2 D^2(\xi). \end{aligned}$$

E tételből következik, hogy egy valószínűségi változóhoz egy állandót hozzáadva, a szórás nem változik. Ha pedig egy valószínűségi változót egy állandóval megszorozunk, akkor a szórás ennek abszolút értékével szorozódik.

2. tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, szórásaik léteznek, akkor létezik összegük szórása is és

$$D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2) + \dots + D^2(\xi_n).$$

Bizonyítás. Abból, hogy ξ_i és ξ_k függetlenek és várható értékeik léteznek, következik, hogy

$$\begin{aligned} M[(\xi_i - M(\xi_i))(\xi_k - M(\xi_k))] &= \\ &= M[\xi_i - M(\xi_i)] M[\xi_k - M(\xi_k)] = 0, \quad (4.7.1) \end{aligned}$$

ha $i \neq k$. Ezt felhasználva kapjuk a

$$\begin{aligned} D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) &= \\ &= M[(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n))^2] = \\ &= M[(\xi_1 - M(\xi_1) + \xi_2 - M(\xi_2) + \dots + \xi_n - M(\xi_n))^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n M[(\xi_i - M(\xi_i))^2] + 2 \sum_{i < k} M[(\xi_i - M(\xi_i))(\xi_k - M(\xi_k))] = \\ &= \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i) \end{aligned}$$

egyenlőséget, amit bizonyítani akartunk.

A bizonyításból világosan látszik, hogy nincs is szükség a függetlenség feltételezésére, elegendő feltennünk, hogy teljesül a (4.7.1) egyenlőség. Ha mindegyik valószínűségi változó szórása ugyanaz a σ szám, $D(\xi_i) = \sigma$, $i = 1, 2, \dots, n$, akkor a tétel szerint

$$\left. \begin{aligned} D^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) &= n\sigma^2; \\ D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) &= \sqrt{n}\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.1)$$

n növekedtével tehát az összeg szórása \sqrt{n} arányban növekszik. Független valószínűségi változók összegezésekor az eloszlás lényegesen lassabban terjed szét, mint amilyen ütemben a tagok száma növekszik. Ez számunkra előnyös, és ezt a tényt mind az elméletben, mind a gyakorlati alkalmazás során felhasználjuk.

4.8. A Markov- és a Csebisev-egyenlőtlenség.

1. tétel. Markov-féle egyenlőtlenség. Ha ξ nem-negatív, véges várható értékű valószínűségi változó, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{M(\xi)}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás. Csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor ξ diszkrét vagy folytonos eloszlású. Kevert eloszlás esetére az Olvasó a

bizonyítást ezeknek a gondolatoknak a felhasználásával egyszerűen elvégezheti. A diszkrét esetben

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i \geq \sum_{x_i \geq \varepsilon} x_i p_i \geq \varepsilon \sum_{x_i \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon).$$

A folytonos esetben

$$M(\xi) = \int_0^\infty x f(x) dx \geq \int_\varepsilon^\infty x f(x) dx \geq \varepsilon \int_\varepsilon^\infty f(x) dx = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon).$$

Mindkét esetben a kapott egyenlőtlenségekből tételünk állítása leolvasható.

2. tétel. Csebisev-féle egyenlőtlenség. Ha ξ szórása létezik, és ε tetszőleges pozitív szám, akkor

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a MARKOV-féle egyenlőtlenséget az $\eta = (\xi - M(\xi))^2$ valószínűségi változóra és ε helyett ε^2 -re. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) &= P((\xi - M(\xi))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \\ &\leq \frac{M[(\xi - M(\xi))^2]}{\varepsilon^2} = \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

A CSEBISEV-egyenlőtlenség nagy gyakorlati jelentőségű, ennek segítségével lehet egy valószínűségi változó várható értéke körüli ingadozásaira a szórás ismerete alapján numerikusan következtetni. Ebből a szempontból célszerű ε helyébe (ε tetszőleges pozitív szám) $\varepsilon|M(\xi)|$ -et helyettesíteni a CSEBISEV-egyenlőtlenségbe. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon|M(\xi)|) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2 M^2(\xi)}.$$

A bal oldalon a zárójelen belül alkalmas átalakítással végül a

$$P\left(\left|\frac{\xi - M(\xi)}{M(\xi)}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{D(\xi)}{M(\xi)}\right)^2 \quad (4.8.1)$$

egyenlőtlenségre jutunk. Ezzel az egyenlőtlenséggel a ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ -től való *relatív eltérése* nagyságának valószínűségeit lehet felülről becsülni. Ehhez a becsléshez a ξ valószínűségi változó

$$v = \frac{D(\xi)}{|M(\xi)|} \quad (4.8.2)$$

ui. *relatív szórását* kell ismerni. A $100v$ szám a relatív eltérést fejezi ki százalékban. Ha pl. a relatív szórás 0,02, az v számot pedig 0,05-nek választjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi - M(\xi)}{M(\xi)}\right| \geq 0,05\right) \leq 0,16.$$

Eszerint a ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ -től vett relatív eltérése átlagosan minden 100 eset közül legfeljebb 16 esetben lesz 0,05-nél nagyobb.

KORRELÁCIÓ

4.9. A kovariancia és a korrelációs együttható. Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor a $(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))$ szorzat várható értéke 0-val egyenlő. Felmerül tehát az a gondolat, hogy tetszőleges ξ és η esetében ezek függőségét a

$$c = M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] \quad (4.9.1)$$

várható értékkel mérjük.

A (4.9.1) számot a ξ és η valószínűségi változók *kovarianciájának* nevezzük. Ha $\eta = \xi$, akkor a kovariancia a $D^2(\xi)$ szórásnégyzettel egyenlő.

Attól függően, hogy milyen valószínűségi változókról van szó, a kovariancia $-\infty$ és ∞ között minden számérték lehet, a függőségnek viszont célszerű olyan mértéket választani, mely minden valószínűségi változó pár esetén abszolút határok

közé esik. Mint később bebizonyítjuk, a kovariancia abszolút értéke nem lehet nagyobb a $D(\xi)D(\eta)$ szorzatnál. A kovarianciát tehát ezzel elosztva, mindig -1 és 1 közé eső számértéket kapunk, melyet r -rel jelölünk:

$$r = \frac{M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))]}{D(\xi)D(\eta)}. \quad (4.9.2)$$

A (4.9.2) számot a ξ és η valószínűségi változók *korrelációs együtthatójának* nevezzük.

A korrelációs együttható a ξ és η valószínűségi változók függőségét, kapcsolatának szorosságát méri. Ha ξ és η függetlenek, akkor $c=0$, következésképpen $r=c/D(\xi)D(\eta)=0$. Az r együttható másik fontos tulajdonsága az, hogy $|r| \leq 1$. Ezt az alábbi tétel felhasználásával bizonyítjuk.

Tétel. Ha ξ és η két valószínűségi változó, négyzeteik várható értéke létezik, akkor

$$|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M(\xi^2)}\sqrt{M(\eta^2)}. \quad (4.9.3)$$

Bizonyítás. Tetszőleges λ valós szám esetén $(\eta - \lambda\xi)^2 \geq 0$, tehát

$$\begin{aligned} M[(\eta - \lambda\xi)^2] &= M[\eta^2 - 2\lambda\xi\eta + \lambda^2\xi^2] = \\ &= M(\eta^2) - 2\lambda M(\xi\eta) + \lambda^2 M(\xi^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Helyettesítsük λ helyébe a

$$\lambda = \frac{M(\xi\eta)}{M(\xi^2)}$$

számot. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$M(\eta^2) - \frac{M^2(\xi\eta)}{M(\xi^2)} \geq 0,$$

ahonnan a tétel állítása leolvasható.

Ha ezt a tételt a $\xi - M(\xi)$ és az $\eta - M(\eta)$ valószínűségi változókra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$|c| = |M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))]| \leq$$

$$\leq \sqrt{M[(\xi - M(\xi))^2]} \sqrt{M[(\eta - M(\eta))^2]} = D(\xi) D(\eta);$$

innen adódik az

$$|r| \leq 1 \quad (4.9.4)$$

egyenlőtlenség. Az r szám definíciójából következik, hogy ha η a ξ -nek lineáris függvénye,

$$\eta = a + b\xi, \quad (4.9.5)$$

akkor, $r=1$, ill. $r=-1$ aszerint, amint $b>0$ vagy $b<0$. A $b=0$ esetben $\eta=a$, vagyis η állandó. Ekkor $D^2(\eta)=0$, tehát a korrelációs együttható nem értelmezhető. Ebben az esetben azonban tudjuk, hogy ξ és η függetlenek.

Megfordítva: ha $|r|=1$, akkor van olyan a és b szám, hogy fennáll a (4.9.5) egyenlőség, vagyis az egyik valószínűségi változó a másiknak *lineáris* függvénye, pontosabban van olyan a és b szám, hogy $P(\eta = a + b\xi) = 1$. Ez a tény az igen egyszerűen igazolható

$$M\left[\left(\frac{\eta - M(\eta)}{D(\eta)} \pm \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}\right)^2\right] = 2(1 \pm r) \quad (4.9.6)$$

egyenlőségből következik, ha figyelembe vesszük, hogy egy nem-negatív valószínűségi változó várható értéke csak akkor 0, ha a valószínűségi változó 1 valószínűséggel 0 (l. a 4.2 szakasz tételét).

Mind a c kovariancia, mind az r korrelációs együttható képlete tovább alakítható, mégpedig a következő módon:

$$\begin{aligned} c &= M[(\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))] = \\ &= M[\xi\eta - \xi M(\eta) - \eta M(\xi) + M(\xi)M(\eta)] = \\ &= M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) - M(\eta)M(\xi) + M(\xi)M(\eta), \end{aligned}$$

tehát

$$c = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta). \quad (4.9.7)$$

Ezt a korrelációs együttható képletének számlálója helyébe téve, azt kapjuk, hogy

$$r = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)}. \quad (4.9.8)$$

A 4.3. szakasz tételének felhasználásával a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlásaira támaszkodva, felírjuk a kovariancia képletét. Csak azokat az eseteket tekintjük, amikor mindkét valószínűségi változó diszkrét, ill. ξ és η együttes eloszlása folytonos. A 3.7 szakasz jelöléseit használva és alkalmazva a 4.3 szakasz tételét előbb a $\varphi(x, y) = (x - M(\xi))(y - M(\eta))$, majd a $\varphi(x, y) = xy$ függvényre, a (4.9.1) és (4.9.7) formulák alapján a következőket kapjuk:

Diszkrét eset

$$\begin{aligned} c &= \sum_i \sum_k (x_i - M(\xi))(y_k - M(\eta))r_{ik} = \\ &= \sum_i \sum_k x_i y_k r_{ik} - M(\xi)M(\eta). \end{aligned} \quad (4.9.9)$$

Folytonos eset

$$\begin{aligned} c &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))(y - M(\eta))h(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy h(x, y) dx dy - M(\xi)M(\eta). \end{aligned} \quad (4.9.10)$$

A korrelációs együttható 0-val egyenlő, ha ξ és η függetlenek. Vannak azonban olyan esetek is, amikor ξ és η nem függetlenek, mégis $r=0$. Erre a következő példát említjük meg.

Tegyük fel, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű síkbeli pont csak a koordinátatengelyek egységpontjaiba eshet, mégpedig mindegyikbe $\frac{1}{4}$ valószínűséggel.

gel. Tehát (l. a 35. ábrát):

$$\begin{aligned} P((\xi, \eta) = (-1, 0)) &= P((\xi, \eta) = (0, 1)) = \\ &= P((\xi, \eta) = (0, -1)) = \\ &= P((\xi, \eta) = (1, 0)) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a ξ és η valószínűségi változók a $-1, 0, 1$ értékeket veszik fel, mégpedig

$$P(\xi = -1) = P(\eta = -1) = \frac{1}{4};$$

$$P(\xi = 0) = P(\eta = 0) = \frac{1}{2};$$

$$P(\xi = 1) = P(\eta = 1) = \frac{1}{4},$$

ahonnan leolvasható, hogy

$$M(\xi) = M(\eta) = 0.$$

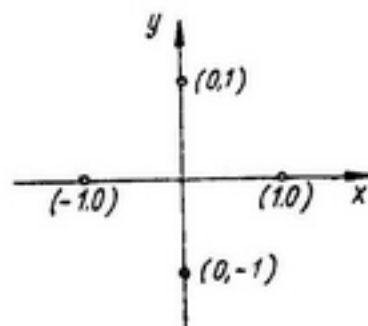
Másrészt a $\xi\eta$ szorzat mindig 0, tehát

$$M(\xi\eta) = 0,$$

amiből következik, hogy $c = 0$, $r = 0$. A ξ és η valószínűségi változók azonban nem függetlenek. Ugyanis pl.

$$0 = P(\xi = 0, \eta = 0) \neq P(\xi = 0)P(\eta = 0) = \frac{1}{4}.$$

Ha $r = 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ és η korrelálatlanok. A fentiek szerint a korrelálatlanság tehát még nem jelent függetlenséget. Ez kétségtelenül a korrelációs együtttható egyik súlyos hibája. Másik hibája, hogy $r = 1$ akkor és csak akkor, ha ξ és η között lineáris kapcsolat van, márpedig elegendő volna ξ és η között egy függvénykapcsolat fennállása is ahhoz, hogy a legnagyobb mértékű függőségről beszéljünk. Később a függőség más mérőszámával is megismerkedünk, most csupán megjegyezzük, hogy ha a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása normális (l. a 6. fejezetet), akkor a korrelációs együtt-



35. ábra

ható a két valószínűségi változó függőségének elméleti szempontból kifogástalan mérőszáma. (Ekkor ugyanis ξ és η között más függvénykapcsolat a lineárison kívül nem lehetséges, továbbá $r = 0$ akkor és csak akkor, ha ξ és η függetlenek.)

4.10. A kovariancia- és a korreláció-mátrix. Több valószínűségi változó esetén ezek páronkénti kovarianciáit, ill. korrelációs együttthatóit egy-egy mátrixba foglalhatjuk össze. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ n valószínűségi változó. Jelölje c_{ik} , ill. r_{ik} a ξ_i és ξ_k valószínűségi változók kovarianciáját, ill. korrelációs együttthatóját. Nyilvánvaló, hogy

$$c_{ik} = c_{ki};$$

$$r_{ik} = r_{ki};$$

$$c_{ii} = D^2(\xi_i);$$

$$r_{ii} = 1.$$

Jelölje C , ill. R a c_{ik} , ill. az r_{ik} számokból alkotott szimmetrikus mátrixot:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.10.1)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.10.2)$$

A $D(\xi_i)$ szórásra a σ_i jelölést alkalmazva, a korrelációs együtttható definíciójából kifolyólag fennáll a

$$c_{ik} = r_{ik} \sigma_i \sigma_k \quad (4.10.3)$$

egyenlőség. Ebből következik, hogy ha bevezetjük az

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \quad (4.10.4)$$

mátrixot, akkor

$$C = SRS. \quad (4.10.5)$$

A C mátrixot a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók kovariancia-, az R mátrixot pedig ugyanezek korreláció-mátrixának nevezzük.

Egy valós számokból alkotott $n \times n$ -es szimmetrikus $A = (a_{ik})$ mátrixot pozitív szemidefinitnek nevezzük, ha tetszőleges z_1, z_2, \dots, z_n valós számok esetén fennáll a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} z_i z_k \geq 0 \quad (4.10.6)$$

egyenlőtlenség. Ha (4.10.6) fennáll és az egyenlőség csak a $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$ esetben teljesül, akkor az A mátrixot pozitív definit-nek nevezzük. Ismeretes, hogy egy, az említett tulajdonságokkal bíró A mátrix akkor és csak akkor pozitív definit, ha

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

vagyis, ha az ún. sarokdeterminánsok mind pozitívak. Belátható, hogy ha az A mátrix sorait és oszlopait permutáljuk, mégpedig ugyanazon permutáció szerint, akkor a mátrix pozitív definit marad. Ebből következik, hogy az A mátrix bizonyos sorainak és megfelelő indexű oszlopainak a kiválasztásával kapott mátrix determinánsa is mindig pozitív.

A kovariancia- és a korreláció-mátrixok legfontosabb tulajdonságait az alábbi két tétel foglalja össze.

1. tétel. C és R mindig pozitív szemidefinit-mátrixok.

2. tétel. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. C pozitív definit.
2. R pozitív definit.
3. C determinánsa (határozottan) pozitív.
4. R determinánsa (határozottan) pozitív.
5. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók lineárisan függetlenek, vagyis nincsenek olyan z_0, z_1, \dots, z_n valós számok, melyek közül legalább egy 0-tól különböző és

$$P(z_0 + z_1 \xi_1 + \dots + z_n \xi_n = 0) = 1. \quad (4.10.7)$$

Ezeket a tételeket nem bizonyítjuk. Megjegyezzük azonban, hogy a bizonyítás aránylag egyszerű, és a matematikában jártas olvasó megpróbálkozhatik azzal, hogy a bizonyítást saját maga elvégezze. A bizonyítás során a 4.2 szakasz 3. tételét kell felhasználni.

n számú valószínűségi változó együttes eloszlását szokás n -dimenziós eloszlásnak is nevezni, de csak abban az esetben, ha semmilyen z_0, z_1, \dots, z_n számokkal, melyek közül legalább egy 0-tól különböző, nem teljesül egy (4.10.7) típusú egyenlőség. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együttes eloszlása elfajult. Ekkor a valószínűségi változók lehetséges értékeiből alkotott n -dimenziós vektorok mind a

$$z_0 + z_1 x_1 + \dots + z_n x_n = 0$$

ún. hipersíkon vannak, és így a valószínűség is ezen koncentráldik.

Egyetlen ξ valószínűségi változó eloszlását — az előbbiekkal összhangban — akkor nevezzük elfajultnak, ha $\xi = c = \text{állandó}$. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye a következő

$$F(x) = P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq c; \\ 1, & \text{ha } x > c. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy e szakasz 2. tétele szerint ahhoz, hogy C , ill. R pozitív definit legyen, már elegendő, hogy C , ill. R determinánsa pozitív legyen. Ekkor a többi sarokdetermináns auto-

matikusan pozitív. Ez általában tetszőleges A mátrix esetén nem igaz, C -nek és R -nek azonban megvan ez a speciális tulajdonsága.

Az R mátrix $|R|$ determinánsának négyzetgyökét szóródási együtthatónak nevezzük.

Bebizonyítható, hogy a kovariancia-mátrix determinánsa nem nagyobb az egyes szórásnégyzetek szorzatánál:

$$|C| \leq \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdots \sigma_n^2. \quad (4.10.8)$$

Másrészt (4.10.5) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$|C| = |S| |R| |S| = |S|^2 |R| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \cdots \sigma_n^2 |R|,$$

tehát ebből következik, hogy R determinánsára mindig teljesül a

$$0 \leq |R| \leq 1 \quad (4.10.9)$$

egyenlőtlenség, és így a szóródási együttható is mindig 0 és 1 közé esik. A 2. tétel szerint $|R|=0$ akkor és csak akkor, ha teljesül a (4.10.7) reláció valamilyen z_0, z_1, \dots, z_n számokkal, melyek közül legalább egy 0-tól különböző. Másrészt bebizonyítható, hogy $|R|=1$ akkor és csak akkor, ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók páronként korrelálatlanok, vagyis

$$r_{ik} = 0, \text{ ha } i \neq k.$$

A $\sqrt{|R|}$ szóródási együttható tehát azt méri, hogy milyen erős a valószínűségi változók lineáris függetlensége, milyen távol állnak a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ változók attól, hogy egy (4.10.7) típusú reláció fennálljon legalább egy 0-tól különböző z_i -vel, mennyire nem-elfajult valószínűségi változóink együttes eloszlása. Speciálisan az $n=2$ esetben az $r_{12}=r_{21}=r$ jelölést használva,

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^2,$$

és így a szóródási együttható

$$\sqrt{|R|} = \sqrt{1 - r^2}.$$

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK TOVÁBBI JELLEMZŐ ADATAI

4.11. Momentumok. Egy ξ valószínűségi változó különféle momentumait az alábbi egyenlőségekkel definiáljuk:

$$k\text{-adik momentum} \quad \alpha_k = M(\xi^k);$$

$$k\text{-adik centrális momentum} \quad \mu_k = M[(\xi - M(\xi))^k].$$

$$k\text{-adik abszolút momentum} \quad \beta_k = M(|\xi|^k);$$

$$k\text{-adik centrális abszolút momentum} \quad \nu_k = M(|\xi - M(\xi)|^k).$$

A 4.3 szakasz tétele alapján felírhatjuk ezeknek a valószínűségeloszlást meghatározó adatokon alapuló kifejezéseit. Csak a diszkrét és folytonos eloszlás esetét tárgyaljuk, a kevert esetet mellőzzük, az idevágó formulákat szükség esetén az olvasó is fel tudja írni. Az említett tételt a $\varphi(x)=x^k$, $\varphi(x)=(x-m)^k$, $\varphi(x)=|x|^k$ és a $\varphi(x)=|x-m|^k$ függvényekre alkalmazva, ahol $m=M(\xi)$, azt kapjuk, hogy

Diszkrét eset:

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i;$$

$$\mu_k = \sum_i (x_i - m)^k p_i;$$

$$\beta_k = \sum_i |x_i|^k p_i;$$

$$\nu_k = \sum_i |x_i - m|^k p_i.$$

Folytonos eset:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx; \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^k f(x) dx;$$

$$\beta_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) dx; \quad \nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m|^k f(x) dx.$$

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\beta_k^{\frac{1}{k}} \equiv \beta_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}, \quad v_k^{\frac{1}{k}} \equiv v_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}. \quad (4.11.1)$$

A várható érték és a szórás definíciójából kifolyólag fennállnak az

$$M(\xi) = \alpha_1; \\ D^2(\xi) = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

egyenlőségek. A centrális momentumok kifejezhetők a nem centrálisok segítségével. Ha ui. $\xi - m$ -et k -adik hatványra emeljük, és a várható értéket tagonként vesszük, akkor világos, hogy μ_k az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ momentumok konstansszorosainak összege lesz. Felírjuk az első négy centrális momentumra vonatkozó egyenlőséget:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0; \\ \mu_2 &= \alpha_2 - m^2; \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3m\alpha_2 + 2m^3; \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4m\alpha_3 + 6m^2\alpha_2 - 3m^4; \\ m &= M(\xi) = \alpha_1. \end{aligned}$$

4.12. A medián. Az abszolút momentumok közül v_1 érdemel különösebb figyelmet. Ez a mennyiség is alkalmas volna ξ szóródásának a mérésére. Mind elméleti, mind pedig gyakorlati szempontból azonban a vele kapcsolatos megfontolások az abszolút érték miatt igen nehézkesek. Másrészt a várható érték és a szórás jobban összeillenek, mint a várható érték és v_1 . A STEINER-formula szerint ui.

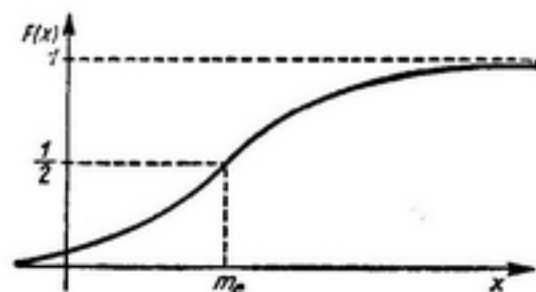
$$M[(\xi - a)^2]$$

akkor minimális, ha $a = M(\xi)$, és ez ekkor $D^2(\xi)$ -vel lesz egyenlő. Ha ξ szóródását valamilyen b számtól vett abszolút eltérése vár-

ható értékével akarjuk jellemezni, akkor e célra a legjobbnak látszik olyan b számot választani, amelyre

$$M(|\xi - b|)$$

minimális. Ez a b szám az ún. *mediánnal* egyenlő, amely általában különbözik a várható értéktől.



36. ábra

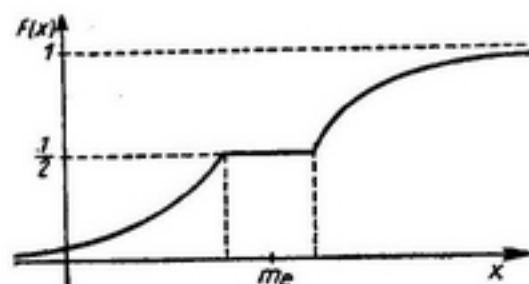
A mediánt a következő módon definiáljuk. Ha az

$$F(x) = \frac{1}{2} \quad (4.12.1)$$

egyenletnek van egy és csak egy megoldása, ahol $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, akkor ezt az x megoldást a ξ valószínűségi változó, ill. az eloszlás mediánjának nevezzük. Ha (4.12.1)-nek egyáltalán van megoldása, akkor két eset lehetséges: vagy csak egy x -re teljesül a (4.12.1) egyenlőség, vagy azok az x -ek, melyek (4.12.1) megoldását szolgáltatják, egy egész intervallumot kitöltenek (l. a 36. és 37. ábrákat). Ez utóbbi esetben ennek az intervallumnak a középpontját nevezzük mediánnak. A (4.12.1) egyenlőségnek azonban nincs mindig megoldása. Diszkrét és kevert eloszlások esetén előfordulhat, hogy az eloszlásfüggvény az $\frac{1}{2}$ magasságot átugorja. Ez

akkor fordul elő, ha van olyan x_0 szám, hogy (l. 38. ábrát)

$$P(\xi < x_0) < \frac{1}{2}, \quad P(\xi > x_0) < \frac{1}{2},$$



37. ábra

amiből egyben következik, hogy

$$P(\xi = x_0) > 0.$$

Ebben az esetben ezt az x_0 számot nevezzük a ξ valószínűségi változó, ill. eloszlása mediánjának. Ezzel a mediánt minden esetben definiáltuk.

A mediánra az m_e jelölést használjuk. Ha ξ véges sok különböző értéket felvevő valószínűségi változó, lehetséges értékei az

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

számok, amelyekről mindjárt fel is tételeztük, hogy nagyság szerinti sorrendben követik egymást és

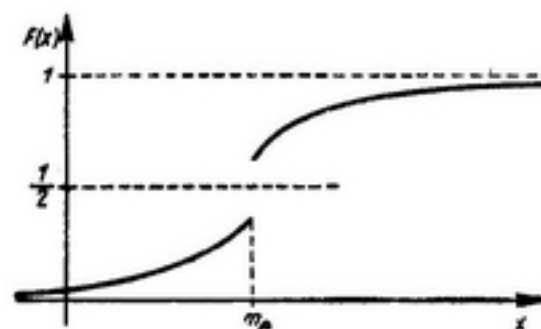
$$P(\xi = x_1) = P(\xi = x_2) = \dots = P(\xi = x_n) = \frac{1}{n},$$

akkor a medián meghatározásakor két esetet kell megkülönböztetnünk: 1. n páratlan; 2. n páros. Az első esetben

$$m_e = \frac{x_{n+1}}{2},$$

a második esetben

$$m_e = \frac{x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}}}{2}.$$



38. ábra

Visszatérve oda, ahonnan kiindultunk, bebizonyítható, hogy tetszőleges eloszlású ξ valószínűségi változó esetén

$$M(|\xi - m_e|) \leq M(|\xi - d|), \quad (4.12.2)$$

ahol d tetszőleges valós szám. Szimmetrikus eloszlás esetén $m_e = M(\xi)$.

4.13. Kvantilisok, terjedelem, módusz. A mediánhoz analóg módon értelmezhetjük a kvantilisokat. A p -edrendű kvantilis az eloszlást p , $1-p$ arányban osztja ketté. Ugyanaz a három eset fordul elő, mint a medián definíciójában. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az

$$F(x) = p$$

egyenletnek van egy egyértelmű megoldása. Más esettel kvantilisokkal kapcsolatban nem fogunk foglalkozni. Ezt az x számot Q_p -vel jelöljük, és a ξ valószínűségi változó, ill. eloszlása p -edrendű kvantilisának nevezzük. Egy-két p számhoz tartozó Q_p az eloszlásról jelentős tájékoztatást nyújthat. Ha pl. ismerjük a $p = 0,01; 0,05; 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 0,95; 0,99$ értékekhez vagy ezek egy részéhez tartozó kvantilisokat, máris tájékozód-

tunk az eloszlást illetően. A $p=0,5$ értékhez tartozó kvantilis a medián. A $Q_{\frac{1}{4}}$ és $Q_{\frac{3}{4}}$ kvantiliseket alsó, ill. felső kvartiliseknek nevezzük. Ezek különbségének fele, a

$$\frac{Q_{\frac{3}{4}} - Q_{\frac{1}{4}}}{2}$$

szám az interkvantilis félterjedelem nevet viseli, és a szóródás egyik mértéke gyanánt használatos. Bebizonyítható, hogy szimmetrikus eloszlású ξ valószínűségi változó esetén

$$\frac{Q_{\frac{3}{4}} - Q_{\frac{1}{4}}}{2} \equiv \sqrt{2} D(\xi). \quad (4.13.1)$$

Ha egy valószínűségi változó korlátos és (t_1, t_2) az a legszűkebb intervallum, melyre teljesül, hogy

$$P(t_1 \leq \xi \leq t_2) = 1,$$

akkor ennek az intervallumnak a $t_2 - t_1$ hosszát a ξ valószínűségi változó, ill. az eloszlása terjedelmének nevezzük.

A terjedelem ismét a szóródás egyik mértéke. Bebizonyítható, hogy fennáll a

$$D^2(\xi) \equiv \frac{t_2 - t_1}{2} \quad (4.13.2)$$

egyenlőtlenség.

A módusz fogalmát a diszkrét és a folytonos eloszlás eseteire definiáljuk.

Folytonos eloszlás esetén a sűrűségfüggvény minden olyan helyét, ahol lokális maximum van, az eloszlás móduszának nevezzük. Aszerint, hogy hány lokális maximum van, beszélünk unimodális, bimodális, trimodális stb. eloszlásokról. A gyakorlatban előforduló legtöbb folytonos eloszlás unimodális. Diszkrét eloszlás esetén a ξ valószínűségi változó lehetséges értékeit előbb nagyság szerint rendezzük, mondjuk a legkiseb-

bel kezdve. Ha az így kapott sorozat $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, a megfelelő p_1, p_2, p_3, \dots valószínűségeket tekintve beszélhetünk most is lokális maximumhelyekről. Ezeket az eloszlás móduszainak nevezzük. A folytonos esethez hasonlóan egy diszkrét eloszlás is lehet unimodális, bimodális stb. A móduszra (ha több van, akkor mindegyikre) az m_d jelölést használjuk.

4.14. Ferdeség, lapultság. Ha egy ξ valószínűségi változó szimmetrikus eloszlású, akkor a páratlan rendű centrális momentumai 0-val egyenlők. A nem szimmetrikus eloszlás esetében tehát kézenfekvő valamelyik páratlan rendű centrális momentumot az aszimmetria, a ferdeség mérőszámának tekinteni. Mivel $\mu_1 = 0$, tanácsos erre a célra a μ_3 momentumot kiválasztani mint a legalacsonyabb rendű, nem triviális értéket szolgáltató centrális momentumot. Ezt a szórás harmadik hatványához viszonyítva, a

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (4.14.1)$$

ún. ferdeségi együtthatót kapjuk. Ezt általában folytonos eloszlás esetében használjuk. A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan unimodális eloszlással, amelynek sűrűségfüggvénye a módusztól valamelyik (pozitív vagy negatív) irányban hosszasan elnyúlik, a másik irányban pedig röviden lefut. Ha ez a pozitív irányban van, tehát a módusztól jobbra, akkor várható, hogy a μ_3 momentumot kifejező integrálban a pozitív harmadik hatványok dominálnak a negatív harmadik hatványokkal szemben és $\mu_3 > 0$. Ha a hosszú fark a módusztól balra van, akkor az várható, hogy $\mu_3 < 0$. Vegyük figyelembe, hogy μ_3 előjele megszabja a ferdeségi együttható előjelét. Aszerint, amint γ_1 pozitív, ill. negatív, beszélünk pozitív, ill. negatív ferdeségű eloszlásról.

Végül az ún. lapultsági együtthatót γ_2 -vel jelölve, ezt a következő egyenlőséggel értelmezzük:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (4.14.2)$$

γ_1 -hez hasonlóan ezt is folytonos eloszlások esetén használjuk. Az ún. normális eloszlás esetén (l. a 6. fejezetet) $\gamma_2 = 0$, ez indokolja a μ_4 hányadosból a 3 levonását. $\gamma_2 > 0$ esetén a sűrűségfüggvény általában magasabban ugrik ki és csúcsosabb, mint a normális eloszlás.

4.15. Feladatok. 1. Bizonyítsuk be a diszkrét és folytonos eloszlások esetére, hogy ha ξ várható értéke létezik, akkor

$$M(\xi) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx - \int_{-\infty}^0 F(x) dx,$$

ahol $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

2. Általánosítsuk a 4.1 szakasz 1. példáját oly módon, hogy minden egyes alkalommal r golyót választunk ki, $r+1$ -et teszünk vissza, a kiválasztottakat és még egy pirosat. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(\xi < \infty) = 1, M(\xi^{r-1}) < \infty, \text{ de már } M(\xi^r) = \infty.$$

3. Egy valószínűségeloszlást szimmetrikusnak nevezünk az m pontra nézve, ha tetszőleges $a > 0$ esetén

$$P(m - a \leq \xi \leq m) = P(m \leq \xi \leq m + a).$$

Bizonyítsuk be a diszkrét és a folytonos eloszlás esetére, hogy ha $M(\xi)$ létezik, akkor $M(\xi) = m$.

4. Legyenek ξ és η független, véges harmadik momentummal bíró valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy

$$M[(\xi + \eta - m_1 - m_2)^3] = M[(\xi - m_1)^3] + M[(\eta - m_2)^3],$$

ahol $m_1 = M(\xi)$, $m_2 = M(\eta)$.

5. Határozzuk meg a 3.20 szakasz 6. feladatában szereplő η és ζ valószínűségi változók várható értékét, továbbá $\frac{\eta + \xi}{2}$ várható értékét és szórását.

6. Legyen A és B két esemény, jelöljék ξ és η ezek indikátor-változóit. Az $A + B$ esemény indikátor változója ekkor $\xi + \eta - \lambda\eta$. Ennek várható értéke egyrészt az $A + B$ esemény valószínűsége, másrészt

$$M(\xi + \eta - \xi\eta) = M(\xi) + M(\eta) - M(\xi\eta) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Ezzel igen egyszerű bizonyítást nyertünk egy már eddig is ismert formulára. A most ismertetett alapgondolat felhasználásával bizonyítsuk be az általános valószínűségi tételeket.

7. Egy kockával addig dobunk, míg 6-os nem lesz az eredmény. Mennyi az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk.

8. Határozzuk meg az $f(x) = xe^{-x}$, $x > 0$ sűrűségfüggvényű eloszlás várható értékét, szórását, mediánját és modulusát.

9. Az $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ ($-\infty < x < \infty$) sűrűségfüggvényű eloszlást Laplace-eloszlásnak nevezzük. Határozzuk meg ennek várható értékét és szórását.

10. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 2\pi)$ intervallumban. Bizonyítsuk be, hogy $\sin \xi$ és $\cos \xi$ korrelálatlan valószínűségi változók.

11. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$$h(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ és η korrelációs együtthatóját.

12. A pétervári probléma. Egy játékos feldob egy pénzdarabot. Ha az eredmény fej, nyer egy forintot. Ha még egyszer fej a dobás eredménye, újabb forintot nyer. Ezután további $2, 2^2, 2^3, \dots$ forint a nyereménye és a játék addig tart, míg egyszer írást nem dob. Mutassuk meg, hogy a játékos egy játék során elért nyereményösszegének a várható értéke ∞ .

$$13. \text{ Legyen } \Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nn} \end{vmatrix} \text{ egy } n\text{-edrendű determináns, melynek}$$

elemei független, a 0 pontra szimmetrikus eloszlású valószínűségi változók, melyekről feltesszük még, hogy szórásaik egyenlők, $D^2(\varepsilon_{ik}) = \sigma^2$, $i, k = 1, \dots, n$. Bizonyítsuk be, hogy $D^2(\Delta) = n! \sigma^{2n}$.

NEVEZETES ELOSZLÁSTÍPUSOK

5.1. Általános megjegyzések. Ebben a fejezetben felsoroljuk azokat a valószínűségeloszlásokat, amelyek a gyakorlati alkalmazás során legtöbbször előfordulnak. Mindegyik felsorolásra kerülő eloszlástípus speciális sajátosságait megtárgyaljuk. Éppen ez az alábbi felsorolás értelme. Ha ui. egy-egy problémát matematikailag tárgyalunk, akkor a továbbiakban nem szükséges az ott felmerülő, jól ismert eloszlástípusok különféle tulajdonságait újból és újból vizsgálni. Szó sincs azonban arról, hogy csak ezek a valószínűségeloszlások léteznek. Ahogyan a gyakorlat újabb és újabb problémákat vet fel, úgy bővül ezek köre is. Ezen túlmenően, a matematikus számára egy valószínűségeloszlás akkor is létezik, ha azt csak gondolatban konstruáljuk, és nem gyakorlati problémával kapcsolatban lépett fel. Ilyen értelemben annyi folytonos eloszlás létezik, mint ahány olyan $f(x) \geq 0$ függvény van, melynek az egész számsíkon vett integrálja 1-gyel egyenlő. Ugyanígy, annyi diszkrét eloszlás van, mint ahány különböző x_1, x_2, \dots sorozatot és hozzájuk tartozó 1 összeget adó p_1, p_2, \dots nemnegatív számokat konstruálhatunk. Ennek és a következő fejezetnek az anyaga tehát inkább tájékozódást kíván nyújtani az eddig felmerült, sokrétűen vizsgált és többnyire tabellált eloszlástípusokról. Ismertetésükre azt a módszert választjuk, hogy megemlítünk egy-egy problémát, amelynek megoldása elvezet az adott típusú valószínűségeloszláshoz. Ha pedig egy eloszlástípus, mint pl. a normális eloszlás, nagyszámú, heterogén problémával kapcsolatban jelentkezik, akkor kidomborítjuk azt a közös vonást, mely a különféle problémákban fellelhető, és indokolja az eloszlástípus felléptét.

5.2. A binomiális eloszlás. Tekintsünk egy olyan kísérletet, amelynek csak két kimenetele lehet; jelöljük ezeket a -val és b -vel. Az ilyen kísérletet *egyszerű alternatívának* nevezzük. Minden egyes olyan kísérletet, melyben csupán egy A esemény és ennek \bar{A} kiegészítője érdekel bennünket, egy ilyen, két kimenetű kísérletnek tekinthetünk. Jelölje p az a , $q = 1 - p$ a b kimenetel valószínűségét. Végezzük el a kísérletet n -szer egymástól függetlenül, és jelölje ξ az n számú kísérlet közül azoknak a számát, amelyekben az a lehetőség következett be. A $\xi = k$ esemény valószínűségét a BERNOULLI-probléma tárgyalása során már meghatároztuk (l. a 2.11. szakaszt), eszerint

$$P_k = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.2.1)$$

Az (5.2.1) valószínűségek összege 1-gyel egyenlő, mert ξ a $0, 1, \dots, n$ értékek közül valamelyiket biztosan felveszi. Ugyanez a binomiális tételre támaszkodva is indokolható. Eszerint ui.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Az (5.2.1) eloszlást *binomiális eloszlásnak* nevezzük.

A binomiális eloszlás két paramétert tartalmaz, ezek n és p . Konkrét probléma esetén n is és p is konkrét számértékek. Ha a P_k valószínűségeket a számsíkján $0, 1, \dots, n$ pontjaiba húzott merőleges egyenesekre felmérjük, akkor a P_0, P_1, \dots, P_n magasságok egy darabig növekszenek, azután csökkennek. A legnagyobb valószínűség a $k = [(n+1)p]$ indexhez tartozik.

Tekintsük ui. a

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p}$$

hányadost, és futtassuk k -t 1-től n -ig. Ebből látható, hogy

$$P_k \geq P_{k-1}$$

aszerint, amint

$$\frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p} \geq 1,$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

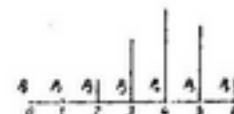
$$(n+1)p \geq k.$$

Két eset van: 1. $(n+1)p$ nem egész szám; 2. $(n+1)p$ egész szám. Az első esetben k nem lehet egyenlő $(n+1)p$ -vel, de amíg eléri az $[(n+1)p]$ értéket,¹¹ addig $P_k > P_{k-1}$. Ha k ezt túlhaladja, akkor $P_k < P_{k-1}$. Az eloszlás tagjaira tehát teljesül, hogy

$$P_0 < P_1 < \dots < P_{[(n+1)p]} > P_{[(n+1)p]+1} > \dots > P_n.$$

A maximális valószínűség a $k = [(n+1)p]$ indexhez tartozik. Ez egyúttal az eloszlás módusza. A második esetben $(n+1)p$ egész szám, k tehát felveszi ezt az értéket. Amíg ennél kisebb, addig $P_k > P_{k-1}$. Ha $k = (n+1)p$, akkor $P_k = P_{k-1}$, és ha $k > (n+1)p$, akkor $P_k < P_{k-1}$. Ekkor tehát két maximális valószínűség van. Az eloszlás tagjaira az alábbi egyenlőtlenség sorozat teljesül:

$$P_0 < P_1 < \dots < P_{(n+1)p-1} = P_{(n+1)p} > \dots > P_n.$$



39. ábra

Mivel $(n+1)p$ egész szám, $(n+1)p = [(n+1)p]$, tehát az $[(n+1)p]$ indexhez tartozó valószínűség mindkét esetben maximális (l. a 39. ábrát, ahol az $n=6$, $p=2/3$ paraméterű binomiális eloszlás tagjait ábrázoltuk).

A ξ valószínűségi változót előállíthatjuk a következő módon. Defináljuk az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változókat, mégpedig legyen

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-edik kísérlet eredménye az } a \text{ lehetőség;} \\ 0 & \text{ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Az egyes kísérletek függetlensége következtében az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók függetlenek. Másrészt, ezeket összeadva,

¹¹ Az $[x]$ szimbólum az x szám egész részét, tehát a legnagyobb, x -nél nem nagyobb egész számot jelenti.

az összegben pontosan annyi 1-es áll, mint ahányszor az n kísérlet során az a lehetőség bekövetkezett, tehát

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n. \quad (5.2.2)$$

Ennek felhasználásával egyszerűen ki tudjuk számítani ξ várható értékét és szórását. Az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak,

$$\begin{aligned} P(\eta_i = 1) &= p; \\ P(\eta_i = 0) &= q = 1 - p, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

tehát várható értékeik és szórásaik is megegyeznek. η_i várható értéke és szórásnégyzete a következő:

$$M(\eta_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p;$$

$$D^2(\eta_i) = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq(p+q) = pq.$$

Innen következik, hogy

$$M(\xi) = np; \quad (5.2.4)$$

$$D^2(\xi) = npq. \quad (5.2.5)$$

A $pq = p(1-p)$ szorzat akkor maximális, ha $p = \frac{1}{2}$, $D^2(\xi)$

tehát nem lehet nagyobb, mint $\frac{n}{4}$.

Egyes esetekben a p számot nem ismerjük, sőt éppen a p -t kell meghatároznunk és a kísérletsorozatot is ennek érdekében végezzük. A p valószínűség ui. gyakran valamilyen, számunkra fontos arányt fejez ki. Ha pl. bizonyos mennyiségű munkadarab között a selejtesek aránya p -vel egyenlő, és visszatevéssel kiválasztunk n -et, akkor a fent leírt kísérletsorozatot végeztük el, ahol mindegyik kísérlet esetén két lehetőség van: vagy selejtest vagy hibátlan választunk ki. Az előbbi eset valószínűsége éppen p . Egy másik példa a következő. Adott T felszínű talajrészben szikes foltok találhatók, amelyeknek összfelšíne t . A $\frac{t}{T}$ arány közelítő meghatározására lehetőség nyílik oly módon, hogy n pontot véletlenszerűen és egymástól függetlenül a T felszínű talajrészre rádobunk. Ha a kísérletet olyképpen

végezzük, hogy mindegyik pont egyenlő felszínű részekbe egyenlő valószínűséggel essék, akkor mindegyik pontra $p = \frac{t}{T}$ annak a valószínűsége, hogy szikes foltba esik. Itt is a p számot kell meghatározni.

Arra vonatkozólag, hogy az n kísérlet során a ξ -re kapott érték felhasználásával hogyan lehet p -re következtetni, továbbá előírt pontosságú közelítés esetén milyen nagynak kell n -nek lennie, a 9. és a 10. fejezetben választunk.

5.3. A polinomiális eloszlás. Tegyük fel, hogy egy kísérletnek r számú kimenetele lehet, és jelöljük ezeket a_1, a_2, \dots, a_r -rel. A megfelelő valószínűségeket jelöljük rendre p_1, p_2, \dots, p_r -rel. Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$$

egyenlőség. Végezzük el a kísérletet n -szer függetlenül, és tekintsük ezt az n kísérletet együtt egyetlen kísérletnek. Az a_1, a_2, \dots, a_r lehetőségek közül mindegyik előfordulási száma valószínűségi változó. Jelölje ξ_i az a_i lehetőség előfordulási számát az n kísérlet során, és határozzuk meg a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók együttes eloszlását, vagyis a

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_r} = P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r)$$

valószínűségeket. Mivel n kísérletet végzünk, fennáll a

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r = n \quad (5.3.1)$$

egyenlőség, tehát P_{k_1, k_2, \dots, k_r} csak akkor lehet 0-tól különböző, ha

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$$

Az n független kísérletből alkotott kísérlet minden egyes kimenetele az a_1, a_2, \dots, a_r betűk egy speciális sorozatával reprezentálható. Egy ilyen speciális sorozat pl. a következő:

$$\underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{k_1} \underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{k_2} \dots \underbrace{a_r a_r \dots a_r}_{k_r}.$$

Ennek a valószínűsége a függetlenség következtében

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}.$$

Minden olyan sorozatnak, melyben az a_1 pontosan k_1 -szer, ..., az a_r pontosan k_r -szer fordul elő, ugyanennyi a valószínűsége. Az a kérdés tehát, hogy hány ilyen sorozat van. Nyilván annyi, mint ahány permutációja van a fenti speciális sorozat betűinek. Az ismétléses permutációkkal kapcsolatban mondottak szerint ezeknek a permutációknak a száma

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!},$$

tehát

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}, \quad (5.3.2)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$$

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók külön-külön mind binomiális eloszlásúak, rendre p_1, p_2, \dots, p_r paraméterrel. Az (5.3.2) valószínűségek összege 1-gyel egyenlő, mert a $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r = n$ esemény biztos esemény. Ugyanez a polinomiális tételre támaszkodva is igazolható, ti.

$$\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_r = n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r} = (p_1 + p_2 + \dots + p_r)^n = 1.$$

Az (5.3.2) eloszlást polinomiális eloszlásnak nevezzük.

5.4. A hipergeometrikus eloszlás. Térjünk vissza az 1.9. szakaszban tárgyalt problémához. Láttuk azt, hogy ha egy urnában M piros és $N-M$ fehér golyó van, és n -et visszatevés nélkül, véletlenszerűen kiválasztunk, akkor

$$P_k = P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ahol a ξ valószínűségi változó a kiválasztott piros golyók számát jelenti.

Az (5.4.1) valószínűségeloszlást hipergeometrikus eloszlásnak nevezzük.

Ez az eloszlás három paramétert tartalmaz, ezek N, M, n . A hipergeometrikus eloszlás tagjai a binomiális eloszláshoz hasonló képet mutatnak. Ugyanolyan módon, mint a binomiális eloszlás esetén, megmutatható, hogy ha

$$(n+1) \frac{M+1}{N+2}$$

nem egész, akkor ennek egész részéig a P_k számok növekednek, azután csökkennek, és csak egy maximális valószínűség van. Ha a fenti szám egész, akkor az előbbi esettel szemben csak annyi a különbség, hogy az ehhez és ennél eggyel kisebb indexhez tartozó P_k -k egyenlők. A

$$k = \left[(n+1) \frac{M+1}{N+2} \right] \quad (5.4.2)$$

indexhez tartozó P_k mindkét esetben maximális.

Definiáljuk az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változókat a következőképpen:

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-edik húzás eredménye piros golyó,} \\ 0 & \text{az ellenkező esetben.} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy fennáll a

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n \quad (5.4.3)$$

egyenlőség. Az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók ekvivalensek, következésképpen az egyes η_i valószínűségi változók azonos eloszlásúak, és szintén azonos eloszlásúak az egyes η_i, η_k ($i \neq k$) párok, együttes eloszlásuk minden különböző i és k

esetén ugyanaz. Ebből következik, hogy

$$M(\eta_i) = M(\eta_1) = \frac{M}{N} = p;$$

$$D^2(\eta_i) = D^2(\eta_1) = \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) = p(1-p)$$

továbbá η_i és η_k kovarianciája ($i \neq k$):

$$\begin{aligned} c_{ik} &= M(\eta_i \eta_k) - M(\eta_i)M(\eta_k) = P(\eta_i = 1, \eta_k = 1) - \\ &- \left(\frac{M}{N}\right)^2 = P(\eta_1 = 1, \eta_2 = 1) - \left(\frac{M}{N}\right)^2 = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} - \left(\frac{M}{N}\right)^2 = \\ &= -\frac{p(1-p)}{N-1}, \end{aligned}$$

ahol a $p = \frac{M}{N}$ jelölést alkalmaztuk. ξ várható értékére (5.4.3) alapján azt kapjuk, hogy

$$M(\xi) = n \frac{M}{N} = np. \quad (5.4.4)$$

A ξ valószínűségi változó szórását az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= M[(\xi - np)^2] = M[(\eta_1 - p + \eta_2 - p + \dots + \eta_n - p)^2] = \\ &= M \left[\sum_{i=1}^n (\eta_i - p)^2 + 2 \sum_{i < k} (\eta_i - p)(\eta_k - p) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n D^2(\eta_i) + 2 \sum_{i < k} c_{ik} = np(1-p) - 2 \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{p(1-p)}{N-1}, \end{aligned}$$

tehát

$$D^2(\xi) = np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right). \quad (5.4.5)$$

Ha a golyókat visszatevéssel húzzuk, akkor ξ binomiális eloszlású $p = \frac{M}{N}$ paraméterrel. Az (5.4.4) és az (5.2.4), továbbá az (5.4.5) és az (5.2.5) formulák összehasonlítása után a következőket mondhatjuk: ha a golyókat visszatevéssel vagy visszatevés nélkül húzzuk, ξ várható értéke mindkét esetben ugyanaz, szórása azonban az utóbbi esetben kisebb és a korrekciós faktor

$$\sqrt{1 - \frac{n-1}{N-1}} \approx \sqrt{1 - \frac{n}{N}}.$$

Az $\frac{n}{N}$ hányadost kiválasztási aránynak nevezzük. Ha n/N -hez képest elhanyagolható, akkor a korrekciós faktor 0-nak vehető, és a két szórás körülbelül egyenlő.

Gyakorlati szempontból igen fontos probléma a $p = \frac{M}{N}$ sokszor ismeretlen arány közelítő meghatározása. Erre vonatkozólag l. a 10.27 és a 10.28 szakaszt.

5.5. A polihipergeometrikus eloszlás. Tegyük most fel, hogy az urnában levő golyók r különböző kategóriába tartoznak, melyek rendre N_1, N_2, \dots, N_r számú elemet tartalmaznak:

$$N_1 + N_2 + \dots + N_r = N.$$

n számú golyót véletlenszerűen kiválasztva, jelöljük $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ az egyes kategóriákból kiválasztott golyók számát. Belátható, hogy

$$\begin{aligned} P_{k_1, k_2, \dots, k_r} &= P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_r = k_r) = \\ &= \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N_2}{k_2} \dots \binom{N_r}{k_r}}{\binom{N}{n}}, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = n, \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Az (5.5.1) eloszlást polihipergeometrikus eloszlásnak nevezzük.

A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók külön-külön hipergeometrikus eloszlásúak, ez nem szorul bizonyításra.

5.6. A Markov–Pólya–Eggenberger-eloszlás. Tekintsük a következő problémát: egy urnában van M piros és $N-M$ fehér golyó. 1 golyót véletlenszerűen kiválasztunk, majd a kiválasztottal együtt összesen $R+1$ ugyanolyan színű golyót teszünk vissza, ez az $R+1$ lehet 0 is, de nem lehet negatív, vagyis $R \geq -1$. Ezt az eljárást n -szer megismételjük, miközben R mindig ugyanaz a szám. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy n húzás során pontosan k esetben ($0 \leq k \leq n$) húzunk piros golyót.

A megoldás gondolatmenetének megkönnyítése céljából tekintsük azt a húzássorozatot, melyben az első k golyó piros, a többi fehér, és határozzuk meg ennek a valószínűségét. Jelöljük A_1, \dots, A_k rendre azokat az eseményeket, hogy az első, ..., a k -edik húzás eredménye piros golyó, A_{k+1}, \dots, A_n pedig rendre azokat az eseményeket, hogy a $k+1$ -edik, ..., az n -edik húzás eredménye fehér golyó. Ekkor

$$P(A_1) = \frac{M}{N},$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{M+R}{N+R},$$

$$\vdots$$

$$P(A_k|A_1 \dots A_{k-1}) = \frac{M+(k-1)R}{N+(k-1)R},$$

$$P(A_{k+1}|A_1 \dots A_k) = \frac{N-M}{N+R},$$

$$\vdots$$

$$P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}) = \frac{N-M+(n-k-1)R}{N+(n-1)R},$$

tehát a valószínűségek szorzási szabálya szerint ennek a speciális húzássorozatnak a valószínűsége

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M+R}{N+R} \cdots \frac{M+(k-1)R}{N+(k-1)R} \times \\ \times \frac{N-M}{N+R} \cdots \frac{N-M+(n-k-1)R}{N+(n-1)R}.$$

Ugyanennyi minden olyan húzássorozat valószínűsége, melyben pontosan k piros és $n-k$ fehér golyó szerepel, a nevezői mindig R -rel növekszik, a számlálók pedig csak permutálódnak. k számú piros és $n-k$ számú fehér golyót tartalmazó húzássorozat pedig összesen $\binom{n}{k}$ van, a keresett valószínűség tehát a következő:

$$P_k = \binom{n}{k} \frac{\prod_{i=1}^{k-1} (M+iR) \prod_{j=1}^{n-k-1} (N-M+j)}{\prod_{m=1}^{n-1} (N+mR)}, \quad (5.6.1)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Az $R=0$ esetben mindig csak azt a golyót tesszük vissza, amelyiket kihúztuk, P_k -nak tehát az n és $p = \frac{M}{N}$ paraméterekkel rendelkező binomiális eloszlás k indexhez tartozó tagjával meg kell egyeznie. Ez az (5.6.1) képlet alapján ellenőrizhető is. Az $R=-1$ esetben pedig (5.6.1) speciális eseteként a hipergeometrikus eloszlást kapjuk.

Annak felhasználásával, hogy minden M, N ($M < N$) és n esetén az (5.6.1) valószínűségek összegének 1-gyel kell egyenlőnek lennie, bebizonyítható, hogy a piros golyót eredményező húzások ξ számának várható értéke és szórásnégyzete a kö-

vetkező:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^n k P_k = n \frac{M}{N}; \quad (5.6.2)$$

$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= \sum_{k=0}^n k^2 P_k - M^2(\xi) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N+nR}{N+R} = \\ &= np(1-p) \frac{1+nr}{1+r}, \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

ahol a $p = \frac{M}{N}$, $r = \frac{R}{N}$ jelölést alkalmaztuk. ξ várható értéke tehát ugyanaz minden R esetén, szórása azonban már R -től is függ. ξ szórása az $R = -1$ esetben a legkisebb, és ahogyan R növekszik, úgy növekszik $D(\xi)$ is, változatlan M , N és n esetén, feltéve még, hogy $n > 1$.

5.7. A geometriai eloszlás. Tekintsünk egy kísérletet, melynek két kimenetele van: a és b . Ezek valószínűségeit jelöljük p és $q = 1 - p$ számok. A kísérletet egymástól függetlenül végtelen sokszor elvégezve (legalábbis gondolatban), tekintsük ezt egyetlen kísérletnek. Ennek minden kimenetele az a és b számokból alkotott egy-egy végtelen sorozattal jellemezhető. Jelölje η annak a kísérletnek a sorszámát, melyben először fordult elő az a lehetőség. Ha a kísérleteket 1-től kezdve számozzuk, akkor η az 1, 2, ... értékeket veheti fel. Mivel az egyes kísérletek egymástól függetlenek, következik hogy

$$P_k = P(\eta = k) = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.7.1)$$

Az $\eta = 1, \eta = 2, \dots$ események összege nem egyenlő a biztos eseménnyel, mert lehetséges, hogy az a lehetőség egyszer sem következik be. Ennek ellenére a P_k valószínűségek összege 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = q \frac{1}{1-q} = 1,$$

tehát annak a valószínűsége, hogy az a lehetőség sohasem fordul elő: 0.

Az (5.7.1) eloszlást geometriai eloszlásnak nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy a P_k valószínűségek egy geometriai sor tagjai. Mivel $q = 1 - p$, az eloszlás egy paramétert tartalmaz, a továbbiakban p -t tekintjük az eloszlás paraméterének.

Egyszerű számolás mutatja, hogy η várható értéke és szórásnégyzete a következő:

$$M(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = \frac{1}{p}; \quad (5.7.3)$$

$$D^2(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \quad (5.7.4)$$

5.8. A negatív binomiális eloszlás. Vizsgáljunk egy olyan gépet, mely a véletlen hatása következtében időnként leáll. Ha egyenlő időtartamú periódusokat tekintve, mindegyik periódusban a gép működésének valószínűsége q , állásának valószínűsége p , és az egyes periódusokban a gép működése független, akkor $\eta (= \eta_1)$, az első leállásig eltelt periódusok száma — beleszámítva az utolsót is, amikor a gép állt — geometriai eloszlású. Ha ezután a következő leállásig eltelt periódusok számát, az utolsót is beleértve η_2 jelöli s. i. t., akkor a

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n \quad (5.8.1)$$

valószínűségi változó az n -edik leállásig eltelt periódusok számát jelenti, az utolsót is beleértve. Az $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók függetlenek és geometriai eloszlásúak p paraméterrel. Ezt a tényt felhasználhatnánk ξ eloszlásának meghatározására. Ehelyett azonban másképpen járunk el, és az (5.8.1) egyenlőséget csak $M(\xi)$ és $D^2(\xi)$ kiszámításakor használjuk ki.

A ξ valószínűségi változó az $n, n+1, n+2, \dots$ értékeket veheti fel. A $\xi = n+k$ esemény úgy jöhet létre, hogy a kísérlet-

sorozatot reprezentáló a, b (állás, működés) betűkből álló sorozat $n+k$ -edik eleme, vagyis az utolsó elem a , az első $n+k-1$ elem között pedig $n-1$ darab a és k darab b szám szerepel:

$$\underbrace{b \dots ba}_{\eta_1} \underbrace{b \dots ba}_{\eta_2} \dots \underbrace{b \dots ba}_{\eta_n}.$$

Minden ilyen sorozat valószínűsége $q^k p^n$. Az ilyen sorozatok száma pedig annyi, mint ahány különböző módon az utolsó a előtti betűket permutálhatjuk. Ez a szám

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1},$$

ennélfogva

$$P(\xi = n+k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8.2)$$

Az, hogy egyáltalán n számú a a sorozatban előfordul, nem a biztos esemény, az (5.8.2) valószínűségek összege azonban mégis 1. Ugyanis

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!} = (-1)^k \binom{-n}{k}$$

és így, felhasználva azt, hogy ha $|x| < 1$ és α tetszőleges, akkor

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

ebből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} q^k p^n = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-q)^k = p^n (1-q)^{-n} = 1.$$

Az (5.8.2) valószínűségeloszlást negatív binomiális eloszlásnak nevezzük, n és p az eloszlás paraméterei.

Mivel az η_i valószínűségi változók azonos eloszlásúak és függetlenek, mindegyik várható értéke az (5.7.3), szórásnégy-

zete az (5.7.4) szerint meghatározandó szám, ξ várható értéke és szórásnégyzetére (5.8.1) alapján az adódik, hogy

$$M(\xi) = \frac{n}{p}, \quad (5.8.3)$$

$$D^2(\xi) = \frac{nq}{p^2}. \quad (5.8.4)$$

5.9. Az exponenciális eloszlás. Egyes, főleg véletlen időtartamokat jelölő ξ valószínűségi változókra teljesül az a feltétel, hogy bármely x időpontot választva is ki, ha az a véletlen időtartam az x ideig nem ért véget, akkor úgy tekinthető, mintha az egész folyamat az x időpontban kezdődött volna. Ezt a tulajdonságot matematikailag a következő egyenlőség fejezi ki

$$P(\xi \geq x+y | \xi \geq x) = P(\xi \geq y), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (5.9.1)$$

ami viszont a feltételes valószínűség definíciója szerint ekvivalens azzal, hogy

$$P(\xi \geq x+y, \xi \geq x) = P(\xi \geq x)P(\xi \geq y). \quad (5.9.2)$$

Mivel pedig a $\xi \geq x+y$ esemény maga után vonja a $\xi \geq x$ eseményt, az (5.9.2)-vel szintén ekvivalens

$$P(\xi \geq x+y) = P(\xi \geq x)P(\xi \geq y) \quad (5.9.3)$$

egyenlőséghez jutunk. Kérdés, milyennek kell lennie ξ eloszlásának ahhoz, hogy ez az egyenlőség teljesüljön. Bevezetve a

$$G(x) = 1 - F(x), \quad x > 0$$

jelölést, ahol $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, (5.9.3)-ból $G(x)$ -re egy függvényegyenlet adódik:

$$G(x+y) = G(x)G(y), \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (5.9.4)$$

Mivel $F(x)$ monoton nem-csökkenő és $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, következik,

hogy $G(x)$ monoton nem-növekvő és $G(x) \not\equiv 1$. Bebizonyítható, hogy az (5.9.4) függvényegyenlet összes monoton nem-növekvő és nem azonosan 1 megoldásait $G(x) \equiv 0$ ($x > 0$) és a

$$G(x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \quad (5.9.5)$$

függvények szolgáltatják, ahol λ pozitív állandó. Az első esetben $F(x)$ -re azt kapnánk, hogy

$$F(x) = 1, \quad \text{ha } x > 0,$$

ami annyit jelent, hogy a ξ időtartam 1 valószínűséggel csak 0 ideig tart. Ezt a gyakorlatilag érdektelen esetet kizárva, (5.9.5) alapján az $F(x)$ eloszlásfüggvényre az adódik, hogy

$$F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0, \quad (5.9.6)$$

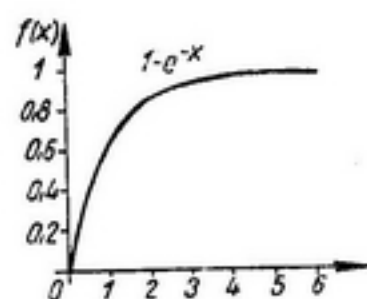
és λ pozitív állandó.

Mivel $\xi \geq 0$, következik hogy $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$. A ξ valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénye is 0, ha $x \leq 0$ és (5.9.6) alapján

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0. \quad (5.9.7)$$

Azt az eloszlást, melynek eloszlásfüggvénye az (5.9.6), sűrűségfüggvénye az (5.9.7) függvény, exponenciális eloszlásnak nevezzük. A $\lambda = 1$ esetnek megfelelő eloszlásfüggvényt a 40. ábrán láthatjuk.

Reálisnak látszik, hogy az (5.9.1) feltételt kielégíti egy neutronnak egy atommagba ütközéséig eltelt idő, egy radioaktív atom elbomlásáig eltelt idő, bizonyos esetekben egy kémiai kötés felszakadásáig eltelt idő mint valószínűségi változó. Ezek tehát exponenciális eloszlásúak. Exponenciális eloszlást követ valamely használati tárgy (pl. gépalkatrész) élettartama akkor, ha csak véletlen törés következtében megy tönkre, a kopás hatása gyakorlatilag elhanyagolható. Ekkor ugyanis teljesül az (5.9.1) feltétel. Általában feltételezzük, hogy a kü-



40. ábra

lönféle várakozási idők is exponenciális eloszlásúak, és ezt a feltételezést sok esetben numerikus adatokkal igazolták.

Az exponenciális eloszlás még abból a feltételből is levezethető, mely szerint a $P(\xi < x + \Delta x | \xi \geq x)$ valószínűség kis Δx -ek esetén arányos Δx -szel, pontosabban

$$P(\xi < x + \Delta x | \xi \geq x) = \lambda \Delta x + o(\Delta x) \quad (5.9.8)$$

ahol λ pozitív állandó, $o(\Delta x)$ pedig olyan mennyiséget jelöl, amelyre teljesül, hogy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$$

Az (5.9.8) egyenlőség ui. ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \lambda \Delta x + o(\Delta x),$$

ahonnan, mindkét oldalt Δx -szel osztva és elvégezve a $\Delta x \rightarrow 0$ határmenetet, az

$$\frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \lambda$$

differentiálegyenlet adódik. Ennek az $F(0) = 0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása pedig éppen az (5.9.6) függvény.

Parciális integrálással ξ várható értékére és szórásnégyzetére a következő adódik:

$$M(\xi) = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}, \quad (5.9.9)$$

$$D^2(\xi) = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.9.10)$$

Példa. A radioaktív atom. Kísérletileg ellenőrizték, hogy egy radioaktív preparátum tömegének időegységre eső megváltozása (csökkenése)

arányos a tömegével. Ezt a tényt matematikailag a következő differenciálegyenlettel fejezzük ki

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda m,$$

ahol $m = m(t)$ a preparátum t időpontbeli tömege. Az $m(0) = m_0$ jelölést alkalmazva és a kezdő feltétel mellett a fenti differenciálegyenletet integrálva, azt kapjuk, hogy

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

Rátérve most a jelenség valószínűségszámítási tárgyalására, tételezzük fel, hogy az egyes atomok egymástól függetlenül bomlanak, élettartamaik azonos eloszlású valószínűségi változók $F(t)$ eloszlásfüggvényével. Annak a valószínűsége tehát, hogy egy kiválasztott atom t ideig nem bomlik el, $1 - F(t)$. Ha eredetileg n_0 atom van, akkor a t ideig el nem bomlott atomok számának várható értéke

$$n = n_0(1 - F(t))$$

Ha $m = m(t)$ -t úgy interpretáljuk, mint a tömeg várható értékét a t időpontban, akkor figyelembe véve azt, hogy n arányos a t időpontig el nem bomlott atomok tömegével, az m -re és n -re nyert egyenlőségekből következik, hogy

$$1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$

vagyis minden egyes atom élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. A λ paraméter és a $t_{1/2}$ felezési idő kapcsolatát az

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{n}{n_0} = \frac{1}{2}$$

egyenlőségből határozhatjuk meg és ebből adódik, hogy

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

A rádium atom esetén $t_{1/2} = 1580$ év. Mivel $\ln 2 = 0,69315$, tehát $\frac{1}{\lambda} = 2279$ év, vagyis ennyi egy rádium atom átalakulásáig eltelt idő várható értéke.

5.10. A gamma-eloszlás. Az exponenciális eloszlás a geometriai eloszlás folytonos analogonja. Ha független, exponenciális eloszlású és azonos λ paraméterű $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat összeadunk, akkor a

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad (5.10.1)$$

összeg eloszlása pedig a negatív binomiális eloszlás folytonos analogonja lesz. Jelölje $f_n(x)$ az (5.10.1) összeg sűrűségfüggvényét. A (3.13.2) formulára támaszkodva, teljes indukcióval megmutatható, hogy

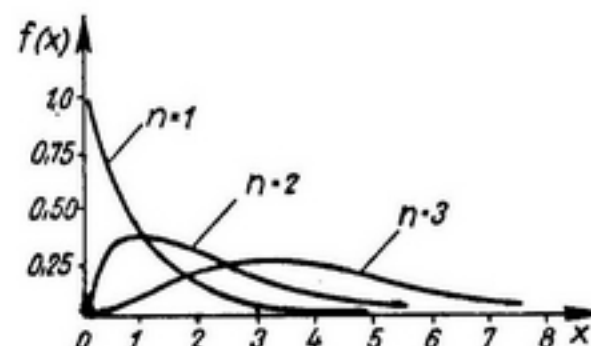
$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0. \quad (5.10.2)$$

Azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye a (5.10.2) függvény, n -edrendű gamma-eloszlásnak nevezzük. A függvényt a $\lambda = 1$; $n = 1, 2, 3$ esetekben a 41. ábrán ábrázoltuk.

Az (5.10.1) egyenlőségből (5.9.9) és (5.9.10) figyelembevételével következik, hogy ha ξ n -edrendű, gamma-eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M(\xi) = \frac{n}{\lambda} \quad (5.10.3)$$

$$D^2(\xi) = \frac{n}{\lambda^2}. \quad (5.10.4)$$



41. ábra

Ugyanezt az eredményt természetesen az $f_n(x)$

függvényre támaszkodva is megkaphatjuk.

Az egészrendű gamma-eloszláson kívül van tetszőleges pozitívrendű gamma-eloszlás is. Ennek sűrűségfüggvénye

$$f_p(x) = \frac{\lambda^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x}, \quad \text{ha } x > 0. \quad (5.10.5)$$

A gamma-függvényre támaszkodva könnyű belátni, hogy ez valóban sűrűségfüggvény, vagyis az egész számegegyenesen vett integrálja (amit elegendő 0-tól ∞ -ig venni, mert $f_p(x)=0$, ha $x \leq 0$) 1-gyel egyenlő. Ugyancsak a gammafüggvény felhasználásával bizonyítható, hogy az (5.10.5) sűrűségfüggvényű eloszlás várható értéke p/λ , szórásnégyzete pedig p/λ^2 .

5.11. Különböző paraméterű exponenciális eloszlások kompozíciója. Ha az (5.10.1) összegben a valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak és függetlenek, paramétereik azonban az egymástól különböző $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számok, akkor az összeg $g_n(x)$ sűrűségfüggvénye a következő:

$$g_n(x) = (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \times \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k x}}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} \quad (5.11.1)$$

Példa. Radioaktív bomlássorok. Valamilyen radioaktív atomot tekintve, ennek egy újfajta atommá való átalakulásáig eltelt idő az előző példa szerint exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Jelölje λ_1 ennek az eloszlásnak a paraméterét. A keletkezett atom szintén tovább alakul, élettartama szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változó, valamilyen λ_2 paraméterrel s. i. t., míg végül a sor egy stabilis elemmel záródik. Ha a sor összesen $n+1$ elemet tartalmaz — az utolsót is beleszámítva —, akkor a teljes átalakulási idő összesen n átalakulási idő összege. Jelöljék $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ az egyes átalakulási időket. A mondottak szerint ezek exponenciális eloszlású valószínűségi változók, rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paraméterekkel. Feltehetjük még, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók. Eszerint a

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

teljes átalakulási idő sűrűségfüggvényét az (5.11.1) képlet szolgáltatja.

5.12. Az egyenletes eloszlás. Az egyenletes eloszlásnak van diszkrét és folytonos, egy- és többdimenziós változata.

Egy ξ diszkrét valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezünk az x_1, x_2, \dots, x_n számokon, ha ezek alkotják ξ lehet-

séges értékeit, és mindegyik egyenlően valószínű, azaz

$$P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.12.1)$$

Végtelen sok különböző számértéken egyenletes eloszlás nem értelmezhető. Ha ui. minden x_1, x_2, \dots szám egyenlően valószínű, akkor a

$$P(\xi = x_1) + P(\xi = x_2) + \dots = p + p + \dots = 1$$

feltétel ellentmondást tartalmaz, hiszen a $p > 0$ esetben az összeg végtelen, a $p = 0$ esetben pedig 0.

Az (5.12.1) eloszlású valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete a következő:

$$M(\xi) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \quad (5.12.2)$$

$$D^2(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M(\xi))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (5.12.3)$$

Egy folytonos valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezünk az (a, b) intervallumban, ha sűrűségfüggvénye a következő (l. a 42. ábrát)

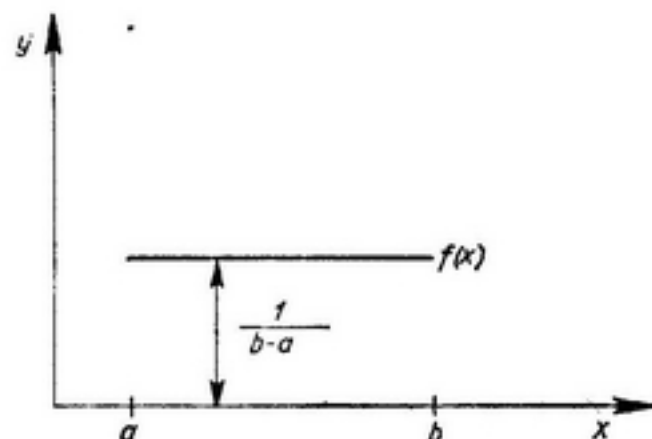
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.12.4)$$

A várható értéket és a szórásnégyzetet egyszerű integrálással kiszámíthatjuk:

$$M(\xi) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}, \quad (5.12.5)$$

$$D^2(\xi) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (5.12.6)$$

Egy ξ diszkrét valószínűségi vektorváltozót egyenletes eloszlásúnak nevezünk az x_1, x_2, \dots, x_n vektorokon, ha ξ csak ezekkel lehet egyenlő és mindegyik vektor valószínűsége $\frac{1}{n}$.



42. ábra

Egy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ valószínűségi vektorváltozót egyenletes eloszlásúnak nevezünk az r dimenziós tér E tartományában, ha komponenseinek együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{|E|}, & \text{ha } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.12.7)$$

Ennek analógiájára egy $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ valószínűségi vektorváltozót egyenletes eloszlásúnak nevezünk az r dimenziós tér valamely felületén vagy görbéjén, ha egyenlő mértékű részekbe ξ egyenlő valószínűséggel esik.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független és a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és jelölje $f_n(x)$ a

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

összeg sűrűségfüggvényét. Az

$$f_n(x) = \int_0^1 f_{n-1}(x-y)f_1(y)dy = \int_0^1 f_{n-1}(x-y)dy = \int_{x-1}^x f_{n-1}(u)du$$

formulára támaszkodva, teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left[x^{n-1} - \binom{n}{1}(x-1)^{n-1} + \binom{n}{2}(x-2)^{n-1} - \dots \right], \quad 0 < x < n, \quad (5.12.8)$$

ahol a zárójelen belül az összeg addig halad, amíg $x, x-1, x-2, \dots$ pozitív számok. $f_n(x) = 0$, ha $x \leq 0$, vagy $x \geq n$, mivel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ értékei 0 és 1 közé esnek. Az $n=1$ esetben definíció szerint

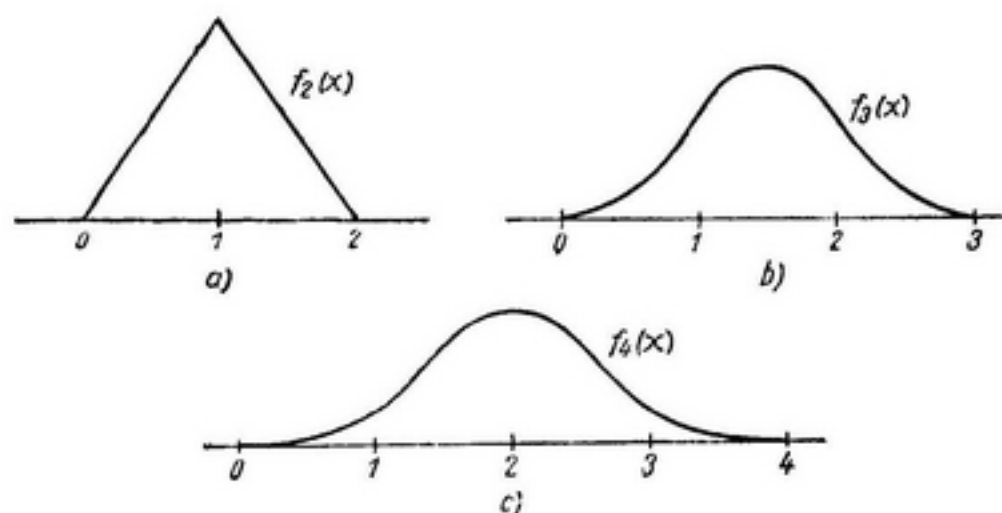
$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (5.12.9)$$

az $n=2, 3$ esetben pedig az (5.12.8) képlet alapján az adódik, hogy

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ 2-x, & \text{ha } 1 \leq x < 2; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.12.10)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ \frac{x^2 - 3(x-1)^2}{2}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{(3-x)^2}{2}, & \text{ha } 2 \leq x < 3; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.12.11)$$

Az $f_2(x), f_3(x)$ és $f_4(x)$ függvények geometriai képét a 43. ábrán láthatjuk.



43. ábra

A POISSON-ELOSZLÁS

Véletlen eseményfolyamatok

A Poisson folyamat két alkalmazása

5.13. Feladatok. 1. Bizonyítsuk be, hogy a hipergeometrikus eloszlásnak az (5.4.2) indexhez tartozó tagja maximális.

2. Vannak olyan láncmolekulák, melyek bizonyos körülmények között úgy bomlanak, hogy mindig csak a végeken levő kötések szakadnak fel. Tegyük fel, hogy egy ilyen, n egységet tartalmazó molekula végein levő kötések egymástól és a korábban felszakadt kötések élettartamaitól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azonos, λ paraméterrel. Határozzuk meg a teljes lebomlási idő sűrűségfüggvényét.

3. Határozzuk meg az (a, b) intervallumban egyenletes eloszlás k -adik momentumát.

4. Határozzuk meg az (a, b) és a (c, d) intervallumokban egyenletes eloszlások kompozícióját.

5. Egy rajzoló egy egyenes szakasz 0-val megjelölt pontjától egymás után 5 egyenlő hosszúságú szakaszt mér fel. Minden egyes szakasz felmérésénél a kezdőpont megválasztásában hibát követ el, mely egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $-\frac{1}{2}$ mm, $\frac{1}{2}$ mm intervallumban.

Kérdés, hogy ha a hibák egymástól függetlenek, mennyi a valószínűsége annak, hogy a hibák összegének abszolút értéke nem nagyobb, mint 1,5 mm.

Ebben a fejezetben arra törekszünk, hogy megmutassuk, milyen kitüntetett és fontos szerepe van a diszkrét eloszlások között a POISSON-eloszlásnak. A POISSON-eloszlás klasszikus bevezetémódját a 6.1 szakaszban ismertetjük. Eszerint a POISSON-eloszlás a binomiális eloszlásnak egy speciális értelemben vett határértéke, és lehetőséget nyújt a binomiális eloszlás valószínűségeinek approximációjára nagy n és kis p esetén. A modern valószínűségelméletben azonban jelentősége túlnő az előbbi problémán. Itt elsősorban a véletlen eseményfolyamatok, véletlen pontelhelyezkedésekkel kapcsolatos vizsgálatokra gondolunk. Ezekkel foglalkozunk a további szakaszokban. Az említett példákkal kapcsolatban előre is meg kell jegyeznünk, hogy ezek távolról sem merítik ki a POISSON-eloszlás alkalmazási körét.

6.1. A Poisson-eloszlás mint a binomiális eloszlás határértéke. Tekintsük a binomiális eloszlás tagjait:

$$P_k^{(n)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.1.1)$$

A felső n indexszel az n -től való függést tüntetjük fel. Növeljük n -et minden határon túl, miközben p tartson 0-hoz, mégpedig úgy, hogy minden n esetén az np szorzat egy állandó érték maradjon:

$$np = \lambda > 0. \quad (6.1.2)$$

Ekkor rögzített k esetén a (6.1.1) valószínűség egy határértékhez tart, melyet alább meghatározunk.

Fejezzük ki a (6.1.2) egyenlőségből a p -t, és helyettesítsük be a $P_k^{(n)}$ valószínűség (6.1.1) képletébe. Ezután egyszerű átalakításokat végezve, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_k^{(n)} &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{nn\cdots n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Ha k rögzített egész-szám és $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{nn\cdots n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \rightarrow 1; \\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Az analízisből ismeretes továbbá a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

határértékrekláció. Ezek alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_k^{(n)} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.3)$$

Megjegyezzük, hogy a (6.1.2) egyenlőség helyett elegendő csupán a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda > 0$$

reláció teljesülését feltételezni, (6.1.3) már ebből is következik. Ezt nem bizonyítjuk, de az analízisben járatos olvasó a bizonyítást maga is elvégezheti,

A (6.1.3) valószínűségekről csak annyit tudunk, hogy nem-negatívak, külön bizonyításra szorul azonban az, hogy összegük 1-gyel egyenlő. Ezt azonban az exponenciális függvény MACLAURIN-sora alapján könnyű belátni. Ismeretes, hogy minden x esetén

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

A 0, 1, 2, ... nem-negatív egész számokhoz tartozó (6.1.3) valószínűségek tehát a számegyenesen egy valószínűségeloszlást határoznak meg.

A (6.1.3) eloszlást *Poisson-eloszlásnak* nevezzük. λ az eloszlás paramétere.

Előbbi eredményünket a következő speciális példán illusztráljuk. Tegyük fel, hogy n golyót N számú számozott urnába egymás után véletlenszerűen elhelyezünk. Annak a valószínűsége, hogy egy meghatározott urnába k golyó kerüljön,

$$P_k = \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

Ha az urnák számát és ezzel együtt a golyók számát minden határon túl növeljük, de oly módon, hogy

$$\frac{n}{N} = \lambda > 0,$$

ahol λ állandó, akkor P_k határértéke a λ paraméterű Poisson-eloszlás k -adik tagja. Durván szólva, ezzel egyenlő annak a valószínűsége, hogy végtelen sok urnába végtelen sok golyót elhelyezve, a kiválasztott urnába k számú golyó kerüljön, ahol λ az egy urnára eső golyók száma.

A (6.1.3) határértékrekláció lehetőséget nyújt a binomiális eloszlás tagjainak a Poisson-eloszlás tagjaival való közelíté-

sére. Eszerint az

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (6.1.4)$$

valószínűséget elég nagy n esetén az

$$\frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \quad (6.1.5)$$

valószínűséggel közelíthetjük. Felvetődik azonban a kérdés, hogy véges n esetén milyen pontos ez a közelítés, tehát adott n, k és p esetén mekkora a relatív hiba? Bizonyítás nélkül közöljük, hogy

$$\begin{aligned} & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left/ \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \right. = \\ & = \exp \left\{ \frac{kp^2}{2} - \frac{(k-np)^2}{2n} + \frac{k}{2n} - \frac{k^3}{2n^2} + R \right\}, \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

ahol

$$|R| < \frac{k^2(3k+4)}{12(n-k)^2} + \frac{1}{3}(n-k) \left(\frac{p}{1-p} \right)^3.$$

Innen látható, hogy a közelítés akkor jó, ha n nagy, de p és k kicsi. Illusztrációképpen alább összehasonlítjuk a binomiális eloszlás első tíz tagját a Poisson-eloszlás megfelelő tagjaival

$n=64$ és $p=\frac{1}{32}$ esetén.

k	A binomiális eloszlás tagjai	A POISSON-eloszlás tagjai
0	0,131	0,135
1	0,271	0,271
2	0,275	0,271
3	0,183	0,180
4	0,090	0,090
5	0,035	0,036
6	0,011	0,012
7	0,003	0,004
8	0,001	0,001
9	0,000	0,000

Ha egy ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású λ paraméterrel, azaz

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

akkor

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda;$$

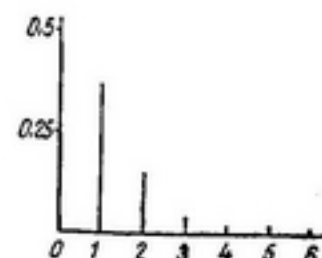
$$D^2(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2,$$

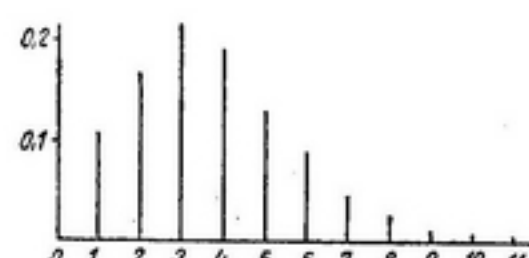
$$\text{tehát} \quad M(\xi) = \lambda; \quad D^2(\xi) = \lambda. \quad (6.1.7)$$

A Poisson-eloszlás λ paramétere egyben az eloszlás várható értéke és szórásnégyzete is.

A binomiális eloszlás maximális tagjának meghatározásakor alkalmazott gondolatmenethez hasonlóan megállapítható, hogy a $P_k = P(\xi = k)$ valószínűség maximális, ha $k = [\lambda]$. Ha λ nem egész, akkor csak ez az egy maximális tag van, ha azonban λ egész, akkor $P_\lambda = P_{\lambda-1}$. A maximális tagig vagy tagokig az eloszlás tagjai növekednek, azután csökkennek, kivételt képez természetesen az az eset, amikor $[\lambda] = 0$, vagy $\lambda = 1$ (l. a 44. és a 45. ábrát, ahol a $\lambda = 0,8$ ill. a $\lambda = 3,5$ paraméterű Poisson-eloszlásokat ábrázoltuk).



44. ábra



45. ábra

6.2. Véletlen eseményfolyamatok. Tegyük fel, hogy bizonyos egymás után következő időpillanatokban események történnek és mindegyik esemény megtörténtét egyetlen időpont jelzi. Egy ilyen időben lejátszódó jelenséget *eseményfolyamatnak* nevezünk. Ha az egyes események véletlenszerű időpontokban történnek, akkor *véletlen eseményfolyamattal* állunk szemben. Véletlen eseményfolyamatot alkotnak pl. egy telefonközpontba beérkező hívások, egy elektroncsőben a katódról az anódra érkező elektronok becsapódásai, egy kiszolgáló berendezéshez beérkező kiszolgálándók beérkezései, a kozmikus részecskék beérkezései számlálócsőbe, a meteorológiai frontok érkezései, textilgyárban a gépek leállásai fonalszakadás miatt, egy villamos vagy autóbuszmegállóhoz az utasok érkezési időpontjai, a radioaktív atomok egymás utáni bomlásai, az emberek születéseinek időpontjai stb.

Egy véletlen eseményfolyamattal kapcsolatban a legelső kérdés, hogy milyen valószínűségeloszlása van annak a valószínűségi változónak, amely megadja egy (t_1, t_2) időintervallumban történt események számát. Látjuk majd, hogy igen általános feltételek teljesülése esetén ez az eloszlás POISSON-eloszlás.

Előbb azonban tisztáznunk kell a véletlen eseményfolyamatok matematikai modelljét, be kell illeszteni ezeket a véletlen kísérletek matematikai modelljei közé. Egy elemi esemény, a kísérlet egy végeredménye most az eseményfolyamat egy konkrét lefutása. Mivel maguknak az eseményeknek a természete nem érdekel bennünket, csak azok bekövetkezésének időpontjai, az eseményfolyamat minden egyes lefutását az egymás utáni történések $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ növekvő időpontjaival helyettesíthetjük. Egy ilyen sorozat egy elemi esemény, egy ω . Az ω halmazt, az eseményteret az ilyen időpontsorozatok összessége alkotja. Egy lehetséges véletlen esemény pedig egy ilyen időpontsorozatokból alkotott halmaz (ne tévesszük össze ezt az eseményt az egyes időpontokban végbemenő eseményekkel). Rögzített t esetén jelölje $\xi(t)$ a $(0, t)$ időintervallumban történt események számát, ez valószínűségi változó, mely minden elemi eseményhez egy számértéket, mégpedig egy nem-negatív egész számot ren-

del hozzá. A $\xi(t)$ valószínűségi változók összessége sztochasztikus folyamatot alkot. Ennek minden egyes realizációja az eseményfolyamat egy-egy konkrét lefutását jellemzi.

A véletlen eseményfolyamatok egyik sajátossága, hogy többnyire csak egy realizációt áll módunkban konkrétan megfigyelni. Egyes esetekben azonban, mint pl. az elektroncsőben az anódra érkező elektronok vizsgálatakor az eseményfolyamatnak véget vethetünk egy általunk választott időpontban, és a kísérlet újbóli elkezdésével egy másik realizációt figyelhetünk meg. Ugyanezt a célt elérhetjük úgy is, hogy több azonos típusú elektroncsővel folytatunk vizsgálatot. Végül megfigyezzük még, hogy egy véletlen eseményfolyamatot vizsgálhatunk egy meghatározott kezdeti időponttól, melyet 0-val jelölünk, adott esetben azonban, ha az eléggé hosszú ideje tart, tekinthetjük úgy is, hogy az már végtelen hosszú idő óta folyamatban van. Ez esetben a $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ időpontokat ki kell egészítenünk 0 időpont előtt történt események $\dots > t_{-1} > t_{-2} > t_{-3} > \dots$ időpontjaival.

Az eseményfolyamatokkal kapcsolatos egyik legfontosabb fogalom az *eseménysűrűség*. Ez egy n indexszel ellátott $p_n(t)$ függvénye az időnek, pontos definíciója a következő:

$$p_n(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 1 | \xi(t) = n). \quad (6.2.1)$$

Az eseménysűrűség tehát egy feltételes valószínűség és Δt hányadosának a határértéke, miközben $\Delta t \rightarrow 0$, feltéve hogy a határérték létezik. A feltételes valószínűség annak a valószínűsége, hogy a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban egy esemény történik, feltéve hogy t ideig n esemény ment végbe. A (6.2.1) relációból következik, hogy

$$P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 1 | \xi(t) = n) = p_n(t)\Delta t + o(\Delta t). \quad (6.2.2)$$

A legtöbb eseményfolyamattal kapcsolatban ezenkívül feltételezik még azt is, hogy

$$P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) > 1 | \xi(t) = n) = o(\Delta t), \quad (6.2.3)$$

vagyis 1-nél több esemény Δt időszakasz alatti bekövetkezése bármilyen $\xi(t) = n$ feltétel mellett elhanyagolható Δt -hez képest. Ebből és (6.2.2)-ből viszont következik, hogy

$$P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = 0 | \xi(t) = n) = 1 - p_n(t)\Delta t + o(\Delta t) \quad (6.2.4)$$

Egy eseményfolyamatot független növekményűnek nevezünk, ha tetszőlegesen sok, egymást nem fedő, tehát legfeljebb közös határpontokkal rendelkező, (t_1, t_2) , (t_2, t_3) , ..., (t_{2n-1}, t_{2n}) intervallumok esetén a

$$\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_{2n}} - \xi_{t_{2n-1}}$$

valószínűségi változók, vagyis az egyes időintervallumokban végbemenő események számai függetlenek. Egy független növekményű eseményfolyamat $p_n(t)$ sűrűsége — ha létezik, — független n -től. Ez a (6.2.1) egyenlőségből rögtön következik, ha figyelembe vesszük, hogy $\xi(0) = 0$, tehát $\xi(t) = \xi(t) - \xi(0)$ és a $(0, t)$, $(t, t + \Delta t)$ intervallumoknak nincs közös belső pontja.

Egy eseményfolyamatot stacionárius növekményűnek nevezünk, ha a $(t_0, t_0 + t)$ időintervallumban történő események számát megadó $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$ valószínűségi változó eloszlása csak t -től, az intervallum hosszától függ, és független t_0 -tól, az intervallum kezdőpontjától.

6.3. Véletlen eseményfolyamatok differenciálegyenletrendszer.

Ha egy eseményfolyamatnak van eseménysűrűsége, vagyis létezik a (6.2.1) határérték, továbbá teljesül a (6.2.3) feltétel is, akkor a

$$P_n(t) = P(\xi(t) = n) \quad (6.3.1)$$

valószínűségekre az alábbi differenciálegyenletrendszer áll fenn:

$$\begin{aligned} P'_n(t) &= -p_n(t)P_n(t) + p_{n-1}(t)P_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots, \\ P'_0(t) &= -p_0(t)P_0(t). \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Ez a differenciálegyenletrendszer a (6.2.2), (6.2.3), (6.2.4) formulák felhasználásával a következőképpen vezethető le. A teljes valószínűség tételének felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= \sum_{k=0}^n P(\xi(t + \Delta t) = n | \xi(t) = n - k) P_{n-k}(t) = \\ &= \sum_{k=0}^n P(\xi(t + \Delta t) - \xi(t) = k | \xi(t) = n - k) P_{n-k}(t) = \\ &= (1 - p_n(t)\Delta t)P_n(t) + p_{n-1}(t)P_{n-1}(t) + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

$P_n(t)$ -t mindkét oldalból levonva, majd mindkét oldalt Δt -vel osztva, végül elvégezve a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet, a (6.3.2) differenciálegyenletrendszert kapjuk. Az $n=0$ esetben (6.3.3) jobb oldalán az összegben $P_{n-1}(t)$ már nem szerepel, ekkor (6.3.2) alsó sora adódik a határátmenet elvégzése után.

Ha minden n esetében a $p_n(t)$ eseménysűrűség a t változó folytonos függvénye, akkor a $P_n(t)$ valószínűségeket a (6.3.2) differenciálegyenletrendszer $P_0(0) = 1$, $P_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ kezdőfeltételek mellett vett megoldása szolgáltatja, amely ez esetben egyértelmű. Ha a $p_n(t)$ függvények n növekedésével nagyon gyorsan nőnek, akkor pozitív valószínűsége lehet annak, hogy véges idő alatt végtelen sok esemény történik. Bebizonyítható azonban, hogy ez csak 0 valószínűséggel fordulhat elő, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) = 1,$$

ha teljesül a következő feltétel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\max_{0 \leq \tau \leq t} p_n(\tau)} = \infty.$$

Ha még az is teljesül, hogy rögzített t esetén van olyan $c > 0$ szám, hogy

$$p_n(\tau) \leq cn, \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad n = 1, 2, \dots,$$

akkor a $\xi(t)$ valószínűségi változó tetszőleges rendű momentuma is létezik, vagyis minden $k \geq 1$ szám esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k P_n(t) < \infty.$$

6.4. A Poisson-folyamat. Ebben a szakaszban több különböző feltételből indulunk ki és megmutatjuk, hogy ezek mindegyike elvezet ahhoz a következményhez, hogy a $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ valószínűségi változó, mely a (t_1, t_2) időintervallumban végbemenő események számát adja meg, POISSON-eloszlású. Az alkalmazás során adott esetben feltételeink közül azt választhatjuk ki, amely éppen a legrealisabb, a konklúzió azonban mindig ugyanaz.

Először tekintsük a következő problémát. Egy kiszolgáló berendezést n fogyasztó használ, és ezek a $(0, T)$ időintervallumban egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint érkeznek be. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy $(t_0, t_0 + t)$ időszakaszban pontosan k számú fogyasztó érkezik. Mindegyik fogyasztóra nézve $\frac{t}{T}$ annak a valószínűsége, hogy ebben az időszakaszban érkeznek, tehát a keresett valószínűséget a t_0 -tól független

$$\binom{n}{k} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k}$$

érték adja. Ha most n -et és T -t minden határon túl növeljük, de úgy, hogy

$$\frac{n}{T} = \lambda = \text{állandó},$$

akkor a (6.1.3) határértékreklációt a $p = \frac{t}{T}$, $np = t \frac{n}{T} = t\lambda$ esetben alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\binom{n}{k} \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k} \rightarrow \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (6.4.1)$$

Bebizonyítható, hogy ha nem egy t hosszúságú időszakaszt, hanem tetszőlegesen sok, de egymással közös belső pontot nem tartalmazó, t_1, t_2, \dots, t_r hosszúságú időszakaszokat vizsgálunk, akkor az ezekben végbement események számai aszimptotikusan $\left(n \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty, \frac{n}{T} = \lambda \text{ esetén}\right)$ függetlenek. Ennek bizonyítását az Olvasóra bizzuk.

Ha a fogyasztók nem egyenletes eloszlás szerint érkeznek, akkor a $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$ valószínűségi változó ismét binomiális eloszlású, tehát eléggé nagy n esetén közelítően Poisson-eloszlású, az eloszlás paramétere azonban nem arányos t -vel.

Tegyük fel most, hogy az eseményfolyamat olyan, hogy az egymás után következő események közötti időtartamok exponenciális eloszlású független valószínűségi változók, mindegyik paramétere ugyanaz a $\lambda > 0$ szám, és határozzuk meg $\xi(t)$ eloszlását. Jelölje ξ_1 az első esemény történéséig eltelt időt, ξ_2 az első és második esemény közötti időt s. i. t. Jelölje továbbá $F_n(t)$ az első n valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvényét:

$$F_n(t) = P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < t).$$

Ez egyben annak a valószínűsége, hogy t ideig legalább n esemény történjék. Ebből következik, hogy

$$F_n(t) = P_n(t) + F_{n+1}(t),$$

ahonnan azt kapjuk, hogy

$$P_n(t) = F_n(t) - F_{n+1}(t). \quad (6.4.2)$$

Az $F_n(t)$ eloszlásfüggvény az (5.10.2) képlet által adott függvény 0-tól t -ig vett integráljával egyenlő. Ezt (6.4.2)-be helyettesítve és parciális integrálást alkalmazva, az adódik, hogy

$$P_n(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (6.4.3)$$

Könnyen belátható, hogy ugyanez az eloszlása a $\xi(t_0 + t) - \xi(t_0)$ valószínűségi változónak is, ha ui. az eseményeket a t_0 időponttól kezdjük számlálni, az első eseményig eltelt idő változatlanul exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Ez az exponenciális eloszlás tulajdonságából rögtön következik. Ugyanebből következik az is, hogy egymást nem fedő időintervallumban végbement események számai független valószínűségi változók.

Végül induljunk ki abból, hogy az eseményfolyamatnak létezik az eseményűrűsége, amely n -től független és t -ben folytonos:

$$p_n(t) = p(t).$$

Ezt a (6.3.2) differenciálegyenletrendszerbe helyettesítve és azt szukcesszive integrálva, a

$$P_n(t) = \frac{\left(\int_0^t p(x) dx\right)^n}{n!} e^{-\int_0^t p(x) dx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4.4)$$

képlet adódik. Ha $p(t)$ még t -től is független,

$$p(t) \equiv \lambda,$$

akkor

$$\int_0^t p(x) dx = \lambda t$$

és a (6.4.4) eloszlás a (6.4.3) eloszlásra redukálódik.

Tétel. Az alábbi a) és b) állítások ekvivalensek:

- a) az eseményfolyamat független és stacionárius növekményű,
- b) az egymás után következő események közötti időtartamok exponenciális eloszlású és független valószínűségi változók, azonos paraméterrel.

Ha egy eseményfolyamat az a) vagy b) tulajdonságú, akkor van olyan $\lambda > 0$ szám, hogy $\xi(t)$ eloszlását a (6.4.3) képlet adja. Ez a λ megegyezik a b) alatt említett exponenciális eloszlás paraméterével.

A tételben említett tulajdonságú eseményfolyamatot *stacionárius növekményű Poisson-folyamatnak* nevezzük. Ami a tétel bizonyítását illeti, ezt a fentiekben részben elvégeztük. Annak a bizonyítása maradt csak hátra, hogy a)-ból következik b), ezt azonban nem részletezzük.

6.5. Véletlen pontelhelyezkedések. Gyakoriak az olyan problémák, melyekben bizonyos, relatíve kis kiterjedésű egyedek, pontok oszlanak szét véletlenszerűen egy egyenes mentén, a síkon vagy a térben. Az ilyen jelenségeket véletlen pontelhelyezkedéseknek nevezzük. Ezek speciális esetei tulajdonképpen a véletlen eseményfolyamatok is, melyek felfoghatók véletlen pontelhelyezkedéseként az időtengelyen. Példák véletlen pontelhelyezkedésekre baktériumkolóniák elhelyezkedése a táptalajon, emulziószemcsék elhelyezkedése a filmben, vörsejtek elhelyezkedése a mikroszkóp látómezejében, csillagok térbeli elhelyezkedése, bizonyos speciális növényfajta egyedeinek elhelyezkedése a talajon, kövek elhelyezkedése az üvegmasszában, halak elhelyezkedése a vízben (adott időpontban) stb.

Ezek matematikai modellje analóg az eseményfolyamatok matematikai modelljéhez. Egy elemi esemény, egy ω , az egyenes, sík vagy tér (attól függően, hogy miről van szó) véges vagy végtelen pontsorozatának a kiválasztásában áll. Ezek összessége alkotja az Ω eseményteret. Jelölje $\xi(A)$ az A tartományba eső véletlen pontok számát.

Sok esetben teljesül az a feltétel hogy diszjunkt A_1, A_2, \dots, A_r tartományokhoz tartozó $\xi(A_1), \xi(A_2), \dots, \xi(A_r)$ valószínűségi változók függetlenek. Ekkor az eseményfolyamatok analógiájára a véletlen pontelhelyezkedést *független növekményűnek* nevezzük.

Ha $\xi(A)$ eloszlása nem függ a tartomány helyzetétől és alakjától, csak A mértékétől, akkor a véletlen pontelhelyezkedést *stacionárius növekményűnek* nevezzük.

Tétel. Ha egy véletlen pontelhelyezkedés független növekményű, és van olyan $p(t)$ folytonos függvény ($a \neq$ vektor az egyenes,

a sík vagy a tér egy pontja a problémától függően), hogy

$$P(\xi(A) = 1) = p(t)m(A) + o[m(A)];$$

$$P(\xi(A) > 1) = o[m(A)],$$

akkor $\xi(A)$ POISSON-eloszlású, várható értéke egyenlő a $p(t)$ függvény A tartományon vett integráljával. Pl. a sík esetében

$$M(\xi(A)) = \int \int_A p(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad \underline{t} = (t_1, t_2).$$

A tételben leírt tulajdonságú véletlen pontelhelyezkedést *Poisson-típusúnak* nevezzük. A stacionárius növekményű pontelhelyezkedés esetében $p(t)$ konstans,

$$p(t) = \lambda m(A),$$

ahol λ pozitív állandó. Ez az egységnyi mértékű tartományba eső véletlen pontok számának várható értékével egyenlő. A $p(t)$ függvényt *pontsűrűségnek* nevezzük.

A POISSON FOLYAMAT KÉT ALKALMAZÁSA

6.6. Erlang képlete. Egy telefonközpontban N számú vonal van. Vizsgálni akarjuk annak a valószínűségét, hogy egy adott t időpontban pontosan k számú vonal ($0 \leq k \leq N$) legyen foglalt. A következő feltevésekkel élünk: 1. a központba beérkező hívások stacionárius növekményű Poisson folyamatot alkotnak λ paraméterrel, vagyis annak a valószínűsége, hogy egy Δt hosszúságú időszakasz alatt egy hívás érkezzék $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, továbbá $o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy Δt idő alatt legalább két hívás érkezzék, végül közös pont nélküli időintervallumokban beérkező hívások számai független valószínűségi változók; 2. ha egy hívás esetén minden vonal foglalt, akkor a hívás elvész, ha azonban a hívást beszélgetés követi, akkor ez utóbbi

időtartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó μ paraméterrel, amiből következik, hogy mindegyik foglalt vonalra $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy Δt idő alatt véget érjen, bárhol is legyen ez az időszakasz az időtengelyen; 3. a beszélgetések időtartamai függetlenek a hívásfolyamattól és az egyes beszélgetések időtartamai egymástól is függetlenek.

Jelölje $P_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a t időpontban k számú foglalt vonal van és tekintsük a $P_k(t + \Delta t)$ valószínűséget. A következő esetek vannak:

A t időpontban is k számú foglalt vonal volt és Δt idő alatt új hívás nem történt, továbbá egy beszélgetés sem fejeződött be; ennek a valószínűsége

$$P_k(t) (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) (1 - \mu \Delta t + o(\Delta t))^k = \\ = (1 - \lambda - k\mu) \Delta t P_k(t) + o(\Delta t).$$

A t időpontban $k - 1$ számú foglalt vonal volt és Δt idő alatt egy hívás történt; ennek a valószínűsége

$$P_{k-1}(t) \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

A t időpontban $k + 1$ számú foglalt vonal volt, és Δt idő alatt pontosan egy beszélgetés befejeződött. Ennek a valószínűsége

$$P_{k+1}(t) \binom{k+1}{1} (\mu \Delta t + o(\Delta t)) (1 - \mu \Delta t + o(\Delta t))^k = \\ = (k+1) \mu \Delta t P_{k+1}(t) + o(\Delta t).$$

A Δt idő alatt befejeződött beszélgetések és beérkezett hívások számának összege legalább 2. Ennek a valószínűsége $o(\Delta t)$. $P_k(t + \Delta t)$ a fenti valószínűségek összege:

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t) - (\lambda + k\mu) \Delta t P_k(t) + \lambda \Delta t P_{k-1}(t) + \\ + (k+1) \mu \Delta t P_{k+1}(t) + o(\Delta t).$$

A fenti gondolatmenet csak a $k = 1, 2, \dots, N - 1$ esetekre vonat-

kozik. Minthogy a $k=0$ esetben nem maradhat abba beszélgetés, a $k=N$ esetben pedig nincs szabad vonal, amely a beérkező hívást felvenné, a fenti egyenlőség helyett az adódik, hogy

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t) - \lambda \Delta t P_0(t) + \mu \Delta t P_1(t) + o(\Delta t),$$

$$P_N(t + \Delta t) = P_N(t) - (\lambda + N\mu) \Delta t P_N(t) + \lambda \Delta t P_{N-1}(t) + o(\Delta t).$$

Ha $P_k(t)$ -t átvisszük a bal oldalra, majd Δt -vel mindkét oldalon osztunk és elvégezzük a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P'_k(t) = -(\lambda + k\mu) P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \quad (6.6.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$P'_N(t) = -(\lambda + N\mu) P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t).$$

Ez a $P_0(t), P_1(t), \dots, P_N(t)$ függvényekre egy lineáris, állandó együtthatójú differenciálegyenletrendszer. Megmutatható, hogy az ennek megoldása során fellépő ún. karakterisztikus egyenletnek egy 0 és N pozitív gyöke van. Ez utóbbiakat r_1, r_2, \dots, r_N -nel jelölve, minden megoldás a következő alakba írható

$$P_k(t) = P_k + c_{k1} e^{-r_1 t} + \dots + c_{kN} e^{-r_N t}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (6.6.2)$$

ahol a c_{ki} állandókat a $P_k(0), k = 0, 1, \dots, N$ kezdőfeltételek alapján kell meghatározni. A fenti egyenlőségből következik, hogy léteznek a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (6.6.3)$$

határértékek és függetlenek a c_{ki} -ktől, tehát egyben a kezdőfeltételektől. Ha csak a P_k valószínűségek iránt érdeklődünk, akkor ezeket könnyen meghatározhatjuk, ugyanis $\lim_{t \rightarrow \infty} P'_k(t) = 0$, $k = 0, 1, \dots, N$, tehát a (6.6.1) differenciálegyenletrendszer min-

den sorában elvégezve a $t \rightarrow \infty$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$P_1 = \gamma P_0,$$

$$2P_2 = (\gamma + 1)P_1 - \gamma P_0 = \gamma P_1,$$

$$\vdots$$

$$NP_N = (\gamma + N - 1)P_{N-1} - \gamma P_{N-2} = \gamma P_{N-1}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Innen az adódik, hogy

$$P_k = \frac{\gamma^k}{k!} P_0, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Mivel pedig a $\sum_{k=0}^N P_k(t) = 1$ egyenlőség miatt $\sum_{k=0}^N P_k = 1$, következik, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1 + \gamma/1! + \gamma^2/2! + \dots + \gamma^N/N!}$$

és így

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = \frac{\gamma^k/k!}{1 + \gamma/1! + \gamma^2/2! + \dots + \gamma^N/N!}. \quad (6.6.4)$$

Ezt a formulát ERLANG-formulának nevezzük, a P_0, P_1, \dots, P_N valószínűségeloszlásnak pedig Erlang-eloszlás a neve. Megjegyzendő, hogy a γ paraméter, amelyet a telefontechnikában „erlang” egységekben fejeznek ki, λ -nak, azaz az időegységre eső hívásszám várható értékének és $1/\mu$ -nek, azaz egy beszélgetés időtartama várható értékének a szorzata. ERLANG képletének számlálóját és nevezőjét $e^{-\gamma}$ -val megszorozva, a számlálóban a γ paraméterű POISSON-eloszlás k indexhez tartozó valószínűségét, a nevezőben pedig az első $N+1$ valószínűség összegét kapjuk.

Ha általában egy $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségeloszlást valahol levágunk, azaz tekintjük azt az eloszlást, melynek eloszlásfüggvénye

$$G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(K)} & \text{ha } x \leq K, \\ 1, & \text{ha } x > K, \end{cases}$$

ahol K állandó, akkor ez utóbbi eloszlást az előbbi csonkítottjának nevezzük. Az ERLANG-eloszlás tehát csonkított POISSON-eloszlás.

Ha $N \rightarrow \infty$, akkor az ERLANG-eloszlás átmegy a POISSON-eloszlásba.

6.7. Egy sorbanállási probléma. Tekintsünk egy kiszolgáló berendezést, melyhez érkező kiszolgálándók érkezési időpontjai stacionárius növekményű Poisson-folyamatot alkotnak λ paraméterrel. Tegyük fel továbbá, hogy N várakozó hely van, tehát a sor maximális „hossza” N , az egyes kiszolgálási időtartamok valószínűségi változók, melyek függetlenek egymástól, az érkezési folyamattól és exponenciális eloszlásúak azonos μ paraméterrel. Meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy a t időpontban pontosan k számú ($0 \leq k \leq N$) kiszolgálándó várakozzék. Jelölje $P_k(t)$ ezt a valószínűséget.

Mivel $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ ill. $o(\Delta t)$ annak a valószínűsége, hogy Δt idő alatt egy, ill. egynél több kiszolgálándó érkezzék és $\mu \Delta t$ annak a valószínűsége, hogy egy folyamatban levő kiszolgálás Δt idő alatt befejeződjék, fennállnak a következő egyenlőségek

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)(1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t) + P_{k-1}(t)\lambda \Delta t(1 - \mu \Delta t) + P_{k+1}(t)\mu \Delta t(1 - \lambda \Delta t) + o(\Delta t), \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda \Delta t) + P_1(t)\mu \Delta t(1 - \lambda \Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_N(t + \Delta t) = P_N(t)(1 - \mu \Delta t) + P_{N-1}(t)\lambda \Delta t(1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t).$$

A $P_0(t), P_1(t), \dots, P_N(t)$ valószínűségeket a bal oldalakra hozva, majd Δt -vel osztva és a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet elvégezve, a következő differenciálegyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \\ P'_k(t) &= -(\lambda + \mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t), \quad (6.7.1) \\ &\quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P'_N(t) &= -\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t). \end{aligned}$$

Ez egy konstans együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszer, melyet nem oldunk meg, csupán megemlítjük, hogy a megoldás most is (6.6.2) alakú. Eszerint léteznek a kezdőfeltételektől független

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

határértékek, továbbá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P'_k(t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

A (6.7.1) differenciálegyenletrendszerből a $t \rightarrow \infty$ határátmenet elvégzése által a P_0, P_1, \dots, P_N valószínűségekre egy rekurzív összefüggés adódik, ahonnan ezek a $\sum_{k=0}^N P_k = 1$ egyenlőség figyelembevételével egyértelműen meghatározhatók. Eredményként azt kapjuk, hogy

$$P_k = \gamma^k (1 - \gamma) \frac{1}{1 - \gamma^{N+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \gamma = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (6.7.2)$$

Ha $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ és $N \rightarrow \infty$, akkor határértékben geometriai eloszlást kapunk.

6.8. Feladatok. 1. Közelítsük a 2.13. szakasz 2. példájában szereplő valószínűségeket a Poisson-eloszlás megfelelő tagjaival. Mennyi a numerikus közelítő érték a $k=2$ esetben.

2. *Egyszerű születési folyamat.* Bizonyos egyedek egy összességét vizsgáljuk, melyek közül mindegyiknek az élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azonos λ paraméterrel. Amikor egy egyed meghal, két újabb keletkezik, melyek élettartamai függetlenek egymástól és az összes többi, valamint az összes korábbi élettartamoktól. Ezt egy véletlen eseményfolyamatként foghatjuk fel, ahol egy esemény történik akkor, amikor valamelyik egyed meghal. Határozzuk meg a $p_n(t)$ esemény-sűrűséget. Azon feltétel mellett, hogy az egész folyamatot egy egyed hozza létre, bizonyítsuk be továbbá, hogy a t időpontban élő egyedek számának várható értéke $e^{\lambda t}$.

3. Határozzuk meg az egyszerű születési folyamat $P_n(t)$ valószínűségeit a $P_1(0) = 1, P_n(0) = 0, n = 2, 3, \dots$ kezdőfeltételek mellett.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha k_1, k_2, \dots, k_r rögzített egész számok ($k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$) és $n \rightarrow \infty, p_1 \rightarrow 0, \dots, p_{r-1} \rightarrow 0$, miközben $np_1 \rightarrow \lambda_1 > 0, \dots, np_{r-1} \rightarrow \lambda_{r-1} > 0$, akkor a polinomiális eloszlás (5.3.2) tagja a

$$\prod_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i}$$

szorzathoz konvergál. Ebből egyben az is következik, hogy a polinomiális eloszlással kapcsolatban említett ξ_1, \dots, ξ_{r-1} valószínűségi változók az említett feltétel mellett határértékben függetlenek.

5. Határozzuk meg egy síkbeli stacionárius növekményű Poisson-típusú véletlen pontelhelyezkedés esetén a sík egy rögzített pontjához legközelebb eső véletlen pontnak az előbbtől vett távolsága sűrűségfüggvényét.

6. Tekintsünk egy stacionárius növekményű Poisson-folyamatot és jelölje ξ_t a $(0, t)$ idő alatt történt események számát. Legyenek továbbá $(\tau_1, \tau_1 + t_1), \dots, (\tau_r, \tau_r + t_r)$ közös pont nélküli részintervallumai a $(0, T)$ intervallumnak. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(\xi_{\tau_1+t_1} - \xi_{\tau_1} = k_1, \dots, \xi_{\tau_r+t_r} - \xi_{\tau_r} = k_r | \xi(T) = n) =$$

$$= \frac{n!}{k_1! \dots k_r! (n - k_1 - \dots - k_r)!} \left(\frac{t_1}{T}\right)^{k_1} \dots$$

$$\dots \left(\frac{t_r}{T}\right)^{k_r} \left(1 - \frac{t_1 + \dots + t_r}{T}\right)^{n - k_1 - \dots - k_r}$$

A NORMÁLIS ÉS AZ EBBŐL SZÁRMAZTATOTT ELOSZLÁSOK

A normális eloszlás

A normálisból származtatott eloszlások

7.1. Az egydimenziós normális eloszlás. A valószínűségelméletben és a matematikai statisztikában egyik leggyakoribb és legnagyobb jelentőségű eloszlás a normális eloszlás. Gyakori előfordulását a centrális határeloszlási tétel indokolja, amelyet a 9. fejezetben tárgyalunk.

Egy valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye a következő alakú

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (7.1.1)$$

ahol m valós, σ pedig pozitív állandó.

Be kell bizonyítanunk, hogy ez valóban sűrűségfüggvény, vagyis az egész számegetesen vett integrálja 1-gyel egyenlő. Ehhez felhasználjuk az

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (7.1.2)$$

formulát, amelyet szintén bizonyítunk. I^2 felírható a következő formában:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Alkalmazva az $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ transzformációt, melynek függvénydeterminánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

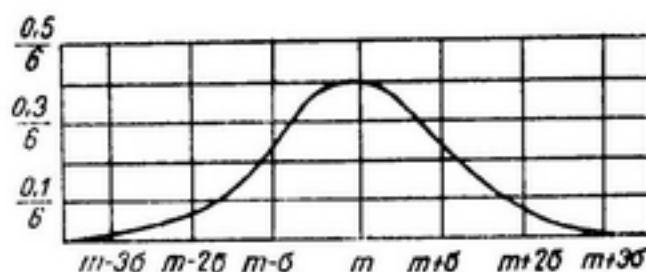
az előbbiek alapján

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \\ = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$$

amivel a (7.1.2) formulát igazoljuk. Visszatérve az (7.1.1) függvényére, az $u = \frac{x-m}{\sqrt{2\sigma}}$ helyettesítés, majd a (7.1.2) formula alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 1. \quad (7.1.3)$$

A normális eloszlás sűrűségfüggvényét a 46–47. ábrák szemléltetik. Az $f(x)$ függvény szimmetrikus az m pontra,



46. ábra

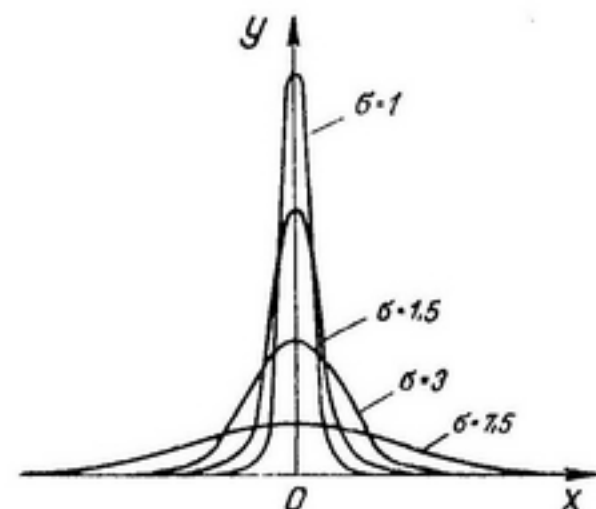
és ez az egyetlen maximumhelye. m tehát az eloszlás várható értéke, mediánja és modulusa. A függvény grafikonja harang alakú. Ha $x < m$, akkor $f(x)$ növekvő, ha pedig $x > m$, akkor $f(x)$ csökkenő függvény. Differenciálással meggyőződhetünk arról, hogy az $f(x)$ függvénynek két inflexiós pontja van, mégpedig az $m - \sigma$ és az $m + \sigma$ helyeken. Végül parciális integrálással meggyőződhetünk arról, hogy σ az eloszlás szórása. A várható értékre és a szórára mondottakat képletbe

foglalva, fennállnak az

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m, \quad (7.1.4)$$

$$D^2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \quad (7.1.5)$$

egyenlőségek, melyeket a (7.1.3) egyenlőségre támaszkodva az Olvasó könnyen bebizonyíthat.



47. ábra

Az m pontra szimmetrikus és σ -val arányos hosszúságú intervallumok valószínűségei függetlenek m -től és σ -tól, ui. az $u = \frac{x-m}{\sigma}$ helyettesítést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$P(|\xi - m| \leq \lambda\sigma) = P(m - \lambda\sigma \leq \xi \leq m + \lambda\sigma) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{m-\lambda\sigma}^{m+\lambda\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\Phi(\lambda) - 1,$$

ahol $\Phi(x)$ az ún. *standard normális eloszlás* eloszlásfüggvénye:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (7.1.7)$$

amelynél tehát $m=0$ és $\sigma=1$. Speciálisan

$$2\Phi(\lambda) - 1 = \begin{cases} 0,68269, & \text{ha } \lambda = 1, \\ 0,95450, & \text{ha } \lambda = 2, \\ 0,99730, & \text{ha } \lambda = 3, \\ 0,99994, & \text{ha } \lambda = 4. \end{cases}$$

A (7.1.6) egyenlőségből következik, hogy

$$p = P(|\xi - m| > \lambda\sigma) = 2(1 - \Phi(\lambda)) \quad (7.1.8)$$

A jobb oldalon álló függvény a $\lambda \geq 0$ változó monoton csökkenő függvénye, mely 1, ha $\lambda=0$ és 0, ha $\lambda=\infty$. Minden $0 < p < 1$ számhoz egyértelműen tartozik tehát egy $\lambda = \lambda_p$ szám.

Az m és σ paraméterekkel rendelkező normális eloszlást $N(m, \sigma)$ eloszlásnak nevezzük. Az ehhez tartozó eloszlásfüggvény kifejezhető $\Phi(x)$ segítségével:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Két független, normális eloszlású valószínűségi változó összege szintén normális eloszlású, mégpedig ha

$$\zeta = \xi + \eta$$

és ξ eloszlása $N(m_1, \sigma_1)$, η pedig $N(m_2, \sigma_2)$, akkor ζ eloszlása $N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$. Ha már tudnánk, hogy az összeg normális eloszlású, akkor a paraméterekre vonatkozó állítás könnyen igazolható, ui. a várható érték és a szórás tulajdonságai alapján

$$M(\zeta) = M(\xi) + M(\eta) = m_1 + m_2;$$

$$D^2(\zeta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Az állítás egy igen egyszerű bizonyítását a karakterisztikus függvény tárgyalásakor ismertetjük. Mindenesetre felírjuk itt is a bizonyítandó integrálformulát:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dy = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}. \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

7.2 A többdimenziós normális eloszlás. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlását normálisnak nevezzük, ha együttes sűrűségfüggvényük a következő alakú

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|B|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik}(x_i - m_i)(x_k - m_k)}, \quad (7.2.1)$$

ahol m_1, m_2, \dots, m_n valós állandók, $B = (b_{ik})$ pedig egy $n \times n$ -es szimmetrikus és pozitív definit mátrix.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi állításokat. A (7.2.1) függvény valóban sűrűségfüggvény, vagyis az említett feltételek mellett

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1. \quad (7.2.2)$$

A 4.3 szakasz tétele szerint a ξ_i valószínűségi változó várható értékét és a ξ_i, ξ_k valószínűségi változók kovarianciáját a következő integrálok adják meg:

$$M(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i h(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n = m_i, \quad (7.2.3)$$

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_k - m_k) h(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{B_{ik}}{|B|} = (B^{-1})_{i,k}, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

ahol az integráció eredményét a jobb oldalon fel is tüntettük. Eszerint a C kovariancia-mátrix a B mátrixszal a következő kapcsolatban van

$$C = B^{-1}, \quad B = C^{-1},$$

következésképpen:

$$b_{ik} = \frac{C_{ki}}{|C|} = \frac{C_{ik}}{|C|}, \quad |B| = \frac{1}{|C|},$$

ennélfogva a (7.2.1) függvény a kovarianciákra támaszkodva, a következő alakú

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|C|}} e^{-\frac{1}{2|C|} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik}(x_i - m_i)(x_k - m_k)} \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Végül a kovarianciák helyett a korrelációs együtthatók segítségével is felírhatjuk az együttes sűrűségfüggvényt. A (4.10.5) formula szerint ui.

$$C^{-1} = S^{-1} R^{-1} S^{-1},$$

ahonnan az egyes elemekre az adódik, hogy

$$\frac{C_{ik}}{|C|} = \frac{1}{|R|} \frac{R_{ik}}{\sigma_i \sigma_k},$$

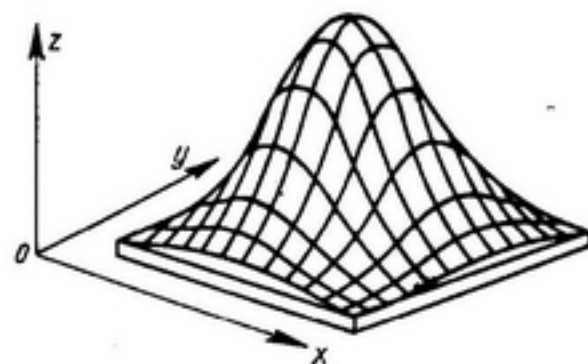
tehát

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{|R|}} e^{-\frac{1}{2|R|} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{ik} \frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \frac{x_k - m_k}{\sigma_k}} \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Speciálisan az $n=2$ esetben a változókat x -szel és y -nal jelölve, (7.2.6)-ból azt kapjuk, hogy

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{x-m_1}{\sigma_1} \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}, \quad (7.2.7)$$

ahol r a két valószínűségi változó korrelációs együtthatója. Ezt a függvényt a 48. ábra szemlélteti.



48. ábra

Bebizonyítható, hogy ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlása normális, akkor ezek külön-külön mind normális eloszlásúak, sőt közülük tetszőlegesen sokat kiválasztva, a kiválasztott valószínűségi változók együttes eloszlása is normális.

A (7.2.6) formulából közvetlenül is leolvasható a következő alapvető jelentőségű tétel helyessége.

Tétel. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlása normális, és ezek páronként korrelálatlanok, azaz $r_{ik} = 0$, ha $i \neq k$, akkor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ függetlenek.

Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy nem elegendő tudnunk, miszerint az egyes valószínűségi változók külön-külön normális eloszlásúak. Ebből és a páronkénti korrelálatlanságból a függetlenség még nem következik.

A NORMÁLISBÓL SZÁRMAZTATOTT ELOSZLÁSOK

7.3. A logaritmikus normális eloszlás. Egy ξ valószínűségi változót logaritmikus normális eloszlásúnak vagy röviden lognormális eloszlásúnak nevezzük, ha az

$$\eta = \ln \xi \quad (7.3.1)$$

valószínűségi változó normális eloszlású.

Először meghatározzuk η sűrűségfüggvényét. Jelöljük m és σ az η valószínűségi változó paramétereit, továbbá $f(x)$ és $F(x)$ a ξ sűrűség- és eloszlásfüggvényeit. Az eloszlásfüggvény definíciója szerint

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\xi < x) = P(\ln \xi < \ln x) = \\ &= P(\eta < \ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du, \end{aligned}$$

ahonnan differenciálással azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0. \quad (7.3.2)$$

A ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét ebből integrálással meghatározhatjuk. Eredményként a következő adódik:

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad (7.3.3)$$

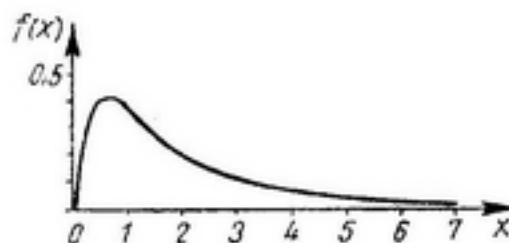
$$\begin{aligned} D^2(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} dx - e^{2m + \sigma^2} = \\ &= e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1). \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

A (7.3.2) sűrűségfüggvényt az $m = 0,46$; $\sigma = 1$ esetben a 49. ábra ábrázolja.

A lognormális eloszlás általában törési, osztódási folyamatok során lép fel, mint a végtermék súlya, köbtartalma vagy valamilyen méretének az eloszlása. Így pl. ilyen eloszlást követnek a kötőréskor keletkezett töredékek súlyuk szerint; a lebomló, hosszú láncmolekulák a bennük foglalt egységek száma szerint; egy szövet sejtmagjai köbtartalmuk szerint olyan értelemben, hogy azoknak az egyedeknek a száma, melyeknél az adott méret x -nél kisebb, osztva az összes egyedek számával, jól közelíthető egy alkalmas m és σ paraméterekkel bíró lognormális eloszlás $F(x)$ eloszlásfüggvényével. Ha ξ lognormális eloszlású, akkor tetszőleges $c > 0$ és α esetén $c\xi^\alpha$ is lognormális eloszlású, mert

$$\ln c\xi^\alpha = \alpha \ln \xi + \ln c,$$

márpedig egy normális eloszlású valószínűségi változó lineáris transzformáltja szintén normális eloszlású. Ez az oka annak,



49. ábra

hogy pl. a gömbalakú sejtmagok sugara, felszíne, köbtartalma mind lognormális eloszlású, hiszen a felszín és a köbtartalom a sugár egy-egy hatványával arányos. Ha a töredékek szabálytalanok, általában akkor is érvényesül az analóg törvényszerűség.¹²

7.4. A χ^2 - és a χ -eloszlás. n számú független, $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó négyzetösszegének eloszlását n -szabadságfokú χ^2 -eloszlásnak nevezzük.

Ez folytonos eloszlás, amelynek sűrűségfüggvényét az alábbiakban meghatározzuk. Legyenek tehát $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független és $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Ezek $\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_n^2$ négyzetei is függetlenek és azonos eloszlásúak. Határozzuk meg ξ_1^2 $k_1(x)$ sűrűségfüggvényét. Az eloszlásfüggvényt $F_1(x)$ -szel jelölve, ez a következő módon származtatható:

$$F_1(x) = P(\xi_1^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi_1 < \sqrt{x}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Innen differenciálással $k_1(x)$ -re a

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0 \quad (7.4.1)$$

képlet adódik.

Jelölje $k_n(x)$ az n -szabadságú χ^2 -eloszlás, vagyis a

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \quad (7.4.2)$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Teljes indukcióval be-

¹² Azt, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén a törési folyamatoknál határeloszlásaként a lognormális eloszlás lép fel, KOŁMOGOROV bizonyította be. A kérdéskört illetően I. RÉNYI ALFRED, Az aprítás matematikai elméletéről, Építőanyag 2, 177(1950), továbbá FÁY GYULA—ZSÉLEV BORISZ, Az aprításelmélet alapjairól, Energia és Atomtechnika 13, 333 (1960) cikkeket.

bizonyítjuk, hogy

$$k_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0. \quad (7.4.3)$$

Az állítás $n=1$ -re igaz. Tegyük fel, hogy igaz n -re, és bizonyítsuk be, hogy igaz $n+1$ -re is. Ha $\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}$ függetlenek és $N(0, 1)$ eloszlásúak, akkor a

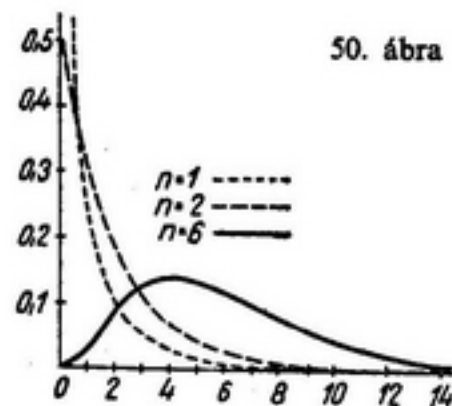
$$\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2, \quad \xi_{n+1}^2$$

valószínűségi változók függetlenek, nem-negatívak és sűrűségfüggvényeik $k_n(x)$, ill. $k_1(x)$. Ebből következik, hogy összegük $k_{n+1}(x)$ sűrűségfüggvénye ezek kompozíciója:

$$k_{n+1}(x) = \int_0^x k_1(x-y) k_n(y) dy = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} e^{-\frac{x-y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \\ = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{x-y}} dy = \\ = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{1-t}} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \\
 &= \frac{x^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \frac{x^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Az állítás tehát igaz $n+1$ -re is, és ezzel bebizonyítottuk, hogy (7.4.3) minden pozitív egész számra igaz. A χ^2 -eloszlás sűrűségfüggvényét az $n=1, 2, 6$ esetekben az 50. ábrán ábrázoltuk.



50. ábra

A χ^2 -eloszlás várható értékét és szórásnégyzetét legegyszerűbben a (7.4.2) formula alapján számíthatjuk ki. Mivel a ξ_i valószínűségi változók $N(0, 1)$ eloszlásúak,

$$M(\chi^2) = nM(\xi_1^2) = n, \quad (7.4.4)$$

$$\begin{aligned}
 D^2(\chi^2) &= nD^2(\xi_1^2) = nM(\xi_1^4) - M^2(\xi_1^2) = \\
 &= n(3-1) = 2n
 \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

Határozzuk meg most az ún. n -szabadságfokú χ -eloszlás, vagyis a

$$\chi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2} \quad (7.4.6)$$

valószínűségi változó $h_n(x)$ sűrűségfüggvényét. A (3.6.1.) formula szerint

$$h_n(x) = \frac{2x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad x > 0. \quad (7.4.7)$$

A χ valószínűségi változó várható értékét a gamma-függvény felhasználásával számítjuk ki a következő módon:

$$\begin{aligned}
 M(\chi) &= \frac{2}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-t} dt = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.
 \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

szórásnégyzetét pedig (7.4.4) alapján a következő formula adja:

$$D^2(\chi) = M(\chi^2) - M^2(\chi) = n - 2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (7.4.9)$$

Szemléletesen a χ valószínűségi változó az n -dimenziós tér $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ véletlen helyzetű pontjának a $(0, 0, \dots, 0)$ ponttól való távolságát adja meg.

A MAXWELL-eloszlás bevezetésekor egy fizikai problémából indulunk ki. A kinetikus gázelméletben kimutatják, hogy ha egy edényben levő gáz nem áramlik, és nyomása minden irányban egyenlő, akkor minden egyes molekula sebességvektorának ξ, η, ζ komponensei független, $N(0, 1)$ -eloszlású valószínűségi változók, ahol σ egy, a gázra jellemző pozitív állandó. Határozzuk meg a sebességvektor

$$v = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

hosszának sűrűségfüggvényét.

A $\frac{\xi}{\sigma}, \frac{\eta}{\sigma}, \frac{\zeta}{\sigma}$ valószínűségi változók $N(0, 1)$ eloszlásúak, és függetlenek,

tehát $\frac{v}{\sigma}$ 3-szabadságfokú χ -eloszlású. Ebből egyszerű megfontolással

következik, hogy $v = \sigma \frac{v}{\sigma}$ sűrűségfüggvénye

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} h\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x > 0. \quad (7.4.10)$$

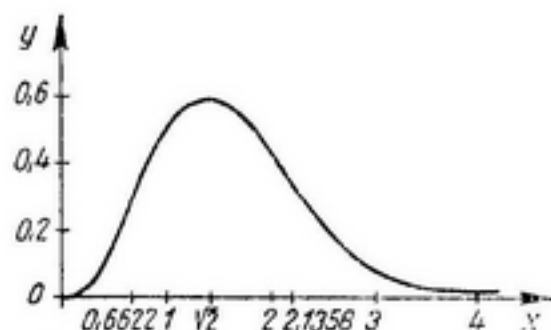
A (7.4.10) sűrűségfüggvényű eloszlást Maxwell-eloszlásnak nevezzük. A σ paraméter fizikai jelentése a következő:

$$\sigma = \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

ahol T a gáz (abszolút) hőmérséklete; m egy molekula tömege, k pedig a BOLTZMANN-féle állandó. A (7.4.8) és (7.4.9) formulák alapján

$$M(v) = \sigma M(x) = 2\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad D^2(v) = \sigma^2 D^2(x) = \sigma^2 \left(3 - \frac{8}{\pi}\right).$$

A MAXWELL-eloszlás sűrűségfüggvényét a $\sigma = 1$ esetben az 51. ábra szemlélteti.



51. ábra

7.5. A Student- és a Cauchy-eloszlás. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta$ független, $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. n -szabadságfokú Student-, vagy t -eloszlásnak nevezzük a

$$t = \frac{\sqrt{n}\eta}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}} \quad (7.5.1)$$

valószínűségi változó eloszlását. Meghatározzuk ennek sűrűségfüggvényét.

A (7.5.1) formula számlálójában és nevezőjében álló valószínűségi változók a 3.18. szakasz tétele szerint függetlenek. A nevezőben egy n -szabadságfokú χ -eloszlású valószínűségi változó áll, melynek sűrűségfüggvénye a (7.4.7) függvény. A számlálóban álló $\sqrt{n}\eta$ valószínűségi változó $N(0, \sqrt{n})$ eloszlású. Alkalmazva a két független valószínűségi változó hányadosa sűrűségfüggvényének kiszámítására vonatkozó képletet az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}, \quad g(x) = h_n(x) = \frac{2x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

függvényekre és $s_n(x)$ -szel jelölve t sűrűségfüggvényét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y e^{-\frac{x^2 y^2}{2n}} y^{n-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y^n e^{-\left(\frac{x^2}{n} + 1\right) \frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

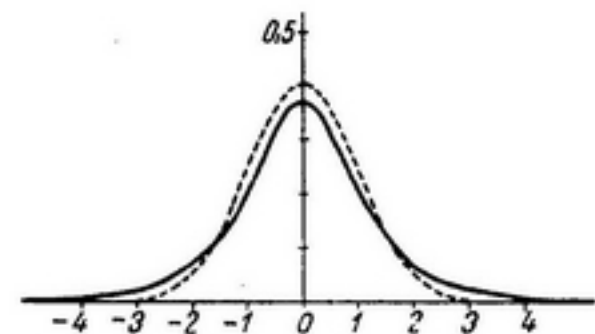
Az $u = \left(\frac{x^2}{n} + 1\right) \frac{y^2}{2}$ helyettesítéssel és a gamma-függvény definíciójának felhasználásával végül az adódik, hogy

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (7.5.2)$$

Az $s_3(x)$ függvényt a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényével az 52. ábrán láthatjuk.

Mivel $s_n(-x) = s_n(x)$, az eloszlás szimmetrikus a 0 pontra nézve.

Ebből következik, hogy ha létezik t várható értéke, akkor $M(t) = 0$. A várható érték azonban csak akkor létezik, ha $n \geq 2$, mert



52. ábra

de
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dx < \infty, \text{ ha } n \geq 2.$$

A t valószínűségi változó szórása hasonló megfontolás alapján csak akkor létezik, ha $n \geq 3$. $D^2(t)$ meghatározásához felhasználjuk azt, hogy ha χ^2 egy n szabadságfokú χ^2 -eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{\chi^2}\right) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{x}{2}} dx = \\ &= \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}-2} e^{-u} du = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2\left(\frac{n}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}, \end{aligned}$$

tehát

$$M\left(\frac{1}{\chi^2}\right) = \frac{1}{n-2}, \text{ ha } n \geq 3. \quad (7.5.3)$$

Az $n < 3$ esetben az integrál végtelen, tehát a várható érték nem létezik. A (7.5.3) formula alapján t szórásnégyzetét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} D^2(t) &= M(t^2) - M^2(t) = M(t^2) = \\ &= M(n\eta^2) M\left(\frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}\right) = \\ &= \frac{n}{n-2}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Az $n=1$ esetben a $\xi_1 = \xi$ jelölést alkalmazva, $t = \eta/|\xi|$, ahol η és ξ függetlenek és eloszlásuk $N(0, 1)$. Ennek eloszlása megegyezik az η/ξ valószínűségi változó eloszlásával és sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Az $n=1$ szabadságfokú χ^2 -eloszlás tehát egy speciális CAUCHY-eloszlás.

7.6. Az F -, a z - és a béta-eloszlás. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ valószínűségi változók függetlenek. Az

$$F = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (7.6.1)$$

valószínűségi változó eloszlását m, n -szabadságfokú F -eloszlásnak nevezzük.

A $\kappa = \frac{m}{n}$ F valószínűségi változó két független, χ^2 -eloszlású valószínűségi változó hányadosa. Ennek sűrűségfüggvényét a hányados sűrűségfüggvényének meghatározására vonatkozó képlet szerint a következő integrál adja meg:

$$\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y(xy)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{xy}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy =$$

$$= \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{x+1}{2}y} dy.$$

Az $u = \frac{x+1}{2}y$ helyettesítéssel és a gamma-függvény képletének felhasználásával arra az eredményre jutunk, hogy κ sűrűségfüggvénye a következő:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x > 0. \quad (7.6.2)$$

Ebből az $F = \frac{n}{m} \kappa$ valószínűségi változó $f_{m,n}(x)$ sűrűségfüggvényére az adódik, hogy

$$f_{m,n}(x) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x > 0. \quad (7.6.3)$$

Bebizonyítható, hogy ha $n \geq 3$, akkor létezik F várható értéke, ha pedig $n \geq 5$, akkor létezik a szórása is és

$$M(F) = \frac{n}{m} M(\kappa) = \frac{n}{n-2}, \quad n \geq 3. \quad (7.6.4)$$

$$D^2(F) = \frac{n^2}{m^2} D^2(\kappa) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \quad n \geq 5. \quad (7.6.5)$$

Az ún. Fischer-féle z -eloszlás a

$$z = \ln \sqrt{F} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2} \quad (7.6.6)$$

valószínűségi változó eloszlása. Ennek sűrűségfüggvénye a (3.6.1) formula szerint

$$2e^{2x} f_{m,n}(e^{2x}) = 2m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{e^{mx}}{(n + me^{2x})^{\frac{m+n}{2}}}. \quad (7.6.7)$$

Végül béta-eloszlásnak a

$$\beta = \frac{\kappa}{1+\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^m \xi_i^2}{\sum_{i=1}^m \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (7.6.8)$$

valószínűségi változó eloszlását nevezzük. β értéke nyilván mindig 0 és 1 közé esik. A (3.6.1) formula alkalmazásával β

sűrűségfüggvénye gyanánt a következőt kapjuk

$$b_{m,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 < x < 1. \quad (7.6.9)$$

Általában, tetszőleges $p > 0, q > 0$ esetén a

$$b(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, \quad 0 < x < 1 \quad (7.6.10)$$

sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlást is béta-eloszlásnak nevezzük. Ennek k -adik momentuma a következő

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^k b(x) dx &= \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p+q+k)} = \\ &= \frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{(p+q)(p+q+1)\dots(p+q+k-1)}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (7.6.11)$$

Innen β várható értékére és szórásnégyzetére azt kapjuk, hogy

$$M(\beta) = \frac{p}{p+q}, \quad (7.6.12)$$

$$D^2(\beta) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}.$$

7.7. A Pearson-család. Tekintsük a MARKOV—PÓLYA—EGGENBERGER-eloszlás P_k valószínűségeit. Egyszerű számolás mutatja, hogy két szomszédos valószínűség hányadosa:

$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{M+kR}{N-M+(n-k-1)R}, \quad (7.7.1)$$

ahonnan következik, hogy a k és $k+1$ pontokba felrajzolt P_k és P_{k+1} magasságú merőleges egyenesek végpontjait összekötő

egyenes iránytangensének és e két valószínűség számtani közepének hányadosa:

$$\begin{aligned} 2 \frac{P_{k+1} - P_k}{P_{k+1} + P_k} &= 2 \frac{\frac{P_{k+1}}{P_k} - 1}{\frac{P_{k+1}}{P_k} + 1} = \\ &= 2 \frac{np - (n-1)r - q + (2r-1)k}{np + (n-1)r + q + [2r(n-1) + q - p]k - 2rk^2}, \\ p &= \frac{M}{N}, \quad q = 1 - p, \quad r = \frac{R}{N}. \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

Ez egy k -ban lineáris és egy kvadrátikus kifejezés hányadosa.

Az $x = k + \frac{1}{2}$ helyettesítéssel ugyanilyen kifejezést kapunk x -ben. Kézenfekvő tehát, hogy a száme egyenesre merőlegesen felmért P_0, P_1, \dots, P_n hosszúságú szakaszok végpontjait összekötő poligont egy olyan $y=f(x)$ görbével közelítsük, melyre teljesül, hogy az $x = k + \frac{1}{2}$ pontokban y'/y egyenlő (7.7.2) jobb oldalával. Ezáltal egy elsőrendű közönséges differenciálegyenletet kapunk, amelynek megoldása éppen y -t szolgáltatja. A megoldás során adódó állandót úgy kell megválasztanunk, hogy az $y=f(x)$ függvénynek az egész száme egyenesen vett integrálja 1 legyen.

Kissé általánosabban, *Pearson-függvényeknek* nevezzük azokat az $y=f(x)$ sűrűségfüggvényeket, amelyek eleget tesznek egy

$$\frac{y'}{y} = \frac{D + Ex}{A + Bx + Cx^2} \quad (7.7.3)$$

differenciálegyenletnek, ahol A, B, C, D, E valós állandók. A PEARSON-függvények grafikonjait *Pearson-görbéknek* nevezzük.

Differenciálással meggyőződhetünk arról, hogy a (7.7.3) differenciálegyenletnek eleget tesznek a normális, a χ^2 , a STUDENT,

a FISHER-féle z , és a béta-eloszlások sűrűségfüggvényei, ezeken kívül azonban vannak más PEARSON-függvények is. Másrészt a (7.7.3) differenciálegyenlet megoldásai között vannak olyan függvények is, melyek nem sűrűség-függvények. A sűrűség-függvényt szolgáltató megoldások PEARSON-féle klasszifikációja a következő:

I. típus. $C \neq 0$, az $A + Bx + Cx^2 = 0$ egyenletnek két valós gyöke van, melyek $a < b$. A megoldás ekkor vagy az

$$y = k(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1} \quad (7.7.4)$$

függvény, vagy pedig a (7.7.9) függvény. A (7.7.4) függvény sűrűségfüggvény abban az esetben, ha $a < x < b$, $p > 0$, $q > 0$, és a k állandót oly módon határozzuk meg, hogy a függvény a és b határok közötti integrálja 1 legyen.

II. típus. Ez az előbbi speciális esete, midőn $p = q$ és $a = -b$, tehát

$$y = k(b^2 - x^2)^{p-1}, \quad |x| < b. \quad (7.7.5)$$

III. típus. $C = 0$, $B \neq 0$. A megoldás ekkor

$$y = k(x-u)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-u)}, \quad (7.7.6)$$

mely sűrűségfüggvény abban az esetben, ha $x > u$, α és β tetszőleges, k pedig alkalmas pozitív állandó, amelyet úgy kell megválasztani, hogy a függvény integrálja 1 legyen. Az $u = 0$ esetben gamma-eloszlást kapunk.

IV. típus. Ha az $A + Bx + Cx^2 = 0$ egyenlet gyökei komplex számok, akkor a megoldás általános alakja

$$y = k \frac{e^{-\alpha \arctg \frac{x-u}{a}}}{[(x-u)^2 + a^2]^{\beta}}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (7.7.7)$$

Ez sűrűségfüggvény akkor, ha $a > 0$, $\beta > \frac{1}{2}$, k pedig alkalmas normáló együttható.

V. típus. Ha az $A + Bx + Cx^2 = 0$ egyenlet gyökei egyenlők, $a = b$, akkor a megoldás

$$y = k(x-a)^{\beta}e^{-\frac{\alpha}{x-a}} \quad (7.7.8)$$

és ez sűrűségfüggvény akkor, ha $x > a$, $\alpha > 0$, $\beta < -1$.

VI. típus. $C \neq 0$ és az $A + Bx + Cx^2 = 0$ egyenlet gyökei valósak és különbözők, $a < b$. Ekkor megoldásként vagy a (7.7.4) vagy az

$$y = k(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \quad (7.7.9)$$

függvényt kapjuk, mely sűrűségfüggvény akkor, ha $x > b$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta < 1$ és k alkalmas normáló együttható.

VII. típus. $B = C = 0$. Ekkor

$$y = ke^{-\beta(x-u)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (7.7.10)$$

mely sűrűségfüggvény akkor, ha $\beta > 0$, k pedig alkalmas pozitív szám. Ez éppen a normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

A (7.7.4)–(7.7.10) képletekben szereplő konstansok természetesen mind kifejezhetők az A, B, C, D, E konstansokkal. Ez utóbbiak közül is minden egyes esetben csak négyre van szükségünk. A (7.7.3) egyenlet jobb oldalának nevezőjében ui. legalább egy együtthatónak 0-tól különbözőnek kell lennie, és azzal a számlálót és nevezőt egyaránt végigoszthatjuk. Ha egy PEARSON-eloszlás első négy momentuma létezik, akkor az említett négy állandó kifejezhető velük. Ebből következik, hogy minden PEARSON-eloszlást az első négy momentuma teljesen meghatároz. Speciális esetekben ennél kevesebb is elegendő, pl. a normális eloszlást már az első két momentuma egyértelműen meghatározza.

A PEARSON-féle eloszlásokhoz a MARKOV-PÓLYA-EGGENBERGER-eloszlás, tehát lényegében egy urnamodell alapján jutottunk. Az így kapott valószínűségeloszlások kategóriájába majdnem mindegyik korábban említett folytonos eloszlás is beletartozik. A modern valószínűségelméletben azonban az urnamodelleknek korlátozott szerepük van. Ne gondoljuk tehát azt, hogy a PEARSON-család a gyakorlatban előforduló fontos eloszlásokat speciális esetként tartalmazza. Az egyes konkrét problémák meg-

oldására a jelenség sajátosságait híven tükröző matematikai modellt kell felállítanunk, amely éppenséggel lehet urnamodell is, de sok más modell is, és a szóban forgó valószínűségi változó eloszlására ennek alapján kell következtetnünk. Ilyenformán sok olyan folytonos eloszlás is felmerül, mely nem tartozik a PEARSON-családba.

7.8. Feladatok. 1. Bizonyítsuk be integrálással a (7.1.10) egyenlőséget.

2. Legyenek $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}$ független, $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}$$

determináns sűrűségfüggvényét.

3. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ folytonos együttes eloszlású valószínűségi változók, együttes sűrűségfüggvényüket jelölje $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Legyen továbbá $A = (a_{ik})$ egy $n \times n$ -es nonsinguláris mátrix, és vezessük be az

$\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k$ valószínűségi változókat. Bebizonyítható, hogy ezek együttes sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{|A|} h(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

ahol

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ennek alapján bizonyítsuk be, hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együttes eloszlása n -dimenziós normális eloszlás, akkor ugyanilyen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ együttes eloszlása is.

4. Az előző példához csatlakozva bizonyítsuk be, hogy az η_i -k kovariancia mátrixa ASA , ahol S a ξ_i -k kovariancia mátrixa.

5. A gamma-függvény tulajdonságainak (l. a 3. függelék) felhasználásával bizonyítsuk be, hogy az $N(0, \sigma)$ -eloszlás $2k$ -adik momentuma a következő:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

A páratlan rendű momentumok 0-val egyenlők.

6. Határozzuk meg a (7.7.6) formula k normáló faktorát, a PEARSON III. eloszlás várható értékét, szórását és ferdeségi együtthatóját.

A GENERÁTOR- ÉS A KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNY

A generátorfüggvény

A karakterisztikus függvény

8.1. A generátorfüggvény értelmezése. Egy c_0, c_1, c_2, \dots valós számokból alkotott sorozat generátorfüggvényén az x valós változó

$$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \quad (8.1.1)$$

függvényét értjük, feltéve, hogy a jobb oldalon álló sor valamilyen $-r < x < r$ intervallumban konvergens. Mivel ez a sor egyben hatványsor is, érvényesek rá a hatványsorokkal kapcsolatos tételek. Röviden felsoroljuk a legfontosabbakat.

Ha a $c_0, c_1, c_2 \dots$ számokra teljesül az a feltétel, hogy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{r} \quad (8.1.2)$$

véges és pozitív, akkor a (8.1.1) hatványsor konvergens, ha $|x| < r$, és divergens, ha $|x| > r$. Az $|x| = r$ esetre ebből még semmit nem mondhatunk. Ha a (8.1.2) határérték 0, akkor (8.1.1) minden valós x -re, ha pedig a határérték ∞ , akkor (8.1.1) csak az $x=0$ értékre konvergens. Az r számot a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük.

Ha $r > 0$, akkor minden $|x| < r$ esetén $g(x)$ tetszőlegesen sokszor differenciálható, és a differenciálás tagonként elvégezhető, vagyis

$$g'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

$$g''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + \dots$$

$$g'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4x + \dots$$

.....

Ebből az is következik, hogy a $g(x)$ függvény a c_k együtthatókat egyértelműen meghatározza, nevezetesen

$$\begin{aligned} c_0 &= g(0), \\ c_k &= \frac{g^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Ha a c_0, c_1, c_2, \dots számok valószínűségek, tehát $0 \leq c_k \leq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor a (8.1.1) hatványsor biztosan konvergál az $|x| < 1$ esetben, tehát $r \geq 1$. Ha ezenkívül az együtthatók egy valószínűségeloszlás tagjai is, vagyis

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots = 1,$$

akkor (8.1.1) minden, az $|x| \leq 1$ feltételnek eleget tevő x esetén konvergens.

Legyen ξ egy nem-negatív egész értékeket felvevő valószínűségi változó, és vezessük be a

$$p_k = P(\xi = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

jelölést. E számok $g(x)$ generátorfüggvényét a ξ valószínűségi változó generátorfüggvényének nevezzük. Ez a függvény egy várható érték formájában is felírható, mégpedig

$$g(x) = M(x^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k. \quad (8.1.4)$$

Azonos eloszlású valószínűségi változók generátorfüggvényei egyenlők, a $g(x)$ függvényt nevezhetjük tehát a valószínűségi változótól függetlenül a valószínűségeloszlás generátorfüggvényének is.

8.2. A generátorfüggvény tulajdonságai. A generátorfüggvény igen jól használható eszköz bizonyos valószínűségek, valószínűségeloszlások és ezek momentumai meghatározására. Először a momentumokkal kapcsolatban említünk meg egy fontos tételt,

1. tétel. Ha létezik a ξ valószínűségi változó

$$\alpha_n = M(\xi^n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n p_k$$

n -edik momentuma (amiből következik minden n -nél alacsonyabb rendű momentum létezése is), akkor a $g(x)$ generátorfüggvény az $x=1$ helyen n -szer differenciálható és

$$g^n(1) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)p_k. \quad (8.2.1)$$

Ez annyit jelent, hogy a generátorfüggvény hatványsora az $x=1$ helyen n -szer tagonként differenciálható. Az $x=1$ pontban értelmezett differenciálhányadoson a függvény bal oldali differenciálhányadosát értjük. A tételt nem bizonyítjuk.

A (8.2.1) egyenlőség jobb oldalán álló összeget a ξ valószínűségi változó n -edik faktoriális momentumának nevezzük.

A faktoriális momentumok egyértelműen meghatározzák a közönséges értelemben vett momentumokat és megfordítva. A (8.2.1) formula alapján könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned} g'(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \alpha_1; \\ g''(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \alpha_2 - \alpha_1; \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

$$g'''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)p_k = \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1;$$

$$g^4(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)p_k = \alpha_4 - 6\alpha_3 + 11\alpha_2 - 6\alpha_1,$$

ahonnan az α_n momentumokat kifejezve, a következő össze-

függések adódnak:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= g'(1) \\ \alpha_2 &= g''(1) + g'(1) \\ \alpha_3 &= g'''(1) + 3g''(1) + g'(1) \\ \alpha_4 &= g^{(4)}(1) + 6g'''(1) + 7g''(1) + g'(1), \\ &\dots\end{aligned}\quad (8.2.3)$$

A ξ valószínűségi változó várható értékére és szórásnégyzetére tehát azt kapjuk, hogy

$$M(\xi) = g'(1) \quad (8.2.4)$$

$$D^2(\xi) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2 \quad (8.2.5)$$

A következő tételünk jelentős egyszerűsítési lehetőséget nyújt a valószínűségeloszlások és momentumaik meghatározására.

2. tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ nem-negatív egész értékű, független valószínűségi változók, generátorfüggvényeik rendre $g_1(x), g_2(x), \dots, g_r(x)$, akkor az $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r$ valószínűségi változó $g(x)$ generátorfüggvénye az előbbiek szorzata, vagyis

$$g(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_r(x). \quad (8.2.6)$$

Bizonyítás. Abból, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ függetlenek, következik, hogy minden rögzített x esetén az $x^{\xi_1}, x^{\xi_2}, \dots, x^{\xi_r}$ valószínűségi változók is függetlenek. Eszerint

$$\begin{aligned}g(x) &= M(x^\eta) = M(x^{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r}) = \\ &= M(x^{\xi_1}x^{\xi_2}\dots x^{\xi_r}) = M(x^{\xi_1})M(x^{\xi_2})\dots M(x^{\xi_r}) = \\ &= g_1(x)g_2(x)\dots g_r(x),\end{aligned}$$

ami éppen az állítást fejezi ki.

A fenti tételek jelentőségét néhány, a korábbiakban megismert eloszlás esetén illusztráljuk. Ha η binomiális eloszlású, akkor összege n független

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változónak, melyek csak a 0 és 1 értékeket veszik fel, mégpedig

$$P(\xi_k = 1) = p, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Mivel ezek azonos eloszlásúak, generátorfüggvényeik is azonosak, ξ_k generátorfüggvényét $h(x)$ -szel jelölve, ez a következő:

$$h(x) = x^0(1-p) + xp = 1 + p(x-1).$$

Eszerint η generátorfüggvénye,

$$g(x) = [1 + p(x-1)]^n. \quad (8.2.7)$$

A (8.2.4) és (8.2.5) formulák felhasználásával ismét meggyőződhetünk arról, hogy $M(\eta) = np$, $D^2(\eta) = np(1-p)$.

A geometriai eloszlás generátorfüggvénye

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k q^{k-1} p = \frac{px}{1-qx}, \quad (8.2.8)$$

amiből következik, hogy az n és p paraméterekkel rendelkező negatív binomiális eloszlás generátorfüggvénye

$$g(x) = \left(\frac{px}{1-qx} \right)^n. \quad (8.2.9)$$

Ennek differenciálhányadosa

$$g'(x) = n \left(\frac{px}{1-qx} \right)^{n-1} \frac{p}{(1-qx)^2}.$$

x helyébe 1-et téve, megkapjuk az eloszlás korábban is meghatározott n/p várható értékét. Analóg módon nyerné a szórás is.

A Poisson-eloszlás generátorfüggvénye

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{x\lambda} = e^{\lambda(x-1)}. \quad (8.2.10)$$

A 2. tétel alapján, figyelembe véve még azt is, hogy a generátorfüggvény az eloszlást egyértelműen meghatározza, rögtön megállapítható, hogy két Poisson-eloszlású, független valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású, és az összeg paramétere egyenlő az egyes paraméterek összegével. Ugyanis

$$e^{\lambda_1(x-1)} e^{\lambda_2(x-1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(x-1)}.$$

A (8.2.10) függvény differenciálásával pedig könnyen belátható, hogy $M(\xi) = \lambda$, $D^2(\xi) = \lambda$.

Végül egy konvergenciatételt említünk meg bizonyítás nélkül.

3. tétel. Tegyük fel, hogy minden rögzített n esetén a $p_{0n}, p_{1n}, p_{2n}, \dots$ számsorozat valószínűségeloszlást alkot, vagyis

$$p_{kn} \geq 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_{kn} = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahhoz, hogy minden rögzített k -ra létezzen a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{kn} = p_k \quad (8.2.11)$$

határérték, szükséges és elegendő, hogy a

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_{kn}$$

generátorfüggvényekből alkotott sorozat konvergáljon a

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k$$

generátorfüggvényhez minden, a $0 < x < 1$ feltételt kielégítő x szám esetén.

A p_0, p_1, p_2, \dots valószínűségek összege nem feltétlenül 1, ez a (8.2.11) relációból még nem következik. Ha azonban $g(1) = 1$, akkor ezek is valószínűségeloszlást alkotnak.

8.3. Példa. Források véletlenszerű használata. Tegyük fel, hogy két raktárunk van, az elsőben k , a másodikban n számú egyed tartalmazó készlet. Bizonyos, egymás után következő időpontokban egy egyed valamelyik raktárból elveszünk. Minden egyes esetben azt a raktárt, amelyből az egyedet elveszük, véletlenszerűen választjuk ki, mégpedig a korábbi választásoktól függetlenül és mindig azonos p , ill. $q = 1 - p$ valószínűségekkel. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy az első raktár készlete fogy el hamarabb.

Jelölje ezt a valószínűséget $P_{k,n}$. A következő két eset lehetséges: 1. az első esetben az első raktárt választjuk ki, onnan veszünk el egy egyed. Ennek a valószínűsége p . Annak a valószínűsége pedig, hogy az első raktár készlete fogy el hamarabb, feltéve, hogy az előbb említett

eset bekövetkezik, $P_{k-1,n}$. 2. a második esetben a második raktárból veszünk el egy egyed. Ennek a valószínűsége q , annak a valószínűsége pedig, hogy az első raktár készlete fogy el hamarabb, feltéve hogy ez az eset bekövetkezik, $P_{k,n-1}$. Ezek figyelembevételével a teljes valószínűség tétele alapján azt kapjuk, hogy

$$P_{k,n} = pP_{k-1,n} + qP_{k,n-1} \quad (8.3.1)$$

Meg kell még jegyeznünk, hogy nyilvánvalóan fennállnak a

$$\begin{aligned} P_{k,0} &= 0, \quad \text{ha } k > 0, \\ P_{0,n} &= 1, \quad \text{ha } n > 0, \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

egyenlőségek. A P_{00} valószínűség legyen definíciószerűen 0.

A (8.3.1) ún. differenciaegyenletet a generátorfüggvény módszerével oldjuk meg. Szorozzuk meg a (8.3.1) mindkét oldalát x^n -el, és összegezzünk n szerint 1-től végtelenig. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n P_{k,n} = p \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_{k-1,n} + qx \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} P_{k,n-1}.$$

Bevezetve a

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_{k,n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_{k,n}$$

generátorfüggvényt, (8.3.1) a következő alakba írható

$$g_k(x) = pg_{k-1}(x) + qxg_k(x),$$

ahonnan egyszerű átalakítással a

$$g_k(x) = \frac{p}{1-qx} g_{k-1}(x) = \dots = \left(\frac{p}{1-qx} \right)^k g_0(x)$$

egyenlőségre jutunk. A $g_0(x)$ függvényt a (8.3.2) alapján határozhatjuk meg. Eszerint

$$g_0(x) = P_{0,1}x + P_{0,2}x^2 + P_{0,3}x^3 + \dots = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}, \quad (8.3.3)$$

tehát végül

$$g_k(x) = \left(\frac{p}{1-qx} \right)^k \frac{x}{1-x}. \quad (8.3.4)$$

Ha ezt a függvényt hatványsorba fejtjük, akkor x^n együtthatójaként megkapjuk a $P_{k,n}$ valószínűséget. A binomiális sorfejtés szerint

$$\frac{1}{(1-qx)^k} = 1 + \binom{k}{1}qx + \binom{k}{2}q^2x^2 + \binom{k}{3}q^3x^3 + \dots$$

Ha ezt a (8.3.3) összeggel összeszorozzuk, és a szorzatot még p^k -val megszorozzuk, akkor x^n együtthatójára, vagyis a $P_{k,n}$ valószínűsége az alábbi képletet kapjuk:

$$P_{k,n} = p^k \left[1 + \binom{k}{1}q + \binom{k}{2}q^2 + \dots + \binom{k}{n-1}q^{n-1} \right]. \quad (8.3.5)$$

8.4. Véletlen tagszámú összegek. Legyen ξ_1, ξ_2, \dots egy független valószínűségi változókból álló sorozat és v egy pozitív egész értékű, az előbbiektől független valószínűségi változó. Ekkor az

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v \quad (8.4.1)$$

véletlen tagszámú összeg szintén valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy ξ_1, ξ_2, \dots azonos eloszlásúak, csak nem-negatív egész értékeket vesznek fel, és közös generátorfüggvényüket jelölje $g(x)$. A v és az η valószínűségi változók generátorfüggvényeit jelöljük $h(x)$ és $k(x)$. E három generátorfüggvény kapcsolatát fogjuk először megállapítani. A teljes valószínűség tétele alapján

$$\begin{aligned} P(\eta = r) &= P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v = r) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v = r | v = i) P(v = i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i = r) P(v = i), \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk azt, hogy v független a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változóktól. A $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i$ összeg generátorfüggvénye $g^i(x)$. Ha tehát mindkét oldalt x^r -rel megszorozzuk, és

r szerint 0-tól ∞ -ig összegezzük, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} k(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} x^r P(\eta = r) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} x^r \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i = r) P(v = i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} x^r P(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i = r) P(v = i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} g^i(x) P(v = i), \end{aligned}$$

ennélfogva

$$k(x) = h(g(x)). \quad (8.4.2)$$

A (8.4.2) formulát alkalmazhatjuk speciális problémákra. Először egy telefonproblémával foglalkozunk. Tegyük fel, hogy egy t hosszúságú időszak alatt egy telefonközpontba érkező hívások száma POISSON-eloszlást követ λt paraméterrel. Mind-egyik hívás $q = 1 - p$ valószínűséggel elvész, és p valószínűséggel beszélgetést vált ki. Ez utóbbiak számát egy

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v$$

összeg adja meg, ahol v az eredeti hívások száma, ξ_1, ξ_2, \dots pedig független valószínűségi változók, melyek csak a 0 és 1 értékeket vesznek fel $q = 1 - p$, ill. p valószínűségekkel. Esetünkben

$$g(x) = 1 + p(x - 1);$$

$$h(x) = e^{\lambda t(x-1)},$$

tehát a (8.4.2) formula szerint η generátorfüggvénye

$$k(x) = h(g(x)) = e^{\lambda p t(x-1)} \quad (8.4.3)$$

vagyis η POISSON-eloszlású $\lambda p t$ paraméterrel. Az időegység alatt

beérkező és beszélgetéssel folytatódó hívások számának várható értéke tehát λp .

8.5. Alkalmazás a láncreakciók elméletére. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll bizonyos számú részecske. A részecskék számát valószínűségi változónak tekintjük, amely speciális esetben lehet állandó is. Mindegyik részecske valamikor később p_k ($k=0, 1, 2, \dots$) valószínűséggel k számú részecskére hasad, és ezek az események egymástól függetlenül mennek végbe. A keletkezett részecskékkel ugyanez megismétlődik s. i. t. Felteesszük még, hogy a p_k ($k=0, 1, 2, \dots$) valószínűségek minden egyes részecskére ugyanazok. Nevezzük az azonos számú hasadás következtében létrejött részecskék összességét egy nemzedéknek. Az eredetileg rendelkezésünkre álló részecskék a 0-adik nemzedéket alkotják, ezután jön az első, második s. i. t. Az r -edik nemzedék részecskéinek száma valószínűségi változó, melyet η_r -rel jelölünk. Közülük mindegyik véletlen sok részecskére hasad, a k -adik részecske széthasad ξ_k számúra. Nyilvánvaló, hogy

$$\eta_{r+1} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{\eta_r} \quad (8.5.1)$$

Ha tehát η_r generátorfüggvényét $g_r(x)$ -szel, a ξ_k valószínűségi változó generátorfüggvényét $h(x)$ -szel jelöljük, vagyis

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k \quad (8.5.2)$$

akkor a (8.4.2) formula értelmében

$$g_{r+1}(x) = g_r[h(x)]. \quad (8.5.3)$$

Innen következik, hogy

$$\begin{aligned} g_1(x) &= g_0[h(x)]; \\ g_2(x) &= g_0[h(h(x))]; \\ g_3(x) &= g_0[h(h(h(x)))]; \\ &\dots \end{aligned}$$

Elegendő azzal az esettel foglalkozni, amikor kezdetben csak egy részecske van. Ekkor $g_0(x) \equiv x$, tehát

$$\begin{aligned} g_1(x) &= h(x); \\ g_2(x) &= h[h(x)]; \\ g_3(x) &= h[h(h(x))]; \\ &\dots \end{aligned}$$

ami (8.5.3) helyett a

$$g_{r+1}(x) = h[g_r(x)] \quad (8.5.4)$$

alakba is írható.

Ha pl. minden részecske két részre hasad p valószínűséggel és megsemmisül $q = 1 - p$ valószínűséggel, akkor

$$h(x) = q + px^2.$$

Ismét a $g_0(x) \equiv x$ feltevéssel élve, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_1(x) &= q + px^2; \\ g_2(x) &= q + p(q + px^2)^2; \\ g_3(x) &= q + p[q + p(q + px^2)^2]^2; \\ &\dots \end{aligned}$$

Több részecske esetén tekinthetjük külön-külön az egyes részecskék által elindított láncreakciókat, és ha ezek egymástól függetlenül mennek végbe, akkor az egyes részecskék által elindított láncreakciókra vonatkozó eredményekből az egészre könnyen következtethetünk.

Jelölje M az egy részecske által származtatott további részecskék számának várható értékét:

$$M = h'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

M_r pedig az r -edik hasadás után közvetlenül kapott összes részecskék számának vagyis az η_r valószínűségi változó vár-

ható értékét, és tegyük fel, hogy eredetileg csak egy részecskénk van. Ha a (8.5.4) egyenlőség mindkét oldalát differenciáljuk, majd x helyébe 1-et helyettesítünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$M_{r+1} = MM_r,$$

amiből következik, hogy

$$M_r = M^r; \quad (8.5.5)$$

M_1 ui. M -mel egyenlő.

Tegyük fel, hogy $M < 1$. Mivel η_r csak egész értékeket vesz fel, következik, hogy ha $0 < \varepsilon < 1$, akkor

$$P(\eta_r > 0) = P(\eta_r \geq \varepsilon).$$

Másrészt a MARKOV-féle egyenlőtlenség alapján

$$P(\eta_r \geq \varepsilon) \leq \frac{M(\eta_r)}{\varepsilon} = \frac{M^r}{\varepsilon},$$

tehát

$$P(\eta_r > 0) \leq \frac{1}{\varepsilon} M^r.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(\eta_r > 0) < \infty,$$

és így a BOREL—CANTELLI-lemma szerint (l. a 9.7. szakaszt) az $\eta_1 > 0, \eta_2 > 0, \dots$ események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be. Ez más szóval annyit jelent, hogy annak a valószínűsége, hogy a láncreakció véges számú lépés után véget ér, valamennyi részecske eltűnik, megsemmisül, 1-gyel egyenlő.

Bebizonyítható, hogy ha $M=1$, akkor

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(\eta_r = 0) = 1,$$

ha pedig $M > 1$, akkor 1 annak a valószínűsége, hogy $\eta_r \rightarrow \infty$, ha $r \rightarrow \infty$.

8.6. Példa. Láncmolekulák lebomlása. A generátorfüggvény módszerével a (4.5.11) összefüggésből meghatározzuk az N_n számokat. (4.5.11) a következő alakba írható:

$$N_n = \sum_{i=k}^{n-k} p(1-p)^{i-1} N_{n-i} + p(1-p)^{k-1}, \quad n = k+1, k+2, \dots \quad (8.6.1)$$

és kiegészítésképpen megjegyezzük, hogy $N_k = (1-p)^{k-1}$. Szorozzuk meg mindkét oldalt x^n -nel és adjuk össze a kapott egyenlőségeket $n = k+1$ -től ∞ -ig. Ekkor a bal oldalon a

$$g(x) = \sum_{i=k}^{\infty} N_i x^i$$

generátorfüggvényt kapjuk az $N_k x^k$ tag híján, a jobb oldalon álló első tag pedig a $g(x)$ és a

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(1-p)^{i-1} x^i = \frac{px}{1-(1-p)x}$$

generátorfüggvények szorzata. Eszerint tehát azt kapjuk, hogy

$$g(x) - x^k(1-p)^{k-1} = g(x) \frac{px}{1-(1-p)x} + p(1-p)^{k-1} \frac{x^{k+1}}{1-x}.$$

Innen $g(x)$ -et kifejezhetjük:

$$g(x) = x^k(1-p)^{k-1} \left(\frac{1-(1-p)x}{1-x} \right)^2. \quad (8.6.2)$$

Mivel

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-(1-p)x}{1-x} \right)^2 &= \left(1 + \frac{px}{1-x} \right)^2 = 1 + \frac{2px}{1-x} + \frac{p^2 x^2}{(1-x)^2} = \\ &= 1 + 2p(x + x^2 + x^3 + \dots) + p^2(x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots) \end{aligned}$$

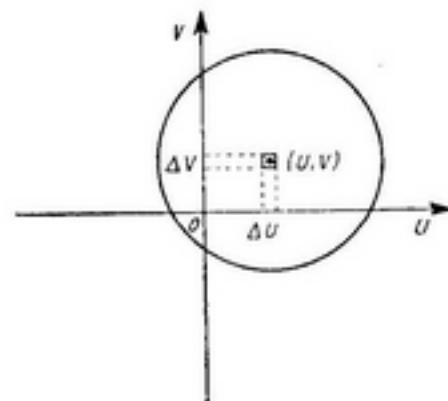
és N_n nem más, mint x^n együtthatója, következik, hogy

$$N_n = p(1-p)^{k-1}(2 + (n-k-1)p), \quad n = k+1, k+2, \dots \quad (8.6.3)$$

8.7. Példa. Film átlátszóságának fluktuációja. Egy egyenletesen megvilágított, majd előhívott film egyes pontjai a redukált ezüst szemcséi miatt átlátszatlanok. Az ezüstszemcséket gömböknek képzelve el, ezek vetü-

letei a film felszínén körök lesznek és a film egy pontjának átlátszósága attól függ, hogy hány ilyen kör fedi le.

A problémát a következő módon fogalmazzuk meg. A teljes síkon (a filmet végtelennek tekintve) körök oszlanak el véletlenszerűen, centrumaik stacionárius növekményű Poisson-típusú ponteloszlást alkotnak λ paraméterrel. Az egyes körök sugarai valószínűségi változók, melyek egymástól és a centrumok elhelyezkedésétől függetlenek, azonos – mondjuk – folytonos eloszlásúak $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, melyről feltesszük, hogy a második momentuma véges. Meghatározzuk a sík egy rögzített pontját fedő körök számának generátorfüggvényét. Helyezzük ebbe a pontba a koordináta-rendszer kezdőpontját és osszuk be a síkot $\Delta u \Delta v$ területű kis téglalapokra. Az (u, v) pont körüli téglalapban (l. az 53. ábrát) a véletlen körök centrumainak a száma nagy valószínűséggel már csak 0 vagy



53. ábra

1 lehet, pontosabban, $o(\Delta u \Delta v)$ annak a valószínűsége, hogy ott 1-nél több ilyen centrum helyezkedjék el. Így az ebben a téglalapban fekvő centrumú és az origót fedő körök számának a generátorfüggvénye egy $o(\Delta u \Delta v)$ tagtól eltekintve

$$\begin{aligned} z \lambda \Delta u \Delta v \int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{\infty} f(x) dx + 1 - \lambda \Delta u \Delta v \int_0^{\sqrt{u^2+v^2}} f(x) dx = \\ = 1 + (z-1) \lambda \Delta u \Delta v \int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{\infty} f(x) dx \approx e^{(z-1) \lambda \Delta u \Delta v \int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{\infty} f(x) dx} \end{aligned}$$

Az origót fedő összes véletlen körök számának generátorfüggvénye ezek szorzata, melyből az elhanyagolás eltűnik, ha Δu -t és Δv -t 0-hoz tartatjuk. Ilyen módon az origót fedő körök számának generátorfüggvénye

$$\exp \left\{ (z-1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{\infty} f(x) dx du dv \right\}. \quad (8.7.1)$$

Az $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$ transzformációval, majd parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\sqrt{u^2+v^2}}^{\infty} f(x) dx du dv = 2\pi \int_0^{\infty} r \int_r^{\infty} f(x) dx dr = \pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr \quad (8.7.2)$$

Az origót fedő körök száma tehát Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr$ paraméterrel.

Ennek alapján bebizonyítható, hogy ha E a sík egy tetszőleges, véges területű tartománya, akkor E k -szorosan fedett pontjai összessége területének a várható értéke

$$m(E) \frac{\left(\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr \right)^k}{k!} e^{-\pi \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr}, \quad (8.7.3)$$

ahol $m(E)$ az E tartomány területe.

A KARAKTERISZTIKUS FÜGGVÉNY

8.8. Komplex értékű valószínűségi változók. A generátorfüggvényt csak nem-negatív egész értékű valószínűségi változók esetére értelmeztük. Sok problémában azonban diszkrét és folytonos eloszlású valószínűségi változók egyaránt előfordulnak, ezért célszerű egy, az eloszlást jellemző és a probléma megoldását egyszerűsítő olyan függvényt bevezetni, amely tetszőleges eloszlás esetére értelmezhető. Ez a karakterisztikus függvény. E függvény bevezetése előtt néhány megjegyzést teszünk komplex értékű valószínűségi változókkal kapcsolatban.

Egy $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ valószínűségi változó egy, az eseménytérre értelmezett komplex értékű függvény. Ennek várható értékét

és szórásnégyzetét az

$$M(\xi) = M(\xi_1) + iM(\xi_2), \quad (8.8.1)$$

$$D^2(\xi) = M(|\xi - M(\xi)|^2) \quad (8.8.2)$$

formulákkal értelmezzük. A $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ valószínűségi változókat függetleneknek nevezzük, ha a (ξ_1, ξ_2) és az (η_1, η_2) valószínűségi vektorváltozók függetlenek. Bebizonyítható, hogy ez esetben

$$M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta); \quad (8.8.3)$$

$$D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta), \quad (8.8.4)$$

ugyanúgy, mint valós értékű valószínűségi változók esetén. Ezek közül csupán az első egyenlőség bizonyítására szorítkozunk:

$$\begin{aligned} M(\xi\eta) &= M[(\xi_1 + i\xi_2)(\eta_1 + i\eta_2)] = \\ &= M[\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 + i(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)] = \\ &= M(\xi_1)M(\eta_1) - M(\xi_2)M(\eta_2) + \\ &+ i[M(\xi_1)M(\eta_2) + M(\xi_2)M(\eta_1)] = \\ &= [M(\xi_1) + iM(\xi_2)][M(\eta_1) + iM(\eta_2)] = M(\xi)M(\eta). \end{aligned}$$

A szórásnégyzetekre vonatkozó állítás bizonyítását az Olvasóra bizzuk.

8.9. A karakterisztikus függvény értelmezése. Egy ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényén az egész számsíkon értelmezett

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}) = M(\cos t\xi) + iM(\sin t\xi) \quad (8.9.1)$$

függvényt értjük.

Ez minden esetben létezik, mert $|\cos t\xi| \leq 1$, $|\sin t\xi| \leq 1$, korlátos valószínűségi változónak pedig mindig van várható értéke. A kevert esetet mellőzve, a diszkrét és folytonos eset-

ben a karakterisztikus függvény kifejezése a következő:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos tx_k + i \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sin tx_k = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k, \quad (8.9.2)$$

ahol x_1, x_2, \dots a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei; p_1, p_2, \dots pedig a megfelelő valószínűségek,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos tx \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin tx \, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) \, dx \end{aligned} \quad (8.9.3)$$

ahol $f(x)$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

A $t=0$ pontban a karakterisztikus függvény értéke mindig 1, mert $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Ha ξ eloszlása szimmetrikus a 0 pontra nézve, akkor a karakterisztikus függvény valós értékű. A $\varphi(t)$ függvény definíciójából az is következik, hogy $|\varphi(t)| \leq 1$. Felhasználva ui. azt, hogy minden η valós értékű valószínűségi változó esetén $M^2(\eta) \leq M(\eta^2)$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |\varphi(t)|^2 &= M^2(\cos t\xi) + M^2(\sin t\xi) \leq \\ &\leq M(\cos^2 t\xi) + M(\sin^2 t\xi) = \\ &= M(\cos^2 t\xi + \sin^2 t\xi) = M(1) = 1. \end{aligned}$$

Belátható az is, hogy $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, ui.

$$\begin{aligned} \varphi(-t) &= M[\cos(-t)\xi] + iM[\sin(-t)\xi] = M(\cos t\xi) - \\ &- iM(\sin t\xi) = \overline{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

8.10. A karakterisztikus függvény és az eloszlás kapcsolata. Ha ξ csak egész értékeket vesz fel, akkor a (8.9.2) kifejezés FOURIER-sorrá válik:

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{itk} p_k. \quad (8.10.1)$$

Ebből következik, hogy p_k a $\varphi(t)$ függvénnyel ugyanolyan kapcsolatban van, mint a FOURIER-együttható a FOURIER-sorba fejtett függvénnyel, vagyis

$$p_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-itk} dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (8.10.2)$$

A folytonos eloszlás esetében $\varphi(t)$ nem más, mint az $f(x)$ függvény FOURIER-transzformáltja. A FOURIER-transzformáció elmélete szerint, ha az $|\varphi(t)|$ függvénynek az egész számegetesen vett integrálja véges,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty, \quad (8.10.3)$$

akkor

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt. \quad (8.10.4)$$

A (8.10.2) és (8.10.4) formulák speciális tulajdonságú eloszlásokra vonatkoznak, ezekre azonban egyben azt is állítják, hogy a karakterisztikus függvény az eloszlást egyértelműen meghatározza. Ez az állítás tetszőleges eloszlás esetére is igaz, sőt megadható egy olyan integrálformula, amelynek segítségével a karakterisztikus függvény alapján az eloszlásfüggvény meghatározható.

Tétel. Ha x és y a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének folytonossági pontjai, $y < x$, akkor

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(t) \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{2it} - \varphi(-t) \frac{e^{ity} - e^{itx}}{2it} \right) dt. \end{aligned} \quad (8.10.5)$$

Ezt a tételt nem bizonyítjuk. A (8.10.5) formulát LÉVY-féle inverziós formulának nevezzük. Mivel $F(y)$ 0-hoz tart, ha $y \rightarrow -\infty$, a fenti formulából következik, hogy $F(x)$ minden x folytonossági pontjában

$$\begin{aligned} F(x) &= \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(t) \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{2it} - \varphi(-t) \frac{e^{ity} - e^{itx}}{2it} \right) dt. \end{aligned} \quad (8.10.6)$$

Megjegyezzük még, hogy minden eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatároznak a folytonossági pontokban felvett értékei.

8.11. A karakterisztikus függvény további tulajdonságai.

1. tétel. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ független valószínűségi változók, karakterisztikus függvényeik $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$, továbbá $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r$ karakterisztikus függvénye $\varphi(t)$, akkor

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_r(t). \quad (8.11.1)$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$e^{it\xi_1} = \cos t\xi_1 + i \sin t\xi_1;$$

$$e^{it\xi_2} = \cos t\xi_2 + i \sin t\xi_2;$$

$$\vdots$$

$$e^{it\xi_r} = \cos t\xi_r + i \sin t\xi_r,$$

komplex értékű valószínűségi változókat. Ezek nyilvánvalóan függetlenek, továbbá szorzatuk

$$e^{it\xi_1} e^{it\xi_2} \dots e^{it\xi_r} = e^{it(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r)} = e^{it\eta}.$$

Innen a (8.8.3) formula alapján adódik, hogy

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= M(e^{it\eta}) = M(e^{it\xi_1}) M(e^{it\xi_2}) \dots M(e^{it\xi_r}) = \\ &= \varphi_1(t) \varphi_2(t) \dots \varphi_r(t), \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

A karakterisztikus függvény segítségével az eloszlás momentumai egyszerűen meghatározhatók. Ezt fejezi ki az alábbi tétel.

2. tétel. Ha létezik a ξ valószínűségi változó $\alpha_k = M(\xi^k)$ momentuma, akkor minden t -re létezik $\varphi(t)$ -nek a k -adik deriváltja, ez folytonos az egész számsíkon és

$$\alpha_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{i^k}, \quad (8.11.2)$$

továbbá

$$\varphi(t) = 1 + \alpha_1 it + \alpha_2 \frac{(it)^2}{2!} + \dots + \alpha_k \frac{(it)^k}{k!} + o(t^k). \quad (8.11.3)$$

A tételt nem bizonyítjuk, megjegyezzük azonban, hogy a (8.11.2) formula a karakterisztikus függvény (8.9.1) definíciójából következik, csak azt kell tudnunk, hogy α_k létezése biztosítja azt, hogy az $M(e^{it\xi})$ függvény k -nál nem nagyobb rendű deriváltja egyenlő $e^{it\xi}$ megfelelő rendű t szerinti deriváltjának várható értékével. Ha ezt tudjuk, vagy elfogadjuk, akkor ennek alapján

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= M(i^k \xi^k e^{it\xi}), \\ \varphi^{(k)}(0) &= i^k M(\xi^k) = i^k \alpha_k. \end{aligned}$$

1. példa. A binomiális és a Poisson-eloszlások. Ha ξ binomiális eloszlású, akkor $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, ahol $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, 0, 1 értékű valószínűségi változók,

$$P(\xi_k = 1) = p, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

tehát

$$M(e^{it\xi_k}) = e^{it(1-p)} + e^{itp} = 1 + p(e^{it} - 1)$$

és így az 1. tétel szerint

$$\varphi(t) = M(e^{it\xi}) = (1 + p(e^{it} - 1))^n$$

Ha ξ Poisson-eloszlású λ paraméterrel, akkor ξ karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)} \quad (8.11.5)$$

Itt jegyezzük meg, hogy nem-negatív egész értékű valószínűségi változók esetén a $g(x)$ generátorfüggvényt csak valós x -ekre értelmeztük. Ha azonban x helyébe formálisan e^{it} -t helyettesítünk, megkapjuk a $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényt.

2. példa. A normális eloszlás. Ha $\xi \sim N(m, \sigma)$ eloszlású, akkor karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (8.11.6)$$

Ebből differenciálással ξ tetszőleges rendű momentuma egyszerűen meghatározható. Ha ξ_1, ξ_2 független $N(m_1, \sigma_1)$, ill. $N(m_2, \sigma_2)$ eloszlású valószínűségi változók, akkor összegük karakterisztikus függvénye

$$e^{itm_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{itm_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(m_1 + m_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2}{2}}$$

ahonnan leolvasható, hogy $\xi_1 + \xi_2 \sim N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$ eloszlású.

3. példa. A Cauchy-eloszlás. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

akkor karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = e^{-|t|}. \quad (8.11.7)$$

A CAUCHY-eloszlásnak már az első momentuma sem létezik. Ez a karakterisztikus függvényből is leolvasható, ui. $\varphi(t)$ nem differenciálható a $t=0$ pontban, márpedig, ha $M(\xi)$ léteznék, akkor a 2. tétel szerint $\varphi(t)$ első deriváltja is léteznék minden valós t esetén.

Bár független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő az egyes karakterisztikus függvények szorzatával, a megfordított állítás nem igaz. Erre éppen a CAUCHY-eloszlás esetében láthatunk egy egyszerű példát: a

$$2\xi = \xi + \xi$$

valószínűségi változó karakterisztikus függvénye

$$e^{-12|t|} = e^{-2|t|} = e^{-|t|} e^{-|t|},$$

ξ azonban nyilvánvalóan nem független önmagától. Végül megemlítünk egy konvergencia-tételt, melyet a 9. fejezetben fogunk felhasználni.

3. tétel. Legyen $F_1(x), F_2(x), \dots$ egy eloszlásfüggvényekből alkotott sorozat, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ jelöljék a megfelelő karakterisztikus függvényeket. Ha az $F_n(x)$ sorozat tart egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez, vagyis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad (8.11.8)$$

az $F(x)$ függvény minden folytonossági pontjában teljesül, akkor minden valós t -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), \quad (8.11.9)$$

ahol $\varphi(t)$ az $F(x)$ eloszláshoz tartozó karakterisztikus függvény. Megfordítva: ha fennáll a (8.11.9) reláció, ahol $\varphi(t)$ egy $F(x)$ eloszlás karakterisztikus függvénye, akkor fennáll (8.11.8) is ugyanezzel az $F(x)$ -szel, $F(x)$ minden folytonossági pontjában.

HATÁRÉRTÉKTÉTELEK

A nagy számok gyenge törvényei

A nagy számok erős törvényei

A központi határeloszlás-tétel

Markov-láncok

9.1. Bevezető megjegyzések. Az első fejezetben szó volt arról, hogy ha egy kísérlettel kapcsolatban egy tetszőleges A eseményt kiválasztunk, majd a kísérletet igen sokszor egymástól függetlenül elvégezzük, akkor a k_A/n relatív gyakoriság stabilitást mutat. Ezt az empirikus adatok által igen erősen alátámasztott tényt a nagy számok törvényének neveztük és megállapítottuk, hogy e törvény lehetővé teszi a valószínűség fogalmának gyakorlati interpretációját, továbbá a valószínűségelmélet gyakorlati alkalmazását.

Ebben a fejezetben nagy számok törvényei elnevezéssel a relatív gyakoriságok stabilitására vonatkozó *matematikai* tételeket említünk meg és bizonyítunk be, kizárólag a valószínűség tulajdonságaira hivatkozva. Nem használjuk fel tehát a természeti és társadalmi véletlen jelenségekre vonatkozó empirikus tapasztalatokat, hanem e jelenségek elméleti matematikai modelljein belül elméleti tételeket mondunk ki. A véletlen kísérlet matematikai modellje kétségtelenül annak köszönheti létét, hogy a relatív gyakoriságok stabilitása már régóta ismert tapasztalati tény. Igaz azonban az is, hogy a valószínűségelmélet mint szigorú matematikai tudományág ennek ismerete nélkül is felépíthető, és a nagy számok matematikai törvényei bizonyíthatók az összes többi valószínűségelméleti tételhez hasonlóan.

Mármost tételezzük fel egy pillanatra, hogy nincs semmilyen tapasztalati ismeretünk a természeti és társadalmi véletlen jelenségekre vonatkozólag, és vessük fel a kérdést, hogy vajon elméleti tételeink biztosítják-e a relatív gyakoriságok stabilitását? Nyilvánvalóan nem. Felmerül tehát a következő

kérdés: milyen kapcsolatban állnak elméleti tételeink a gyakorlatban végrehajtott kísérletsorozatokkal, továbbá mondanak-e azokra egyáltalán valamit és ha igen, mit? E kérdésre a 9.3. és a 9.5. szakaszokban fogunk válaszolni, előbb azonban meg kell ismernünk a megfelelő tételeket.

Nagy számok törvényének nevezünk minden olyan matematikai tételt, mely bizonyos ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változók

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \quad (9.1.1)$$

számtani átlagaiból alkotott sorozat valamilyen értelemben való konvergenciáját állítja adott feltételek mellett. A legfontosabbak közülük azok a tételek, melyekben a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változók függetlenek. Ide sorolhatók a relatív gyakoriság stabilitására vonatkozó tételek is, egy A esemény relatív gyakorisága ui. nem más mint a (9.1.1) számtani átlag, ahol most

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \text{ az } i\text{-edik kísérletben bekövetkezik;} \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases} \quad (9.1.2)$$

$$\begin{aligned} P(\xi_i = 1) &= p = P(A); \\ P(\xi_i = 0) &= q = 1 - p. \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

9.2. Sztochasztikus konvergencia, konvergencia 1 valószínűséggel. A (9.1.1) sorozat konvergenciájáról kétféle értelemben fogunk beszélni, e két konvergenciatípus neve: sztochasztikus és 1 valószínűséggel való konvergencia.

Általában egy valószínűségi változókból alkotott η_n sorozatról azt mondjuk, hogy sztochasztikusan konvergál az η valószínűségi változóhoz, ha bármilyen kis, de rögzített pozitív ε esetén teljesül a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon) = 0 \quad (9.2.1)$$

határértékreláció. Speciális esetben η lehet konstans is. Azt,

hogy (9.2.1) minden $\varepsilon > 0$ számra teljesül, röviden úgy jelöljük, hogy $\eta_n \Rightarrow \eta$.

Egy η_n valószínűségi változókból alkotott sorozat minden egyes eleme egy Ω eseménytérén értelmezett függvény, ahol Ω minden η_n esetén lehetne más és más, feltételezzük azonban, hogy mindegyik η_n értelmezési tartománya egy és ugyanaz az eseménytér. Rögzített $\omega \in \Omega$ esetén az $\eta_n = \eta_n(\omega)$ számértékek egy közösleges értelemben vett sorozatot alkotnak. Ez a sorozat egyes ω elemi eseményeken lehet konvergens, más elemi eseményeken pedig divergens. Azokat az elemi eseményeket, melyeken konvergens sorozatot kapunk, egy halmazba, egy eseménybe összefoglalva, beszélhetünk ennek az eseménynek a valószínűségéről vagy röviden annak a valószínűségéről, hogy az η_n sorozat konvergens.

Ha 1 annak az eseménynek a valószínűsége, amelybe tartozó elemi eseményeken az η_n sorozat konvergens, akkor azt mondjuk hogy η_n 1 valószínűséggel konvergál.

Ha $\eta_n \rightarrow \eta$ ($n \rightarrow \infty$) egy 1 valószínűségű esemény minden elemi eseményén, akkor azt mondjuk, hogy az η_n valószínűségi változókból alkotott sorozat 1 valószínűséggel konvergál az η valószínűségi változóhoz. Ennek egy másik kifejezőmódja a következő:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta) = 1. \quad (9.2.2)$$

Speciális esetben η lehet konstans is.

E két konvergencia-fogalom közül az utóbbi az erősebb. Bebizonyítható, hogy ha (9.2.2) teljesül, akkor $\eta_n \Rightarrow \eta$. Abból azonban, hogy $\eta_n \Rightarrow \eta$, még csak az sem következik, hogy egyáltalán van olyan elemi esemény, melyen az $\eta_n = \eta_n(\omega)$ sorozat konvergálna. Konstruálható olyan η_n sorozat, mely minden elemi eseményen divergens, mégis sztochasztikusan konvergál.

Ha η_n egy számtani átlagokból alkotott (9.1.1) alakú sorozat, akkor aszerint, amint η_n sztochasztikusan, ill. 1 valószínű-

séggel konvergál egy konstans értékhez, a nagy számok gyenge, ill. erős törvényéről beszélünk. Előbbi megjegyzésünk értelmében azonos feltételeknek eleget tevő ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változó sorozat esetén a nagy számok minden egyes erős törvényéből következik egy megfelelő gyenge törvény. Ezeket mégis külön bizonyítjuk, egyrészt azért, mert megjegyzésünket nem bizonyítottuk, másrészt mert a gyenge törvények bizonyításai egyszerűek, végül pedig nem minden gyenge törvénynek van meg a megfelelője az erős törvények között.

9.3. Bernoulli tétele. Tekintsünk egy kísérletet, melynek két végeredménye van, a és b. Végezzük el a kísérletet végtelen sokszor egymástól függetlenül és jelölje ζ_n az a lehetőség gyakoriságát n kísérlet során. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\zeta_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad (9.3.1)$$

ahol p az a lehetőség valószínűsége. A (9.3.1) relációt másképpen így is felírhatjuk:

$$\eta_n = \frac{\zeta_n}{n} \Rightarrow p. \quad (9.3.2)$$

Bizonyítás. A (9.1.2)-ben értelmezett ξ_i független valószínűségi változókkal ζ_n a következő módon írható fel:

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Mivel $M(\xi_i) = p$, $D^2(\xi_i) = pq$, $i = 1, 2, \dots$ következik, hogy

$$M(\zeta_n) = np; \quad M\left(\frac{\zeta_n}{n}\right) = p;$$

$$D^2(\zeta_n) = npq, \quad D^2\left(\frac{\zeta_n}{n}\right) = \frac{pq}{n}.$$

A CSEBISEV-egyenlőtlenséget a ζ_n/n valószínűségi változóra al-

kalmazva, azt kapjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{\zeta_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \quad (9.3.3)$$

ahonnan az állítás leolvasható.

A (9.3.3) egyenlőtlenséggel egyben becslésünk van arra is, hogy milyen gyorsan tart 0-hoz a baloldalon álló valószínűség n -nel együtt.

Ezen a ponton válaszolunk arra a korábban feltett kérdésre, hogy milyen kapcsolatban áll a nagy számok matematikai törvénye a gyakorlattal. BERNOULLI tétele szerint eléggé nagy n esetén igen kicsi az alábbi valószínűség:

$$P\left(\left|\frac{\zeta_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right). \quad (9.3.4)$$

Ebből azonban még igen kis ε esetén sem vonhatjuk le azt a konzekvenciát, hogy

$$\left|\frac{\zeta_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon, \quad (9.3.5)$$

hiszen e formula fennállása egyáltalán nem biztos, teljesülésének van egy valószínűsége, amely 1-hez nagyon közel áll ugyan, de mégis csak egy valószínűség. Mármint rögzített ε esetén a (9.3.4) valószínűséget is egy p -nek tekintve, erre is felírható BERNOULLI tétele. Újból kapunk azonban egy olyan valószínűséget, melyre szintén felírható a BERNOULLI-tétel. Ilyenformán a valószínűségek káoszából nem tudunk kijutni, a (9.3.5) reláció teljesülését mint konzekvenciát nem állíthatjuk. Úgy tűnik tehát, hogy a BERNOULLI-tétel gyakorlati szempontból semmitmondó. Vegyük észre azonban, hogy a (9.3.4) formulában p tetszőleges 0 és 1 közötti valószínűség, a kívülálló P valószínűség azonban nagy n esetén igen kicsi. Ha most a tapasztalatra hivatkozva megállapítjuk, hogy a kis valószínűségű események gyakorlatilag lehetetlen események, nem következnek be, relatív gyakoriságuk 0, akkor a (9.3.4) formulában a zárójelen belül álló esemény gyakorlatilag lehetetlen, ennél-

fogva a (9.3.5) esemény *gyakorlatilag biztos*. Ilyenformán az elméleti tétel a gyakorlatra nézve nem tartalom nélküli, nem mellőzhetjük azonban a tapasztalatra való hivatkozást.

BERNOULLI tétéle speciális esete az alábbi tételnek, mely a várható érték számtani átlaggal való közelítését indokolja.

Tétel. Ha ξ_1, ξ_2, \dots azonos várható értékű és szórású, független valószínűségi változók, vagyis $M(\xi_i) = m$, $i = 1, 2, \dots$, akkor

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \Rightarrow m. \quad (9.3.6)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a CSEBISEV-egyenlőtlenséget a (9.3.6) relációban álló számtani átlagra, melynek várható értéke m , szórása pedig $\frac{\sigma}{n}$, ahol $\sigma = D(\xi_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Eszerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}. \quad (9.3.7)$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\sigma^2/\varepsilon^2 n \rightarrow 0$, ennél fogva (9.3.6) valóban fennáll.

A BERNOULLI-tételben ξ_i a (9.1.2) valószínűségi változó és $m = M(\xi_i) = p$.

Az előbbi tétel is speciális esete egy BERNSTEIN által bebizonyított tételnek, melyben az egyes valószínűségi változók nem feltétlenül függetlenek és azonos eloszlásúak.

9.4. Bernstein tétéle. Tegyük fel, hogy a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változókra teljesülnek a következő feltételek:

a) A ξ_k valószínűségi változók mindegyikének létezik a várható értéke és a szórása.

b) Ha $m_k = M(\xi_k)$ és

$$m_n^* = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n},$$

akkor létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^* = m$ határérték.

c) Ha $\sigma_k = D(\xi_k)$ és

$$S_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2,$$

akkor $S_n^2 \leq Kn$, ahol K n -től független állandó.

d) Van olyan, a nem-negatív egész-számokon értelmezett $r(k) \geq 0$ függvény, melyre teljesül, hogy $r(0) = 1$, $r_{ij} \leq r(|i-j|)$, ahol r_{ij} a ξ_i és ξ_j valószínűségi változók korrelációs együtthatója, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(k) = 0.$$

Ekkor érvényes az alábbi reláció

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \Rightarrow m. \quad (9.4.1)$$

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben végezzük el. Először megmutatjuk, hogy $\eta_n - m_n^* \Rightarrow 0$. Mivel $M(\eta_n) = m_n^*$, a CSEBISEV-egyenlőtlenség szerint

$$P(|\eta_n - m_n^*| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(\eta_n)}{2},$$

elegetes tehát ehhez belátnunk azt, hogy $D^2(\eta_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. A d) feltétel egyik követelményét kihasználva, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(\eta_n) &= \frac{1}{n^2} M[(\xi_1 - m_1 + \xi_2 - m_2 + \dots + \xi_n - m_n)^2] = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j r_{ij} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j r(|i-j|) = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[S_n^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} r(k) \sum_{i=1}^{n-k} \sigma_i \sigma_{i+k} \right]. \end{aligned}$$

A CAUCHY-féle egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{i=1}^{n-k} \sigma_i \sigma_{i+k} \leq \left(\sum_{i=1}^{n-k} \sigma_i^2 \sum_{i=1}^{n-k} \sigma_{i+k}^2 \right)^{1/2} \leq S_n^2,$$

tehát

$$D^2(\eta_n) \leq \frac{S_n^2}{n^2} + \frac{2S_n^2}{n} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(k).$$

Mivel $S_n^2 \leq Kn$, innen következik, hogy

$$D^2(\eta_n) \leq \frac{K}{n} + 2K \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r(k),$$

mivel pedig a jobb oldalon mindkét tag 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, következik, hogy $D^2(\eta_n) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.

Tekintettel arra, hogy

$$\eta_n - m = \eta_n - m_n^* + m_n^* - m,$$

ahol $m_n^* - m \rightarrow 0$, tételünk bizonyítása teljes lesz, ha bebizonyítjuk a következő lemmát.

Lemma. Legyen ζ_n egy valószínűségi változókból alkotott, a_n pedig egy valós számokból alkotott sorozat. Ha $\zeta_n \Rightarrow 0$, $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), akkor $\zeta_n + a_n \Rightarrow 0$.

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan n_0 , hogy ha $n \geq n_0$, akkor

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq a_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ebből következik, hogy ha $n \geq n_0$, akkor

$$\begin{aligned} P(|\zeta_n + a_n| > \varepsilon) &= P(\zeta_n + a_n > \varepsilon) + P(\zeta_n + a_n < -\varepsilon) \leq \\ &\leq P\left(\zeta_n > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\zeta_n < -\frac{\varepsilon}{2}\right) = \\ &= P\left(|\zeta_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Mivel $\zeta_n \Rightarrow 0$, a jobb oldalon álló valószínűség 0-hoz tart, ennél fogva $\zeta_n + a_n \Rightarrow 0$, amit bizonyítani akartunk. Ezzel a tétel bizonyítása is kész.

A NAGY SZÁMOK ERŐS TÖRVÉNYEI

9.5. A nagy számok gyenge és erős törvényeinek kapcsolata.

A nagy számok gyenge törvényének mindegyik változata olyan jellegű állítást tartalmaz, hogy eléggé nagy n esetén az η_n számtani átlag eltérése egy m számtól igen nagy valószínűséggel kisebb, mint az n szám meghatározása előtt rögzített, de tetszőlegesen kicsiny pozitív ε szám. Formulával kifejezve, minden ε -hoz és δ -hoz található olyan n , hogy

$$P(|\eta_n - m| \leq \varepsilon) \geq 1 - \delta. \quad (9.5.1)$$

n -et úgy is megválaszthatjuk, hogy (9.5.1) érvényes n -re és minden n -nél nagyobb számra is, ha azt n helyébe behelyettesítjük. Sok gyakorlati probléma esetén arra van szükségünk, hogy egy bizonyos n esetén az $\eta_n - m$ eltérés nagy valószínűséggel kicsiny legyen; ilyen esetekben a nagy számok gyenge törvénye kielégítőnek tekinthető. Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy a (9.5.1) relációból nem következik az alábbi:

$$P(|\eta_n - m| \leq \varepsilon; |\eta_{n+1} - m| \leq \varepsilon; |\eta_{n+2} - m| \leq \varepsilon, \dots) \geq 1 - \delta. \quad (9.5.2)$$

Ha azonban az η_n számtani átlagra teljesül az, hogy

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = m) = 1, \quad (9.5.3)$$

akkor tetszőleges kis ε és δ esetén található olyan n (amely nem feltétlenül ugyanaz, mint a (9.5.1) relációban szereplő n), hogy teljesül a (9.5.2) reláció. Megfordítva, ha tetszőleges kis ε és δ esetén található olyan n , hogy (9.5.2) fennáll, akkor teljesül (9.5.3) is. E két állítást nem bizonyítjuk. A fentiekből kitűnik, hogy a nagy számok erős törvénye gyakorlati szempontból is fontos, és a gyenge törvénytől lényegesen többet mond.

9.6. A nagy számok erős törvénye relatív gyakoriságokra.

Borel tétele. Tekintsünk egy kísérletet, melynek két végeredménye van, a és b . Végezzük el a kísérletet gondolatban vég-

telen sokszor, egymástól függetlenül, és tekintsük ezt a végtelen sok kísérletet egyetlen kísérletnek. Ennek elemi eseményei az a és b betűk összes lehetséges sorozatai, egy ezek közül így kezdődik:

$$a a b a b b b b a b a a a \dots$$

Minden esemény az ilyen sorozatok egy összességéből, kötegből áll. Legyen az a lehetőség valószínűsége p ; ezzel egyes események valószínűségeit könnyen kifejezhetjük. Az az esemény, hogy az első kísérlet végeredménye a , mindazoknak a sorozatoknak az összességéből áll, amelyeknek első eleme a . Ennek a halmaznak, eseménynek a valószínűsége p . Az az esemény, hogy az első három kísérletben a kétszer, b egyszer fordul elő, azoknak a sorozatoknak az összessége, amelyeknek első három eleme vagy $a a b$ vagy $a b a$ vagy $b a a$. Ennek a halmaznak, eseménynek a valószínűsége $3p^2q$. Ilyen esemény azoknak a sorozatoknak az összessége is, melynek az a tulajdonsága, hogy első n elemük közül az a betűk száma n -nel osztva p -hez konvergál. A nagy számok egyik erős törvénye azt mondja ki, hogy ennek az eseménynek a valószínűsége 1. A (9.1.2) alatti valószínűségi változók nyelvén ugyanezt az állítást a következő reláció fejezi ki

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = p\right) = 1. \quad (9.6.1)$$

Ez a nagy számok erős törvényei közül a legegyszerűbb és legalapvetőbb, melyet BOREL bizonyított be. Az állítást tétel-szerűen is kimondjuk.

Borel tétele. Ha egy kísérletnek két végeredménye van, a és b , akkor végtelen sok, egymástól független kísérlet esetén az a végeredmény relatív gyakorisága 1 valószínűséggel konvergál a p számhoz, ahol p az a lehetőség valószínűsége.

BOREL tételét külön nem bizonyítjuk, mivel ez speciális esete a (9.8) szakasz tételének.

9.7. A Borel—Cantelli lemma. Ha A_1, A_2, \dots egy olyan eseménysorozat, melyre teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty,$$

akkor 1 annak a valószínűsége, hogy az A_1, A_2, \dots események közül csak véges sok következik be. Másképpen kifejezve, az Ω eseménytérnek van olyan Ω_1 részhalmaza, amelyre teljesül, hogy $P(\Omega_1) = 1$ és ha $\omega \in \Omega_1$, akkor ω az A_1, A_2, \dots események közül csak véges soknak az eleme.

Bizonyítás. Az az esemény, tehát azoknak az ω elemi eseményeknek az összessége, melyek végtelen sok eseményhez tartoznak, a következő formában írható fel:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Mivel C szorzata a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, n=1, 2, \dots$ eseményeknek, következik, hogy

$$C \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

A 2.2. szakasz tétele felhasználásával innen az adódik, hogy

$$P(C) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

A jobb oldalon egy konvergens sor maradéka áll, amely 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. Eszerint $P(C) = 0$, tehát az $\Omega_1 = \Omega - C$ esemény rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

9.8. A nagy számok erős törvénye korlátos negyedik momentumok esetén. Mielőtt tételünk kimondására és bizonyítására rátérnénk, megemlítenek egy azonosságot. Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

független valószínűségi változók, amelyeknek negyedik (következőképpen minden alacsonyabbrendű) momentumai léteznek, továbbá $M(\xi_i) = 0$, $D(\xi_i) = \sigma_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, akkor

$$M\left[\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^4\right] = \sum_{i=1}^n M(\xi_i^4) + 3 \sum_{j \neq k} M(\xi_j^2) M(\xi_k^2). \quad (9.8.1)$$

Ha ui. a bal oldalon a várható érték jelén belül a negyedik hatványra emelést elvégezzük, akkor az így kapott összeg tagjai az alábbi három kategóriába sorolhatók:

ξ_i^4 alakú tagok;

$\xi_j^2 \xi_k^2$ alakú tagok, ahol $j \neq k$,

további tagok, melyekben valamelyik szorzó az első hatványon szerepel.

Ezek összegének várható értékét tagonként véve, a harmadik kategóriába tartozók mindegyikének várható értéke 0, mert ha egy tagban ξ_i az első hatványon szerepel, akkor figyelembe véve, hogy független valószínűségi változók szorzatának várható értéke egyenlő az egyes várható értékek szorzatával, $M(\xi_i) = 0$ miatt az egész szorzat várható értéke 0. Az első kategóriába tartozó tagok várható értékeinek összege (9.8.1) jobb oldalának első tagja. A második kategóriába tartozó tagok oly módon keletkeznek, hogy a

$$\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)$$

szorzat faktorait két kettes csoportba osztjuk (ez három különböző módon lehetséges), majd az első két faktorból a ξ_j , a második két faktorból a ξ_k valószínűségi változókat önmagukkal megszorozzuk, ahol $j \neq k$. Ebből az is világos, hogy a második kategóriába tartozó tagok száma $3n(n-1)$.

Ezek előrebocsátása után bebizonyítjuk a következő tételt.

Tétel. Ha ξ_1, ξ_2, \dots egy független valószínűségi változókból alkotott sorozat, mindegyik változó negyedik momentuma véges, várható értéke 0 és

$$M(\xi_i^4) \leq K, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9.8.2)$$

ahol K egy i -től független állandó, akkor

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = 0\right) = 1. \quad (9.8.3)$$

Bizonyítás. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a (4.9.3) egyenlőtlenségből kifolyólag

$$M(\xi_i^2) \leq \sqrt{M(\xi_i^4)} \leq \sqrt{K}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9.8.4)$$

Rögzített n mellett alkalmazzuk a MARKOV-féle egyenlőtlenséget a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók η_n számtani átlagának negyedik hatványára. Eszerint minden pozitív ε esetén

$$P(\eta_n^4 \geq \varepsilon) \leq \frac{M(\eta_n^4)}{\varepsilon}.$$

Tegyük ε helyébe az $\varepsilon = 1/\sqrt{n}$ értéket, akkor azt kapjuk, hogy

$$P(|\eta_n| \geq n^{-1/4}) \leq \sqrt{n} M(\eta_n^4).$$

Felhasználva a (9.8.1) és a (9.8.2) relációkat, a következő becslés adódik:

$$\begin{aligned} \sqrt{n} M(\eta_n^4) &= \frac{\sqrt{n}}{n^4} M\left[\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^4\right] = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n^4} \left(\sum_{i=1}^n M(\xi_i^4) + 3 \sum_{j \neq k} M(\xi_j^2) M(\xi_k^2) \right) \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{n^4} (nK + 3n(n-1)K) < \frac{4K}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$, ha $\alpha > 1$, következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\eta_n| \geq n^{-1/4}) < \infty.$$

Jelölje A_n azt az eseményt, hogy $|\eta_n| > n^{-\frac{1}{8}}$. A BOREL—CANTELLI-lemma szerint az elemi események halmazának van egy olyan Ω_1 részhalmaza, melyre teljesül, hogy $P(\Omega_1) = 1$, és ha $\omega \in \Omega_1$, akkor ω az A_1, A_2, \dots események közül legfeljebb véges soknak eleme. Minden ilyen ω esetén tehát legfeljebb véges sok n kivételével teljesül az

$$|\eta_n| \leq n^{-\frac{1}{8}}$$

egyenlőtlenség, amiből számunkra csak az a konzekvencia fontos, hogy $\eta_n = \eta_n(\omega) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha ezt a tételt a $\xi_i - p$, $i = 1, 2, \dots$ valószínűségi változókra alkalmazzuk, ahol ξ_i a (9.1.2) alatt definiált valószínűségi változó, megkapjuk BOREL tételét.

9.9. Kolmogorov tétele. A nagy számok erős törvényének egy másik változatát KOLMOGOROV bizonyította be. E tétel az egyes valószínűségi változók szórásának létezését követeli csak meg. A tétel a következő.

Tétel. Ha ξ_1, ξ_2, \dots független, véges szórású valószínűségi változók, $M(\xi_i) = 0$, $D(\xi_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots$, továbbá

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} < \infty, \quad (9.9.1)$$

akkor a ξ_1, ξ_2, \dots sorozatra teljesül a nagy számok erős törvénye, vagyis

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = 0\right) = 1.$$

A 9.8. szakasz tétele speciális esete a KOLMOGOROV-tételnek. Ha ui. a ξ_i valószínűségi változók negyedik momentumai léteznek és korlátos sorozatot alkotnak, akkor a (9.8.4) egyenlőtlenség miatt a $\sigma_i^2 = M(\xi_i^2)$ sorozat is korlátos, amiből következik, hogy a (9.9.1) sor konvergens.

Megemlítünk három egyenlőtlenséget. Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots független, véges szórású és 0 várható értékű valószínűségi változók $D^2(\xi_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots$. Korábban bebizonyítottuk, hogy érvényes a következő

Csebisev egyenlőtlenség:

$$P(|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\varepsilon^2}. \quad (9.9.2)$$

Ennél lényegesen többet mond az ún.

Kolmogorov-egyenlőtlenség:

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\varepsilon^2}. \quad (9.9.3)$$

Vegyük észre, hogy a (9.9.2) és (9.9.3) jobb oldala azonos, (9.9.3) bal oldala azonban nyilvánvalóan nem kisebb (9.9.2) bal oldalánál.

Ha ξ_1, ξ_2, \dots független, véges szórású és 0 várható értékű valószínűségi változókból alkotott sorozat, melyre teljesül a (9.9.1) egyenlőtlenség, akkor fennáll a

Hájek-egyenlőtlenség:

$$P\left(\sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k}{k} \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} \right). \quad (9.9.4)$$

KOLMOGOROV tételét ez utóbbi egyenlőtlenség alapján könnyen bebizonyíthatjuk. Ha ui. a (9.9.1) sor konvergens, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} = 0,$$

továbbá belátható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2} = 0.$$

Eszerint minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k}{k} \right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Jelölje B_n a zárójelen belül álló eseményt. Nyilvánvaló, hogy $B_{n+1} \subset B_n$, tehát a 2.2. szakasz tétele felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k}{k} \right| \geq \varepsilon\right) &= \\ &= P(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0. \end{aligned}$$

Elvégezve az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet, az adódik, hogy

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k}{k} \right| \neq 0\right) = 0,$$

amit bizonyítani akartunk.

9.10. Előírt pontosságú közelítéshez szükséges kísérletszám meghatározása. Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots azonos várható értékű és szórású független valószínűségi változók. Jelöljük m és σ ezek közös várható értékét és szórását. Azt a kérdést vetjük fel, hogy milyen nagynak kell n -nek lennie ahhoz, hogy előírt ε és p_0 esetén teljesüljön a

$$P\left(\left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - p_0, \quad (9.10.1)$$

ill. a

$$P\left(\sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{k} - m \right| < \varepsilon\right) \geq 1 - p_0 \quad (9.10.2)$$

egyenlőtlenség. Konkrét probléma esetén ε és p_0 általában kis számok, tehát előírt nagy valószínűséggel kívánjuk, hogy a

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{k}$$

számnyi átlag egy előírt kis ε számnál kevesebbel térjen el az m várható értéktől, mégpedig az első esetben $k = n$ esetén, a második esetben pedig valamennyi $k \geq n$ esetén. Ehhez kell n értékét meghatároznunk. Nem fogjuk tudni megmondani, hogy pontosan melyik n -től kezdve teljesül a (9.10.1), ill. a (9.10.2) egyenlőség, megadunk azonban olyan számokat, melyeknél n -et nagyobboknak választva, egyenlőtlenségeink teljesülnek.

Ha a HÁJEK-féle egyenlőtlenséget a $\xi_k - m$ valószínűségi változókra alkalmazzuk, akkor a jobboldalon most $\sigma_i = \sigma$, $i = 1, 2, \dots$, tehát

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{k} - m \right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{n\sigma^2}{n^2} + \sigma^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right) < \\ &< \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} \right) = \frac{2\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Tehát a CSEBSEV-egyenlőtlenség szerint

$$P\left(\left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \quad (9.10.3)$$

a HÁJEK-féle egyenlőtlenség szerint pedig

$$P\left(\sup_{k \geq n} \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{k} - m \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{2\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \quad (9.10.4)$$

(9.10.3)-ból következik, hogy (9.10.1) teljesül, ha $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq p_0$, vagyis, ha

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 p_0}, \quad (9.10.5)$$

(9.10.4) szerint pedig (9.10.2) teljesül, ha $\frac{2\sigma^2}{n\varepsilon^2} \leq p_0$, ami egyértelmű azzal, hogy

$$n \geq \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2 p_0}. \quad (9.10.6)$$

Vegyük észre, hogy (9.10.6) jobb oldala kétszerese (9.10.5) jobb oldalának.

$m \neq 0$ esetén felvethető az analóg probléma a számtani átlagok relatív eltérésére m -től. A kérdés most az, hogy milyen nagy n esetén teljesül a

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{nm} - 1\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - p_0, \quad (9.10.7)$$

ill. a

$$P\left(\sup_{k \leq n} \left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{km} - 1\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - p_0 \quad (9.10.8)$$

egyenlőtlenség. E kérdés megválaszolásához elegendő előbb eredményünket ε helyett $\varepsilon|m|$ -re alkalmazni. Eszerint (9.10.7) ill. (9.10.8.) teljesül, ha

$$n \geq \frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 p_0}, \quad (9.10.9)$$

ill.

$$n \geq \frac{\sigma^2}{m^2} \cdot \frac{2}{\varepsilon^2 p_0}. \quad (9.10.10)$$

Ezek az egyenlőtlenségek abban különböznek a (9.10.6), (9.10.7) egyenlőtlenségektől, hogy σ helyett itt a $\frac{\sigma}{|m|}$ relatív szórás szerepel.

Ha σ , ill. a $\frac{\sigma}{|m|}$ hányados nem ismeretes, akkor ezekre felső becslést adunk, ami a legtöbb esetben lehetséges. Ezáltal persze n -re nagyobb szám adódik, mint kellene. A most tárgyalt problémára a 9.15 szakaszban visszatérünk.

A KÖZPONTI HATÁRELOSZLÁSTÉTEL

9.11. Általános megjegyzések. Míg a nagy számok törvényei a valószínűség és a várható érték határértékként való felléptét indokolják elméleti úton, a központi, vagy centrális határeloszlástétel különféle változatai a valószínűségelméletben központi szerepet játszó normális eloszlás széleskörű felléptét magyarázzák meg.

Abból a célból, hogy a centrális határeloszlástételt és egyben azt a jelenséget, amelyet e tétel kifejez, könnyebben megértessük, tekintsünk egy a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású és független $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ valószínűségi változókból alkotott sorozatot. Vezessük be az

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

jelölést. $\eta_1 = \xi_1$, továbbá $\eta_2 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ sűrűségfüggvényeinek analitikus kifejezéseit az (5.12.9), (5.12.10) és (5.12.11) formulákkal adtuk meg, geometriai képeiket pedig a 42. és a 43. ábrán láthatjuk. Már e három ábra is azt mutatja, hogy ahogyan a $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ sorozat egyre több tagját adjuk össze, úgy válik egyre inkább harang alakúvá az összeg sűrűségfüggvénye. Emlékezzünk arra, hogy a normális eloszlás sűrűségfüggvényéről is megállapítottuk, hogy geometriai képe σ nagy vagy kicsiny voltától függően lapos, ill. csúcsos harang alakú görbe.

Ez persze nem bizonyíték amellett, hogy elég nagy n esetén $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ sűrűségfüggvénye közel áll egy normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez, mert harang alakú görbe sok van. Mégis bebizonyítható, hogy elég nagy n esetén η_n sűrűségfüggvénye közelítően normális, mégpedig a kiinduló eloszlástól függetlenül, tehát nem csupán egyenletes eloszlású ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változók esetén. Az egyedüli feltétel, melyre a valószínűségi változók függetlenségén kívül szükségünk van, a szórás létezése, bár vannak olyan tételek is, amelyekben még a várható érték létezését sem tesszük fel, ehelyett más követelmény szerepel. Ismét más tételben nem szerepel a függetlenség feltétele. Az

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

összegre azonban határelloszlástélt nem mondhatunk ki, mert ha $n \rightarrow \infty$, akkor η_n eloszlása $M(\xi_1) \neq 0$ esetén egyre inkább a $+\infty$, vagy a $-\infty$ felé tolódik el, és a számegegyenesen egyre inkább elkenődik. Mindkét jelenség érthető, hiszen

$$M(\eta_n) = nM(\xi_1);$$

$$D^2(\eta_n) = nD^2(\xi_1),$$

pl. az előbbi, $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók esetén

$$M(\eta_n) = \frac{n}{2}; \quad D^2(\eta_n) = \frac{n}{12}.$$

Ily módon tetszőleges véges (a, b) intervallum esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq \eta_n \leq b) = 0.$$

Ha azonban η_n helyett ennek

$$\eta_n^* = \frac{\eta_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

standardizáltját vizsgáljuk, ahol $m = M(\xi_k)$, $\sigma = D(\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, akkor erre bebizonyítható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq \eta_n^* \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (9.11.1)$$

Elég nagy n esetén tehát η_n^* közelítően $N(0, 1)$ eloszlású. Általában η_n^* közelítően normális eloszlásúvá válik aránylag kis n esetén, tehát mielőtt az eloszlás nagyon eltolódnék és elkenődnék. Ezért mondhatjuk, hogy az

$$\eta_n = \sigma\sqrt{n}\eta_n^* + nm$$

valószínűségi változó közelítően normális eloszlású $M(\eta_n) = nm$ várható értékkel és $D(\eta_n) = \sigma\sqrt{n}$ szórással.

9.12. A Moivre—Laplace-tétel. Történelmileg az első, (9.11.1) típusú tételt MOIVRE és LAPLACE bizonyították be arra az esetre, amikor ξ_1, ξ_2, \dots a 0 és 1 értékeket veszik fel

$$\begin{aligned} P(\xi_k = 1) &= p; \\ P(\xi_k = 0) &= q = 1 - p, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots$$

valószínűségekkel, amikor tehát η_n binomiális eloszlású. Ekkor

$$M(\eta_n) = np;$$

$$D^2(\eta_n) = npq.$$

Ezt a tételt a következőképpen fogalmazzuk meg.

Tétel. Moivre—Laplace-tétel. Ha η_n n -edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, ahol $0 < p < 1$ és p n -től független állandó, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{np + a\sqrt{npq} \leq k \leq np + b\sqrt{npq}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \quad (9.12.1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Nem törekszünk e tétel bizonyítására, megjegyezzük azonban, hogy ez bebizonyítható kizárólag a STIRLING-formula alábbi, a III. függelék (7) formulájánál élesebb

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\alpha_n}; \quad \frac{1}{12n+6} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$$

változata segítségével. A 9.13 pontban bebizonyított tétel a MOIVRE—LAPLACE-tételt speciális esetként tartalmazza.

Ami a normális eloszláshoz való konvergencia sebességét illeti, megemlítjük a következőket. Tetszőleges $a < b$ esetén

$$P\left(a \leq \frac{\eta_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2} - a\right) e^{-\frac{a^2}{2}} + \left(\frac{1}{2} - b\right) e^{-\frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi npq}} +$$

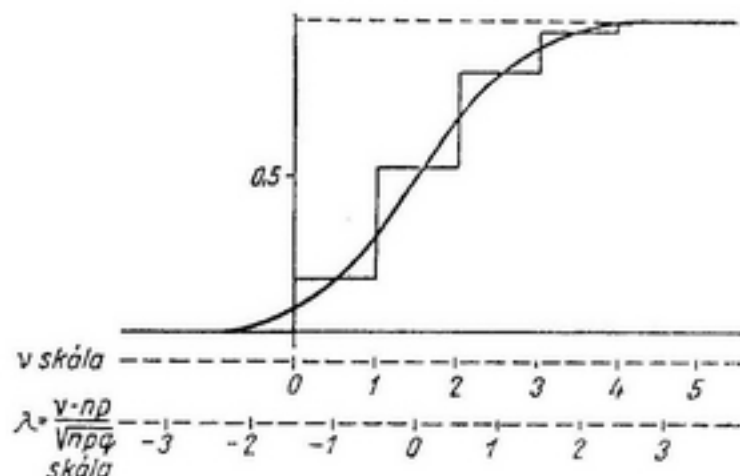
$$+ \frac{q-p}{6\sqrt{2\pi npq}} \left[(1-b^2) e^{-\frac{b^2}{2}} - (1-a^2) e^{-\frac{a^2}{2}} \right] + R,$$

ahol α és β az $nq - a\sqrt{npq}$, $np + b\sqrt{npq}$ számok tört részei és

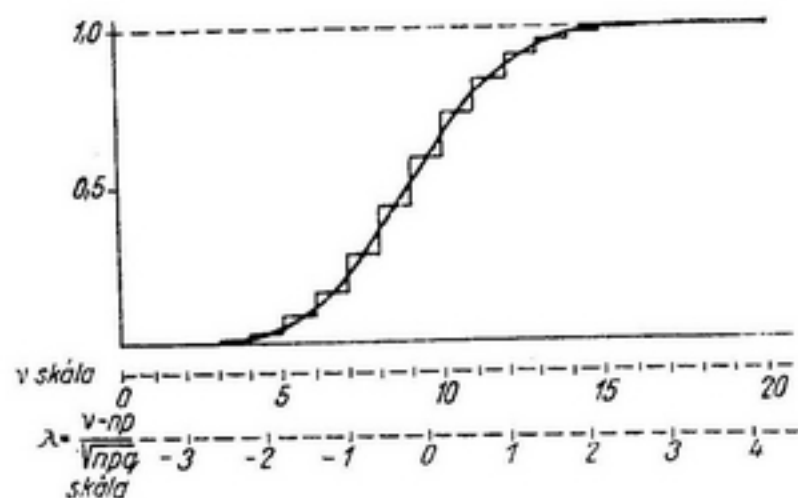
$$|R| < \frac{0,2 + 0,25|p - q|}{npq} + e^{-\frac{3}{2}\sqrt{npq}}$$

feltéve, hogy $npq \geq 25$.

Az 54. ábrán a $p=0,3$; $n=5$, az 55. ábrán pedig a $p=0,3$; $n=30$ paraméterű binomiális eloszlás eloszlásfüggvényét láthatjuk az $N(np, \sqrt{np(1-p)})$ eloszlásfüggvényekkel.



54. ábra



55. ábra

9.13. A karakterisztikus függvény alkalmazása

Tétel. Ha ξ_1, ξ_2, \dots azonos eloszlású, független és véges szórási valószínűségi változók, $M(\xi_k) = m$, $D(\xi_k) = \sigma$, $k = 1, 2, \dots$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (9.13.1)$$

Bizonyítás. Jelölje $\varphi(t)$ a $\xi_k - m$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor $\frac{\xi_k - m}{\sigma\sqrt{n}}$ karakterisztikus függvénye

$$\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

a zárójelen belül álló

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\xi_1 - m}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{\xi_2 - m}{\sigma\sqrt{n}} + \dots + \frac{\xi_n - m}{\sigma\sqrt{n}} \quad (9.13.2)$$

összeg karakterisztikus függvénye pedig ennek n -edik hatvá-

nya. Rögzített t esetén a 8. fejezet 11. szakaszának 2. tételét alkalmazva az adódik, hogy

$$\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right) = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ahonnan a (9.13.2) összeg karakterisztikus függvényére egy klasszikus analízis tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (9.13.3)$$

Ez pedig a 8. fejezet 11. szakaszának 3. tétele szerint ekvivalens a (9.13.1) relációval, tekintve hogy az $N(0, 1)$ eloszlás karakterisztikus függvénye $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Egy, az előbbinél részben általánosabb tétel, melyben nem tételezzük fel, hogy ξ_1, ξ_2, \dots azonos eloszlásúak, a következő.

Laplace—Ljapunov-tétel. Ha ξ_1, ξ_2, \dots független valószínűségi változók, melyeknek harmadik (következésképpen minden alacsonyabbrendű) momentumai léteznek, $M(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \beta_k}{S_n^3} = 0,$$

ahol

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \right)^{1/2}, \quad \sigma_k^2 = D^2(\xi_k), \quad \beta_k = M(|\xi_k|^3), \quad k = 1, 2, \dots,$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{S_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

9.14. A Lindeberg—Feller-tétel. A centrális határeloszlástétel egy érdekes feltételen alapuló változatát LINDEBERG bizonyította be. Később FELLER kimutatta, hogy véges szórású független valószínűségi változók esetén e feltétel nemcsak elegendő, de szükséges feltétele is a centrális határeloszlástétel teljesülésének. A tételt az alábbiakban bizonyítás nélkül közöljük.

Ha ξ_1, ξ_2, \dots független, véges szórású valószínűségi változók, $M(\xi_k) = 0$; $D^2(\xi_k) = \sigma_k^2$, $k = 1, 2, \dots$; $S_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$, akkor ahhoz, hogy teljesüljön a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{S_n} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

reláció, szükséges és elegendő, hogy teljesüljön az alábbi, ún. Lindeberg-féle feltétel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} \frac{1}{\sigma_k^2} M(\xi_k^2 | \xi_k| \geq \varepsilon S_n) P(|\xi_k| \geq \varepsilon S_n) = 0. \quad (9.14.1)$$

Folytonos eloszlású valószínűségi változók esetén a LINDEBERG-feltétel a következő alakba írható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} \frac{1}{\sigma_k^2} \int_{|x| \geq \varepsilon S_n} x^2 f_k(x) dx = 0, \quad (9.14.2)$$

ahol $f_k(x)$ a ξ_k valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

Érdekes megemlíteni, hogy ha a LINDEBERG-feltétel teljesül, akkor szükségképpen $S_n \rightarrow \infty$. Ezt folytonos eloszlású ξ_k -k esetén könnyen beláthatjuk. S_n^2 ui. egy nem-negatív számokból alkotott sor részletösszege; ha ennek a sornak az összege véges volna, mondjuk S^2 , akkor ε -t megválaszthatnánk olyan kicsinynek, hogy

$$\int_{|x| \geq \varepsilon S} x^2 f_1(x) dx > \frac{\sigma_1^2}{2}.$$

Mivel $S_n \subseteq S$, következik, hogy

$$\int_{|x| \leq \varepsilon S_n} x^2 f_1(x) dx \subseteq \int_{|x| \leq \varepsilon S} x^2 f_1(x) dx$$

és így (9.14.2) nem teljesülhet.

Ha viszont $S_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$ és a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változók egyenletesen korlátosak, tehát van olyan K , hogy

$$|\xi_k| < K, \quad k = 1, 2, \dots,$$

akkor a LINDBERG-feltétel teljesül, mert

$$f_k(x) = 0, \quad \text{ha } |x| \geq K, \quad k = 1, 2, \dots$$

és akármilyen kis rögzített $\varepsilon > 0$ esetén egy bizonyos n -től kezdve $\varepsilon S_n \geq K$. Következésképpen erre a ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változó-sorozatra teljesül a központi határeloszlástétel.

9.15. A központi határeloszlástétel alkalmazása. Ami a központi határeloszlástétel különféle változatainak gyakorlati jelentőségét illeti, a következőket mondhatjuk. Egyes esetekben konkrét, ismert tulajdonságú valószínűségi változók összegével van dolgunk. Amennyiben ekkor a központi határeloszlástétel valamelyik változatának feltételei teljesülnek, a tétel alapján jogosan következtetünk arra, hogy az összeg közelítőleg normális eloszlású, hacsak az összeadandók száma elég nagy. Más esetekben viszont olyan valószínűségi változóval állunk szemben, melyről feltételezzük, hogy sok kis, véletlen hatás összegződése következtében jött létre és ennek alapján következtetünk arra, hogy valószínűségi változónk normális eloszlású. Ez az eset fordul elő pl. méréseknél, ahol a mérési hiba sok kis véletlen hatás összegének tekinthető. Ha azonban a sok kis véletlen hatás szorozódik, mint pl. a törési és osztódási folyamatoknál, akkor az eredmény logaritmus lesz sok kis véletlen hatás összege, tehát valószínűségi változónk közelítően logaritmikus normálást követ.

Előírt pontosságú közelítéshez szükséges kísérletszám meghatározása. Legyen ξ_1, ξ_2, \dots azonos eloszlású, véges szórású és

független valószínűségi változókból alkotott sorozat. Jelölje m ezek közös várható értékét. A 9.10 szakaszban meghatároztuk, milyen nagynak kell n -nek lennie ahhoz, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ számtani átlaga előírt pontosságú közelítése legyen az m várható értéknek. Most ugyanezzel a kérdéssel foglalkozunk, a CSEBISÉV-egyenlőtlenség helyett a centrális határeloszlástételre támaszkodva. A (9.13) szakasz tétele szerint

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \lambda\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\Phi(\lambda) - 1,$$

tehát elég nagy n esetén

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \lambda\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1.$$

Egyszerű átrendezéssel az adódik, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - m\right| < \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1. \quad (9.15.1)$$

Ha tehát előírt p_0 esetén λ -t meghatározzuk oly módon, hogy $1 - p_0 = 2\Phi(\lambda) - 1$, majd előírt ε -hoz n értékét oly nagyra választjuk, hogy $\lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$, akkor azt kapjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - p_0. \quad (9.15.2)$$

Ehhez tehát n -nek ki kell elégítenie az alábbi feltételt:

$$n \geq \lambda^2 \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (9.15.3)$$

Fel kell hívnunk a figyelmet azonban arra, hogy n -re volt egy korábbi feltételünk, nevezetesen az, hogy a (9.15.1) körülbe-

lülü egyenlőség teljesüljön. Ez azonban aránylag kis n esetén már fennáll. Mostani eljárásunk a 9.10 szakaszban ismertetett eljárással szemben nem mentes egy elhanyagolástól. Másrészt azonban a (9.15.3) egyenlőtlenség jobb oldalán álló korlát lényegesen kisebb, mint a (9.10) szakaszban n -re kapott megfelelő alsó korlát.

Ha azt kívánjuk, hogy a számtani átlag relatív eltérése m -től legalább $1 - p_0$ valószínűséggel kisebb legyen mint ε , akkor az n -re vonatkozó feltétel annyiban módosul, hogy (9.15.3) jobb oldalán σ^2 helyett σ^2/m^2 -et kell írunk (természetesen fel kell tennünk, hogy $m \neq 0$).

Példa. Prágában 1754 és 1886 között ugyanolyan rendszerű lottó működött, mint a mostani magyar lottó, 90 szám közül kellett 5-öt választani (l. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. kiadás 1908, 1. kötet). 132 év alatt összesen 2854 húzásra került sor. Tekintsük vizsgálandó valószínűségi változóként az egy alkalommal kihúzott 5 szám számtani átlagát. Ennek várható értéke 45,5, szórásnégyzete pedig (10.27.6) szerint

$$D^2\left(\frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5}{5}\right) = \frac{\sigma^2}{5}\left(1 - \frac{4}{89}\right) = \sigma^2 \frac{17}{89}, \quad (9.15.4)$$

ahol $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ az egymás után kihúzott számok számjegyeit jelentik, a húzás sorrendjében és

$$\sigma^2 = \frac{1}{90} \sum_{k=1}^{90} k^2 - \left(\frac{1}{90} \sum_{k=1}^{90} k\right)^2 = 674,917.$$

A (9.15.4) szórásnégyzet numerikus értéke tehát 128,917.

Az $\varepsilon = 1$ és $p_0 = 0,05$ esetben a (9.10.5) formulában szereplő alsó határ 2579, tehát ehhez a közelítéshez a 2854 kísérlet elegendőnek bizonyul. Még kevesebbre van szükség, ha a (9.15.3) alsó határral dolgozunk ugyancsak az $\varepsilon = 1$ és $2\Phi(\lambda) - 1 = 0,9$ esetben. Ekkor ugyanis $\lambda = 1,96$ és így (9.15.3) korlátja 496. A mondottakat a prágai lottó konkrét adatai igazolják. A 2854 számtani átlagára ugyanis 45,534 adódott, ami igen közel áll a 45,5 elméleti értékhez.

A magyar lottónál a közelítés még nem ilyen jó. A (10.21) szakasz példájának táblája alapján 225 húzás eredményeként a 45,5 várható érték közelítésére 43,785 adódik.

9.16. A Markov-lánc definíciója. Tegyük fel, hogy egy fizikai rendszerrel állunk szemben, melynek lehetséges állapotai egy diszkrét halmazt alkotnak. Jelöljük ezeket az állapotokat az $1, 2, \dots$ számokkal. A rendszer az időben véletlenszerű állapotváltozásokat végez, állapotait a $t = 0, 1, 2, \dots$ időpontokban megfigyeljük. Definíáljuk a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változókat a következő módon: $\xi_n = i$, ha a rendszer a $t = n$ időpontban az i állapotban van. A rendszer állapotváltozásait tehát a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók egyértelműen leírják. ξ_0 a kiinduló állapotot jelzi, amely speciális esetben lehet nem-véletlenszerű is.

A rendszer állapotváltozásainak sorozatát, vagy ami ugyanaz, a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók sorozatát Markov-láncnak nevezzük, ha bármilyen egész értékű $t < t_2 < \dots < t_{n+1}$ időpontok és k_1, k_2, \dots, k_{n+1} állapotok esetén

$$\begin{aligned} P(\xi_{t_{n+1}} = k_{n+1} | \xi_{t_1} = k_1, \dots, \xi_{t_n} = k_n) = \\ = P(\xi_{t_{n+1}} = k_{n+1} | \xi_{t_n} = k_n). \end{aligned} \quad (9.16.1)$$

Ez a feltétel más szóval annyit jelent, hogy a rendszer t_n időpont utáni történetének valószínűségeit egyértelműen meghatározza az az információ, hogy milyen állapotban van a t_n időpontban és ehhez semmilyen, a rendszer korábbi történetéről szóló információ nem szükséges.

1. példa. Független valószínűségi változók részletösszegei. Ha egy pont a számegyenes 0 pontjából kiindulva mindig $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ valószínűséggel megy a szomszédos, egész-értékű pontokba, függetlenül attól, hogy milyen úton jutott oda, ahonnan most továbbmegy, és ξ_n a pont helyzetét jelzi az n -edik lépés után, akkor $0 = \beta_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ MARKOV-láncot alkot. Ha η_1, η_2, \dots független valószínűségi változók, melyek csak a $-1, +1$ értékeket vesznek fel, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ valószínűségekkel, akkor ξ_n előállítható a következő módon:

$$\xi_n = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n, \quad n \geq 1.$$

Általában független valószínűségi változók részletösszegeinek a sorozata mindig MARKOV-lánc. Ugyanis

$$\begin{aligned} P(\xi_{n+1} = k_{n+1} | \xi_1 = k_1, \dots, \xi_n = k_n) &= \\ &= P(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1} = k_{n+1} | \eta_1 + \dots + \eta_1 = k_1, \dots, \eta_1 + \dots + \eta_n = k_n) = \\ &= P(\eta_{n+1} + \dots + \eta_{n+1} = k_{n+1} - k_n | \eta_1 + \dots + \eta_1 = k_1, \dots, \\ &\quad \eta_1 + \dots + \eta_n = k_n) = \\ &= P(\eta_{n+1} = k_{n+1} - k_n) = \\ &= P(\eta_1 + \dots + \eta_{n+1} = k_{n+1} | \eta_1 + \dots + \eta_n = k_n) = P(\xi_{n+1} = k_{n+1} | \xi_n = k_n). \end{aligned}$$

2. példa. Bolyongás visszaverő falak között. Ha az előző példában a bolyongó pont elé a $-K$ és K pontokba visszaverő falakat állítunk, ahonnan a pont 1 valószínűséggel visszafelé halad, akkor szintén MARKOV-láncot kapunk.

3. példa. Legyenek $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ független valószínűségi változók, melyek a $0, 1, 2, \dots, N-1$ értékeket veszik fel, ahol N rögzített szám. Defináljuk a ξ_n valószínűségi változókat rekurzív módon a következő módon:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \eta_0, \\ \xi_{n+1} &= \begin{cases} \xi_n + \eta_n, & \text{ha } \xi_n + \eta_n < N; \\ \xi_n + \eta_n - N, & \text{ha } \xi_n + \eta_n \geq N. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.16.2)$$

Ez az eljárás nem egyéb, mint állandó kerekítés; ha az összeg legalább N nagyságú, N -et rögtön levonunk. Belátható, hogy a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ sorozat MARKOV-láncot alkot.

Ugyancsak MARKOV-láncot alkot a következő sorozat is

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \eta_0, \\ \zeta_{n+1} &= \begin{cases} \xi_n \eta_n, & \text{ha } \xi_n \eta_n < N; \\ \xi_n \eta_n - N, & \text{ha } \xi_n \eta_n \geq N. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.16.3)$$

9.17. Átmenet-valószínűségek. Egy Markov-lánccal kapcsolatban az alábbi valószínűségeket r -lépéses átmenetvalószínűségeknek nevezzük:

$${}_n P_{ik}^{(r)} = P(\xi_{n+r} = k | \xi_n = i). \quad (9.17.1)$$

Ha ${}_n P_{ik}^{(r)}$ független n -től, a Markov-láncot homogénnek nevezzük.

A 3. példában a ξ_n sorozat homogén MARKOV-lánc abban az esetben, ha $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ azonos eloszlásúak, egyébként ξ_n inhomogén. A (9.17.1) valószínűségeket egy mátrixba foglalhatjuk össze, amelyet ${}_n \Pi_r$ -rel jelölünk és az átmenetvalószínűségek mátrixának nevezzük:

$${}_n \Pi_r = ({}_n P_{ik}^{(r)}) = \begin{pmatrix} {}_n P_{11}^{(r)} & {}_n P_{12}^{(r)} & \dots \\ {}_n P_{21}^{(r)} & {}_n P_{22}^{(r)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (9.17.2)$$

Homogén MARKOV-lánc esetén az n index felesleges, ez esetben az átmenetvalószínűségek mátrixát Π_r -rel jelöljük:

$$\Pi_r = \begin{pmatrix} P_{11}^{(r)} & P_{12}^{(r)} & \dots \\ P_{21}^{(r)} & P_{22}^{(r)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (9.17.3)$$

A (9.17.2) mátrix elemei valószínűségek, tehát nem-negatív számok, azonkívül minden sor elemeinek az összege 1-gyel egyenlő, mert

$$\sum_{k=1}^{\infty} {}_n P_{ik}^{(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_{n+r} = k | \xi_n = i) = 1. \quad (9.17.4)$$

Ha egy négyzetes (véges vagy végtelen rendű) mátrix elemei nem-negatív számok, és minden sorban az elemek összege 1-gyel egyenlő, akkor azt sztochasztikus mátrixnak nevezzük. Ha még az is teljesül, hogy az egyes oszlopokban álló elemek összege is 1-gyel egyenlő, akkor a mátrixot kétszeresen sztochasztikusnak nevezzük.

Az Olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy sztochasztikus mátrixok szorzata is sztochasztikus és kétszeresen sztochasztikus mátrixok szorzata kétszeresen sztochasztikus. Az egylépéses átmenetvalószínűségeknél az $r=1$ indexet elhagyjuk, tehát jelöléseink a következők:

$${}_n P_{ik}^{(1)} = {}_n P_{ik}, \quad {}_n \Pi_1 = {}_n \Pi$$

és a homogén esetben

$$P_{ik}^{(1)} = P_{ik}, \quad \Pi_1 = \Pi.$$

Bebizonyítjuk a következő alapvető tételt.

Tétel. Ha az egylépéses átmenetvalószínűségek n -től függetlenek, akkor minden r esetén ugyanez teljesül az r -lépéses átmenetvalószínűségekre is és

$$\Pi_r = \Pi^r, \quad (9.17.5)$$

vagyis az r -lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa egyenlő az egylépéses átmenetvalószínűségek mátrixának r -edik hatványával.

Bizonyítás. Ha B_1, B_2, \dots egy teljes eseményrendszer, továbbá A és C tetszőleges események ($P(B_j|C) > 0, j = 1, 2, \dots$), akkor

$$P(AC) = \sum_{j=1}^{\infty} P(ACB_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_jC)P(B_jC).$$

Mindkét oldalon $P(C)$ -vel osztva, következik, hogy

$$P(A|C) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_jC)P(B_j|C).$$

Végezzük el a következő helyettesítéseket

$$A : \xi_{n+r} = k;$$

$$B_j : \xi_{n+r-1} = j;$$

$$C : \xi_n = i.$$

Figyelembe véve, hogy ξ_n MARKOV-lánc, az alábbi egyenlőségre jutunk:

$${}_nP_{ik}^{(r)} = \sum_{j=1}^{\infty} {}_{(n+r-1)}P_{jk} {}_nP_{ij}^{(r-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} {}_nP_{ij}^{(r-1)} {}_{(n+r-1)}P_{jk}.$$

Ez ekvivalens a következő mátrix-egyenlőséggel:

$${}_nP_r = {}_nP_{(r-1)}\Pi$$

Mivel ${}_n\Pi = \Pi$, az $r=2$ esetben azt kapjuk, hogy minden n -re

$${}_n\Pi_2 = \Pi^2,$$

amely n -től független. Az $r=3$ esetben ennek felhasználásával a

$${}_n\Pi_3 = {}_n\Pi_2\Pi = \Pi^3$$

egyenlőséget kapjuk. Így továbbhaladva, megkapjuk a tétel állítását.

Bár a $\Pi_r = \Pi^r$ formulából nyilvánvalóan következik, mégis megemlítjük, hogy a

$$\Pi^r = \Pi^{r_1}\Pi^{r_2}, \quad r = r_1 + r_2$$

egyenlőséget részletesen kiírva, a következőkre jutunk:

$$P_{ik}^{(r)} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(r_1)} P_{jk}^{(r_2)}. \quad (9.17.6)$$

Ezt az egyenlőséget *Markov-féle egyenlőségnek* nevezzük.

Az átmenetvalószínűségek feltételes valószínűségek. Mindegyik ξ_n valószínűségi változónak van azonban egy abszolút, feltétel nélküli eloszlása. Ezeket a

$$P_k(n) = P(\xi_n = k), \quad k = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.17.7)$$

valószínűségeket *abszolút valószínűségeknek* nevezzük.

9.18. Ergodicitás. Markov tétele. Egy Markov-láncot *ergodikusnak* nevezünk, ha léteznek a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ik}^{(n)} = P_k \quad (9.18.1)$$

határértékek, i -től függetlenül és

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1. \quad (9.18.2)$$

Véges sok állapot esetén az utóbbi feltétel (9.18.1)-ből már következik, végtelen sok állapot esetén azonban külön ki kell

kötnünk, mivel végtelen sok sorozat határértékének az összege általában nem egyenlő összegük határértékével. Az alábbi ergodicitási tételnek alapvető szerepe van a MARKOV-láncok elméletében.

Markov tétele. Egy véges sok állapotú homogén Markov-lánc akkor és csak akkor ergodikus, ha az átmenetvalószínűségek

$$\Pi = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{N1} & P_{N2} & \dots & P_{NN} \end{pmatrix} \quad (9.18.3)$$

mátrixának van olyan Π^v hatványa, amelynek legalább egy oszlopában minden elem pozitív. A P_k határértékhez való konvergencia sebessége exponenciális, pontosabban

$$|P_{ik}^{(n)} - P_k| \leq (1 - N_1 \delta)^{\frac{n}{v}-1} \quad (9.18.4)$$

ahol N_1 a Π^v mátrix pozitív elemeket tartalmazó oszlopainak száma; δ pedig az ezekben az oszlopokban álló elemek legkisebbike. (Nyilvánvaló, hogy $0 < N_1 \delta \leq 1$.)

Bizonyítás. Ha a MARKOV-lánc ergodikus, akkor

$$\Pi^n \rightarrow \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_N \\ P_1 & P_2 & \dots & P_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_1 & P_2 & \dots & P_N \end{pmatrix},$$

ahol az egy sorban álló elemek összege 1. Következésképpen legalább egy $P_k > 0$. Ekkor azonban elegendő nagy n esetén Π^n k -adik oszlopában minden elemnek határozottan pozitívnak kell lennie.

Kevésbé egyszerű a fordított állítás bizonyítása. Jelölje $M_j^{(r)}$, ill. $m_j^{(r)}$ a Π^r mátrix j -edik oszlopában álló elemek maximumát, ill. minimumát:

$$M_j^{(r)} = \max_{1 \leq i \leq N} P_{ij}^{(r)};$$

$$m_j^{(r)} = \min_{1 \leq i \leq N} P_{ij}^{(r)}.$$

A MARKOV-féle egyenlőség alapján

$$M_j^{(r+1)} = \max_{1 \leq i \leq N} P_{ij}^{(r+1)} = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N P_{ik} P_{kj}^{(r)} \leq \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N P_{ik} M_j^{(r)} = M_j^{(r)},$$

$$m_j^{(r+1)} = \min_{1 \leq i \leq N} P_{ij}^{(r+1)} = \min_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N P_{ik} P_{kj}^{(r)} \geq \min_{1 \leq i \leq N} \sum_{k=1}^N P_{ik} m_j^{(r)} = m_j^{(r)},$$

tehát

$$m_j^{(1)} \leq m_j^{(2)} \leq \dots \leq M_j^{(2)} \leq M_j^{(1)} \quad (9.18.5)$$

$$M_j^{(1)} - m_j^{(1)} \geq M_j^{(2)} - m_j^{(2)} \geq \dots$$

Vizsgáljuk a Π^v -mátrix a -dik és b -edik sorait, és jelölje \sum_k^+ ill. \sum_k^- azokra a k indexekre vonatkozó összegezést, amelyekre teljesül a

$$P_{ak}^{(v)} \geq P_{bk}^{(v)},$$

ill. a

$$P_{ak}^{(v)} < P_{bk}^{(v)}$$

egyenlőtlenség. Mivel Π^v minden sorának elemei 1 összeget adnak, következik, hogy

$$\sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) + \sum_k^- (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) = \sum_{k=1}^N P_{ak}^{(v)} - \sum_{k=1}^N P_{bk}^{(v)} = 1 - 1 = 0,$$

tehát

$$\sum_k^- (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) = - \sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}).$$

Rögzített a és b esetén jelölje s azoknak a k indexeknek a számát, amelyek egyrészt a Π^v mátrix pozitív elemeket tartalmazó oszlopainak indexei, másrészt pedig a \sum^+ összegezésben előfordulnak. Ekkor

$$\sum_k^+ P_{bk}^{(v)} \geq s\delta,$$

továbbá

$$1 - \sum_k^+ P_{ak}^{(v)} \geq (N_1 - s)\delta.$$

E két egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) \leq 1 - (N_1 - s)\delta - s\delta = 1 - N_1\delta.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} M_j^{(r+1)v} - m_j^{(r+1)v} &= \max_{1 \leq a \leq N} \sum_{k=1}^N P_{ak}^{(v)} P_{kj}^{(rv)} - \\ &- \min_{1 \leq b \leq N} \sum_{k=1}^N P_{bk}^{(v)} P_{kj}^{(rv)} = \max_{a, b} \sum_{k=1}^N (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) P_{kj}^{(rv)} = \\ &= \max_{a, b} \left\{ \sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) P_{kj}^{(rv)} + \sum_k^- (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) P_{kj}^{(rv)} \right\} \leq \\ &\leq \max_{a, b} \left\{ \sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) M_j^{(rv)} + \sum_k^- (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) m_j^{(rv)} \right\} = \\ &= \max_{a, b} \sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) (M_j^{(rv)} - m_j^{(rv)}) \leq (1 - N_1\delta) (M_j^{(rv)} - m_j^{(rv)}). \end{aligned}$$

Ezt tovább folytatva, azt kapjuk, hogy

$$M_j^{(r+1)v} - m_j^{(r+1)v} \leq (1 - N_1\delta)^r (M_j^{(v)} - m_j^{(v)}). \quad (9.18.6)$$

Mivel $1 - N_1\delta < 1$, ebből már (9.18.5) alapján következik, hogy létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} M_j^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} m_j^{(n)} = P_j$$

határérték.

Be kell még bizonyítanunk a (9.18.4) formulát. Ehhez előbb megjegyezzük, hogy minden a és b esetén

$$P_{aj}^{(v)} - P_{bj}^{(v)} \leq \sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}),$$

tehát

$$M_j^{(v)} - m_j^{(v)} = \max_{a, b} (P_{aj}^{(v)} - P_{bj}^{(v)}) \leq \max_{a, b} \sum_k^+ (P_{ak}^{(v)} - P_{bk}^{(v)}) \leq 1 - N_1\delta.$$

Ezt (9.18.6)-tal kombinálva azt kapjuk, hogy minden pozitív egész r esetén

$$M_j^{(rv)} - m_j^{(rv)} \leq (1 - N_1\delta)^r. \quad (9.18.7)$$

Legyen mármost n tetszőleges egész szám. Ekkor van olyan r , hogy

$$rv \leq n < (r+1)v$$

A (9.18.5)-ből és (9.18.7)-ből az adódik, hogy

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq M_j^{(rv)} - m_j^{(rv)} \leq (1 - N_1\delta)^r \leq (1 - N_1\delta)^{\frac{n}{v}-1}. \quad (9.18.8)$$

Mivel pedig

$$m_j^{(n)} \leq P_{ij}^{(n)} \leq M_j^{(n)};$$

$$m_j^{(n)} \leq P_j \leq M_j^{(n)};$$

fennáll a

$$|P_{ij}^{(n)} - P_j| \leq M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \quad (9.18.9)$$

egyenlőtlenség is. (9.18.8) és (9.18.9) együtt megadja a (9.18.4) egyenlőtlenséget. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

9.19. Megjegyzések Markov tételéhez.

1. *megjegyzés.* Az ergodicitás feltétele szemléletesen azt jelenti, hogy van olyan v lépésszám és legalább egy olyan állapot, melybe v lépéssel minden más állapotból pozitív valószínűséggel eljuthatunk. Természetesen olyan eset is előfordul, amikor van olyan v , hogy $P_{ik}^{(v)} > 0$ minden i és k esetén. MARKOV eredetileg csak azt bizonyította be, hogy az ergodicitás fennáll, ha ez a feltétel teljesül. Ezt az 1906-ból származó tételt később mások élesítették, a most bebizonyított tételt azonban továbbra is MARKOV tételének nevezzük.

2. *megjegyzés.* Az ergodicitás azt jelenti, hogy akármilyen i állapotból indulunk is ki, nagyszámú lépés esetén i -től függetlenül P_k valószínűséggel lesz a rendszer a k állapotban. Várható tehát, hogy a $P_k(n)$ abszolút valószínűség is P_k -hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. Ez így is van, ui. a teljes valószínűség tétele alapján

$$P_k(n) = \sum_{i=1}^N P_i(0) P_{ik}^{(n)} \quad (9.19.1)$$

és ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$P_k(n) \rightarrow \sum_{i=1}^N P_i(0) P_k = P_k.$$

3. megjegyzés. A MARKOV-féle egyenlőség szerint

$$P_{ik}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N P_{ij}^{(n)} P_{jk}.$$

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor tehát azt kapjuk, hogy

$$P_k = \sum_{j=1}^N P_j P_{jk}. \quad (9.19.2)$$

Ez a P_1, P_2, \dots, P_N valószínűségekre egy egyenletrendszer szolgáltat. Bebizonyítjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek csak egy olyan N számból álló megoldásrendszere van, melynek összege 1, pontosabban ha Q_1, Q_2, \dots, Q_N N olyan valószínűség, hogy teljesülnek a

$$Q_k = \sum_{j=1}^N Q_j P_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (9.19.3)$$

$$\sum_{j=1}^N Q_j = 1 \quad (9.19.4)$$

feltételek, akkor $Q_k = P_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Szorozzuk meg (9.19.3) mindkét oldalát P_{km} -mel, és összegezzünk k -ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Q_m &= \sum_{k=1}^N Q_k P_{km} = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N Q_j P_{jk} P_{km} = \\ &= \sum_{j=1}^N Q_j \sum_{k=1}^N P_{jk} P_{km} = \sum_{j=1}^N Q_j P_{jm}^{(2)}. \end{aligned}$$

Ezt az eljárást tovább folytatva, minden n pozitív egész szám esetén fennáll a

$$Q_k = \sum_{j=1}^N Q_j P_{jk}^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

egyenlőség. Elvégezve az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet, és figyelembe véve (9.19.4)-et, végül azt kapjuk, hogy

$$Q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N Q_j P_{jk}^{(n)} = \sum_{j=1}^N Q_j P_k = P_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

amivel az állítást bebizonyítottuk. A (9.19.2) egyenletrendszer megoldása általában egyszerűsíti a P_k valószínűségek meghatározását.

4. megjegyzés. Ha az egy lépéses átmenetvalószínűségek mátrixa kétszeresen sztochasztikus, és a MARKOV-lánc ergodikus, akkor a Π^n , ennél fogva a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n$$

mátrix is kétszeresen sztochasztikus. Így a mátrix minden oszlopa elemeinek az összege 1, mivel pedig a k -adik oszlop minden eleme P_k , tehát

$$P_k = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Más szóval: a határeloszlás egyenletes az $1, 2, \dots, N$ számokon.

9.20. Egy víztárolókkal kapcsolatos probléma. Egyes ipari létesítmények (pl. hőerőművek) vízellátásának biztosítására víztárolókat használnak. A tárolót egy folyó vizével táplálják, mely túlfolyik, ha a tároló megtelt. Időnként a tárolóból bizonyos mennyiségű vizet elhasználnak, miközben előfordulhat az is, hogy a tároló kiürül, vagy kevesebb víz van, mint kel-

lene. Ezért a tárolók víztartalma valószínűségeloszlásának és ezen keresztül a valamilyen értelemben vett optimális méret meghatározása igen fontos feladat. Nem célunk, hogy ebbe az irodalomban elég sokoldalúan tárgyalt kérdéskörbe részletesen belemenjünk, ezért csupán a legegyszerűbb modell tárgyalásával foglalkozunk, mely bizonyos esetekben elég jól megközelíti a valóságot és alkalmas a MARKOV-láncok elmélete gyakorlati alkalmazásának illusztrálására.

Jelölje K a tároló köbtartalmát. Az egész folyamatot éves periódusokra bontjuk és feltesszük, hogy minden évben azonos M ($M < K$) mennyiségű vizet veszünk ki a tárolóból. Feltesszük továbbá, hogy a folyó minden évben bizonyos véletlen mennyiségű vizet hoz, a t -edik évben ξ_t -t és ez az M mennyiségű víz kivételének kezdete előtt teljesen (ill. gyakorlati szempontból lényegében teljesen) befejeződik. A ξ_1, ξ_2, \dots valószínűségi változókról feltesszük, hogy függetlenek, diszkrét és azonos eloszlásúak, lehetséges értékeik a $0, 1, 2, \dots$ egész számok, melyeket a

$$p_i = P(\xi_t = i), \quad i = 1, 2, \dots$$

valószínűségekkel veszi fel. M és K legyenek szintén egész számok, a ξ_t -kel együtt egy és ugyanazon egység többszörösei. Jelölje ζ_t a tárolóban a t -edik év végén levő víz mennyiségét. ζ_0 , az induló vízmennyiség lehet állandó, vagy egy tetszőleges eloszlású valószínűségi változó. ζ_{t+1} a következő módon fejezhető ki:

$$\zeta_{t+1} = \max \{ \min(\zeta_t + \xi_{t+1}, K) - M, 0 \}. \quad (9.20.1)$$

A $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ valószínűségi változók homogén MARKOV-láncot alkotnak, rögzített ζ_t esetén ugyanis a folyamat jövője független a múltjától, másrészt a homogenitást biztosítja az, hogy a ξ_t -k függetlenek és azonos eloszlásúak. ζ_t lehetséges értékei a $0, 1, \dots, K-M$ számok. Igen egyszerű megfontolással a

$$P_{ij} = P(\zeta_{t+1} = j | \zeta_t = i)$$

átmenetvalószínűségekre a következő kifejezések adódnak:

$$\left. \begin{aligned} P_{0,0} &= p_0 + \dots + p_M, \\ P_{0,1} &= p_{M+1}, \\ &\vdots \\ P_{0,K-M-1} &= p_{K-1}, \\ P_{0,K-M} &= p_K + p_{K+1} + \dots, \\ P_{1,0} &= p_0 + \dots + p_{M-1}, \\ P_{1,1} &= p_M, \\ &\vdots \\ P_{1,K-M-1} &= p_{K-2}, \\ P_{1,K-M} &= p_{K-1} + p_K + \dots, \\ &\vdots \\ P_{M,0} &= p_0, \\ P_{M,1} &= p_1, \\ &\vdots \\ P_{M,K-M-1} &= p_{K-M-1}, \\ P_{M,K-M} &= p_{K-M} + p_{K-M+1} + \dots, \\ P_{M+1,0} &= 0, \\ P_{M+1,1} &= p_0, \\ &\vdots \\ P_{M+1,K-M-1} &= p_{K-M-2}, \\ P_{M+1,K-M} &= p_{K-M-1} + p_{K-M} + \dots, \\ &\vdots \\ P_{K-M,0} &= 0, \\ P_{K-M,1} &= 0, \\ &\vdots \\ P_{K-M,K-M-1} &= p_{M-1}, \\ P_{K-M,K-M} &= p_M + p_{M+1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.20.2)$$

feltéve, hogy $M < K - M$. (Az $M \equiv K - M$ esetben az átmenetvalószínűségek kissé módosulnak.)

Ha a p_M, p_{M+1}, \dots valószínűségek közül legalább az egyik pozitív, másszóval, ha $P(\xi_i \equiv M) > 0$, akkor a $\Pi = (P_{i,k})$ mátrixnak már az első hatványában is találunk csak pozitív elemet tartalmazó oszlopot; ilyen tulajdonságú ugyanis az utolsó, $K-M$ -edik oszlop. Eszerint a Markov-lánc ergodikus. A P_0, P_1, \dots, P_{K-M} határeloszlást a

$$\sum_{i=0}^{K-M} P_i P_{i,j} = P_j, \quad j = 0, 1, \dots, K-M,$$

$$\sum_{i=0}^{K-M} P_i = 1 \quad (9.20.3)$$

egyenletekből egyértelműen meghatározhatjuk. Érdemes megjegyezni, hogy a P_j valószínűségek nem függenek külön-külön a p_K, p_{K+1}, \dots valószínűségektől, hanem csak ezek összegétől, minthogy az átmenetvalószínűségek mátrixában is csak az összegük szerepel.

Konkrét probléma esetén a (9.20.3) egyenletek megoldása elektronikus számítógéppel történhet. A számítás csökkentése érdekében célszerű 1 m^3 helyett alkalmas nagy egységet választani, hogy $K-M$ ne legyen túl nagy. Az egység nagyon nagy, azonban nem választható, mert ξ_i értékeit is eszerint választjuk és a modell pontatlanná válik. A P_j valószínűségek közelítésére a Π mátrix hatványai is alkalmasak és hogy a hatványozásban meddig kell elmennünk, arra a (9.18.4) egyenlőtlenség ad felvilágosítást.

9.21. Feladatok. 1. Jelölje ξ_n a 9.16. szakasz 2. példájában a bolyongó pont helyzetét az n -edik lépés után. Legyen K páratlan és definiáljuk az η_n újabb MARKOV-láncot a következő módon: $\eta_n = \frac{\xi_{2n}}{2}$. Írjuk fel η_n átmenetvalószínűség-mátrixát. Ha $K = 2R + 1$, akkor célszerű az állapotokat most a szokásostól eltérően a $-R, \dots, R$ számokkal jelölni. Bizonyítsuk be, hogy a MARKOV-lánc ergodikus és a határeloszlás egyenletes.

2. Írjuk fel a 9.16. szakasz 4. példájában szereplő ξ_n MARKOV-lánc átmenetvalószínűség-mátrixát, mondjuk a $P(\eta_n = i) = p_i, i = 0, 1, \dots, N-1$ jelölések felhasználásával.

Nagyon kevés feltétel is elegendő már ahhoz, hogy a MARKOV-lánc ergodikus legyen. Elegendő pl., ha $p_i > 0, i = 0, \dots, N-1$. Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben a MARKOV-lánc valóban ergodikus és a határeloszlás egyenletes a $0, 1, \dots, N-1$ számokon.

3. Legyen ξ_0, ξ_1, \dots egy kétállapotú homogén MARKOV-lánc, ξ_i csak 0-val, vagy 1-gyel lehet egyenlő (ilyen pl. egy véletlenszerűen működő gép működésének és állásának a folyamata; 1-et írunk, ha működik, 0-t, ha áll). Az átmenetvalószínűségek mátrixa legyen a következő

$$\begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix},$$

ahol $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1$. Ebből rögtön következik, hogy a MARKOV-lánc ergodikus. Határozzuk meg a P_0, P_1 határeloszlást.

4. Az előző feladathoz csatlakozva bizonyítsuk be, hogy

$$P_1(n) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + (1 - \lambda - \mu)^n \left(P_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right),$$

$$P_0(n) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + (1 - \lambda - \mu)^n \left(P_0(0) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right).$$

5. Határozzuk meg ξ_i és ξ_j korrelációs együtthatóját és a nagy számok törvényének BERNSTEIN-féle változatára támaszkodva bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

6. Válasszunk egy számot a $(0, 1)$ intervallumból egyenletes eloszlás szerint. Az n -edik pozícióban álló számjegyet $f_n(x)$ -szel jelölve, a 3.20 szakasz 11. feladata szerint az $f_1(x), f_2(x), \dots$ valószínűségi változók függetlenek. Legyen

$$\varepsilon_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } f_n(x) = 4, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mivel $\varepsilon_n(x)$ függvénye az $f_n(x)$ valószínűségi változónak, $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots$ függetlenek. Bizonyítsuk be ezt az állítást közvetlenül az $f_n(x)$ -ek felhasználása nélkül. A nagy számok erős törvénye alapján bizonyítsuk be továbbá, hogy

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \dots + \varepsilon_n(x)}{n} = \frac{1}{10} \right) = 1.$$

Eszerint 1 annak a valószínűsége, hogy a $(0, 1)$ intervallumból találomra

kiválasztott szám első n tizedesjegye között levő 4-esek száma n -nel osztva $\frac{1}{10}$ -hez tart. Ugyanez természetesen vonatkozik a 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9 számokra is.

7. Általánosítsuk a 6. feladatot arra az esetre, amikor a számokat az r -es számrendszerben fejtjük ki, ahol $r \geq 2$.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ karakterisztikus függvénye $\varphi(t)$, akkor $a\xi + b$ karakterisztikus függvénye $e^{ibt}\varphi(at)$, ahol a és b valós állandók.

9. Legyen ξ_λ POISSON-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Bizonyítsuk be a karakterisztikus függvény felhasználásával, hogy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) = \Phi(x).$$

10. Mutassuk meg, hogy ha ξ_1, ξ_2, \dots függetlenek és CAUCHY-eloszlásúak, közös sűrűségfüggvényük $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, akkor erre a sorozatra nem érvényes a nagy számok törvénye, mert az

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

sorozat nem konvergál sztochasztikusan semmilyen konstanshoz. Mutassuk meg továbbá, hogy $\sqrt{n}\eta_n$ -nek nincs határeloszlása, tehát a ξ_1, ξ_2, \dots sorozatra nem teljesül a centrális határeloszlástétel sem.

A MATEMATIKAI STATISZTIKA ELEMEI

A statisztikai sokaság

A mintavétel

A minta eloszlása

Statisztikai becslések

Konfidencia-intervallumok

Statisztikai próbák

A χ^2 próbák

Regressziók

Mintavétel véges sokaságból

10.1. A statisztikai sokaság fogalma. Statisztikai vizsgálatot mindig bizonyos egyedek meghatározott kategóriájában végzünk, miközben ezeknek az egyedeknek egy (vagy több) numerikus jellemző adatáról akarunk részleges vagy teljes információt szerezni. Egyszerűség kedvéért egyelőre tételezzük fel, hogy minden egyedhez csak egy numerikus jellemző adat tartozik, ill. csak egy ilyen adat iránt érdeklődünk. Ekkor tehát adott számunkra egy halmaz, az egyedek összessége és az ezekhez tartozó számértékek összessége, vagyis egy függvény az egyedek halmazán.

A statisztikai vizsgálat tárgyát képező egyedek összességét a megfelelő számértékekkel együtt statisztikai sokaságnak nevezzük.

Egy klasszikus példa statisztikai sokaságra a következő: bizonyos termékek összességén belül a minőséget akarjuk ellenőrizni. Minden egyes termékhez tartozik egy számérték (pl. hengerek átmérője), melyet vizsgálunk. A termékeknek ez az összessége, halmaza, a megfelelő számértékekkel együtt statisztikai sokaságot alkot. Gyakran előfordul olyan eset is, amikor az egyes termékekkel kapcsolatban nem mennyiségi, hanem minőségi ismeret érdekel bennünket, pl., hogy egy termék selejt-e vagy sem. Ekkor azonban megtehetjük azt, hogy egy termékhez 1-et, ill. 0-t rendelünk aszerint, hogy selejt-e vagy sem, és így a vizsgálatot máris numerikus jellemzők vizsgálatára vezettük vissza.

Egy másik példa statisztikai sokaságra egy szénőrlemény szemcséinek az összessége, az egyes szemcsékhez hozzá tartozó súlyokkal együtt.

A fenti példákban a sokaság elképzelése különösebb nehézséget nem okoz, a sokaság egyedei szemünk előtt vannak, fizikailag léteznek. Vannak azonban más természetű sokaságok is, amelyeknél az egyedeket csupán képzeletben gyűjtjük össze. Ezekre az jellemző, hogy vizsgálataink során közülük bármelyik realizálódhat, bár lehetséges, hogy egyesekre soha nem kerül sor. Ha pl. egy folyó havi (mondjuk júniusi) vízhozamát vizsgáljuk, akkor a lehetséges vízhozamok, vagyis egy alsó és felső határ közti valós számok összessége alkotja a sokaságot, ezek közül azonban még többszöri vizsgálat során is természetesen csak véges sok valósul meg. A sokaság elemeihez tartozó számértékek itt összeesnek a sokaság elemeit meghatározó számértékekkel. Bár ez a megkülönböztetés fölöslegesnek tűnik, mégis célszerű, egyrészt a statisztikai sokaság egységes definíciója érdekében, másrészt matematikai okokból. A sokaság elemeihez tartozó számértékek ui. egy függvényt értelmeznek, melynek egy újabb függvényét (pl. logaritmusát, négyzetét stb.) vehetjük, amit egyébként a sokaság egyedeinek megváltoztatása nélkül nem tehetnénk meg. Ugyanilyen értelemben képzeletbeli sokaságot alkotnak egy fizikai mérés lehetséges végeredményei, egy búzatábla adott évi lehetséges terméseredményei stb.

Ha vizsgálatunkban ugyanazok az egyedek szerepelnek, de más számértékek iránt érdeklődünk, akkor más statisztikai sokasággal állunk szemben. Ez a statisztikai sokaság definíciójából következik. Matematikai szempontból nézve az egyedek természete tulajdonképpen lényegtelen, a megfelelő számértékek azok, amelyekre figyelmünket koncentrálnunk.

A statisztikai sokaság tartalmazhat véges vagy végtelen sok elemet. Az előbbi kategóriába tartozik a minőségellenőrzéssel kapcsolatban említett sokaság, az utóbbira példa egy fizikai mérés végeredményeiből alkotott sokaság. Bár a mérési pontosság minden határon túl nem fokozható, és így gyakorlatilag mindig csak véges sok lehetséges mérési eredmény jön számításba, matematikailag egyszerűsítést jelent, ha a sokaságot végtelennek tekintjük, mintsem igen sok egymáshoz közel álló mérési eredményt tartunk számon.

10.2. A statisztikai sokaság eloszlása. Tekintsük azt a kísérletet, mely a sokaság egy elemének véletlenszerű kiválasztásában áll. Konkrét gyakorlati problémák esetén mindössze egy elem kiválasztásával semmilyen lényeges információt nem kaphatunk, most azonban ennek a fiktív kísérletnek a tárgyalásával nem is ez a célunk, csupán egy fogalmat kívánunk bevezetni. Egyes esetekben a kiválasztás automatikusan megvalósul, azaz nem rajtunk múlik, a kiválasztás tehát tulajdonképpen megfigyelést jelent. Erről van szó pl. egy folyó vízhozamának a vizsgálatakor. Az ilyen esetekben egyben adott egy, a sokaság A részhalmazain értelmezett $P(A)$ valószínűségeloszlás is, ahol $P(A)$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott egyed eleme az A halmaznak. Tulajdonképpen kiválasztás csak véges sokaság esetén fordul elő. Ez esetben tegyük fel, hogy minden egyed egyenlő valószínűséggel kerül kiválasztásra,¹³ ami ekvivalens azzal, hogy ha a sokaság egyedeinek a száma N és a sokaság A részhalmaza k számú egyedet tartalmaz, akkor k/N annak a valószínűsége, hogy az A részhalmazból választunk.

Egy elem kiválasztása egy halmazból matematikai szempontból pontosan azt jelenti, hogy a szóban forgó halmaz részhalmazain egy valószínűségeloszlást értelmezünk.

A mondottak alapján tehát a statisztikai sokaság valószínűségi mezővé, az egyedeken értelmezett számértékekből felépülő függvény pedig egy ξ valószínűségi változóvá lesz. Ennek a ξ valószínűségi változónak az eloszlását a *statisztikai sokaság eloszlásának* nevezzük.

Véges sokaság esetén a sokaság eloszlása egyben az egyedekhez tartozó számértékek százalékos megoszlását szolgáltatja és megfordítva. Ezt a százalékos megoszlást közelíthetjük valamely ismert valószínűségeloszlással, de függetlenül attól, hogy ezt megteesszük-e vagy sem, a százalékos összetétel mindenképpen felfogható valószínűségeloszlásként. Ilyen értelemben mond-

¹³ Nem akarjuk ezzel azt mondani, hogy véges sokaság esetén mindig ilyen kiválasztást kell alkalmaznunk. Ilyen kiválasztásról azonban mindig beszélhetünk és ezt most csupán egy fogalom bevezetése érdekében tesszük.

juk pl. azt, hogy Magyarországon a munkás és alkalmazott családok egy főre eső jövedelme lognormális eloszlású.

Vannak olyan esetek is, amikor minden egyedhez több jellemző adat tartozik. Pl. minden emberrel kapcsolatban beszélhetünk a testsúlyról és a testmagasságról vagy esetleg még más adatokról. Rögzítve ezek számát és sorrendjét, a ξ valószínűségi változó helyét egy $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ valószínűségi vektorváltozó foglalja el. Ekkor többdimenziós sokaságról beszélünk, és a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ valószínűségi változók együttes eloszlását nevezzük a *sokaság eloszlásának*.

A MINTAVÉTEL

Statisztikai vizsgálatot egy vagy több sokaság eloszlására, ill. eloszlásaira vonatkozó teljes vagy részleges információ szerzése érdekében végzünk. Lehetséges, hogy a sokaság eloszlását, de lehetséges, hogy ennek csak egyes paramétereit (várható érték, szórás stb.) akarjuk meghatározni. Ezeken kívül vannak egyéb kérdések is, mint a későbbiekben majd látjuk.

10.3. A mintavétel. Ahhoz, hogy ezekre a kérdésekre választ adhassunk, a sokaságból ún. *mintát* veszünk. A mintavétel a sokaság n számú elemének véletlenszerű kiválasztásából áll. Jelöljük

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (10.3.1)$$

a kiválasztott elemekhez tartozó számértékeket a kiválasztás sorrendjében. A kiválasztás minden egyes lépésben véletlenszerű, ezért bár mindig n konkrét számot kapunk, kaphattunk volna másokat is, emiatt tehát x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók.

Kiválaszthatunk visszatevéssel és visszatevés nélkül. Az előbbi esetben minden egyes elem kiválasztása után a kiválasztott elemet a sokaságba visszatesszük, a sokaság összetétele tehát a következő kiválasztás során az előző választásoktól független. Ha még azt is feltesszük, hogy a kiválasztás minden egyes

lépésben ugyanolyan terv szerint megy végbe, akkor a (10.3.1) valószínűségi változók nemcsak függetlenek, hanem azonos eloszlásúak is, mégpedig eloszlásuk megegyezik a ξ valószínűségi változó eloszlásával.

Egyes esetekben sem kiválasztásra, sem visszatevésre nincs szükség; az a kísérlet, melynek eredményei a ξ valószínűségi változó különböző értékeit szolgáltatják, többször egymás után, egymástól függetlenül reprodukálódik. n számú kísérlet esetén ekkor is n egymástól független és ξ -vel megegyező eloszlású valószínűségi változót kapunk.

Ha a kiválasztás visszatevés nélküli, akkor a 3.19. szakasz szerint az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók azonos eloszlásúak ugyan, eloszlásuk megegyezik ξ eloszlásával, sőt ekvivalensek is, azonban nem mindig függetlenek. Minden egyes elem kiválasztása ui. megváltoztatja a sokaság összetételét. Két speciális esetben azonban az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók függetlenek, ill. függetleneknek tekinthetők, mégpedig:

1. Ha a sokaság folytonos eloszlású, akkor ui. véges sok elem kiválasztása után annak a valószínűsége, hogy a következő elem kiválasztásával kapott számérték az előbbiek valamelyike, 0-val egyenlő, x_1, x_2, \dots, x_n tehát függetlenek;

2. ha a sokaságban minden érték olyan nagy számban fordul elő, hogy relative kevés számú elem kiválasztása az egyes számértékek százalékos összetétele szempontjából elhanyagolható, ekkor x_1, x_2, \dots, x_n függetleneknek tekinthetők.

Az első esetben a sokaság szükségképpen végtelen, a második esetben pedig végtelennek tekinthető.

Bár elképzelhető olyan végtelen sokaság is, amelyben egy elem kiválasztása a sokaság összetételét lényegesen megváltoztatja, a gyakorlatban ilyen nem fordul elő. Ezért azt mondhatjuk, hogy a (10.3.1) valószínűségi változók függetlenek, ha:

1. A mintavétel visszavetéses, vagy általánosabban fogalmazva x_1, x_2, \dots, x_n egy kísérlet n -szeri független végrehajtása során keletkezett;

2. a sokaság végtelen.

A 10.27. szakaszban látni fogjuk, hogy milyen esetekben tekinthető egy véges sokaság gyakorlatilag végtelennek, milyennek kell lennie a minta elemszáma és a sokaság elemszáma arányának ahhoz, hogy a (10.3.1) valószínűségi változókat függetleneknek tekinthessük. A 10.27 és a 10.28. szakaszoktól eltekintve azonban e fejezetben mindenütt feltételezzük, hogy x_1, x_2, \dots, x_n független valószínűségi változók.

10.4. Az n -elemű minta. Az egymástól független és ξ -vel megegyező eloszlású x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók összességét n -elemű mintának nevezzük. Ha ξ eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor azt mondjuk, hogy x_1, x_2, \dots, x_n egy, az $F(x)$ eloszlású sokaságból vett (n -elemű véletlen) minta. Az x_i valószínűségi változókat mintabeli változóknak vagy mintaelemeknek nevezzük.

A mintában szereplő valószínűségi változók egy konkrét mintavétel esetén n számú numerikus adatot szolgáltatnak. Rendezzük el ezeket nagyság szerint, előre véve a legkisebbet. Ha ezt az elrendezést minden konkrét esetben — legalábbis gondolatban — elvégezzük, ezáltal n számú újabb valószínűségi változót konstruáltunk. Jelöljük ezeket

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$$

A konstrukció következtében x_1^* nem kisebb, mint x_2^* , x_2^* nem kisebb, mint x_3^* , s. i. t.

Az $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$ valószínűségi változók összességét n -elemű rendezett mintának nevezzük.

A többdimenziós sokaság esetén egy n -elemű minta rn számú valószínűségi változóból áll, ezeket az alábbi sémába rendezzük el:

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{rn} \end{array} \quad (10.4.1)$$

Az egyes sorokból alkotott $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri})$, $i=1, 2, \dots, n$ valószínűségi vektorváltozók függetlenek, azonos eloszlásúak, eloszlásuk megegyezik a $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásával. A k -adik oszlop valószínűségi változó egy, a ξ_k valószínűségi változóval kapcsolatos n elemű mintát alkotnak.

10.5. A statisztikai következtetésről. A mintavétel célja, hogy valamit megismerjünk, valamire következtessünk. A statisztikai következtetések sémája megegyezik a logikai következtetések sémájával, azzal a különbséggel, hogy a következményt nem logikai bizonyossággal állítjuk, hanem csak valamilyen, általában 1-hez közel álló valószínűséggel. Ebből következik, hogy adott esetben tévedhetünk is. Ha pl. valamit 95% valószínűséggel állítunk, akkor átlagban minden 100 eset közül 5 esetben tévedünk; a bizonytalanság 5%. A bizonytalanság valószínűségét általában tetszés szerint csökkenthetjük, ez azonban többnyire azzal a veszteséggel jár, hogy állításunk kevésbé értékessé válik. Következtetési módszereinket tehát e két ellentétes tendencia szabályozza.

A statisztikai módszereket két csoportba soroljuk, vannak *paraméteres és nem-paraméteres módszerek*. Az előbbi csoportba azok tartoznak, melyekben a sokaság eloszlásának típusa (pl. normális, POISSON-stb.) ismeretes, csupán az eloszlás analitikus kifejezésében szereplő véges sok paraméter konkrét értéke ismeretlen. Az eloszlás típusát vagy elméleti úton határozzuk meg (pl. véletlen eseményfolyamatokkal kapcsolatban bebizonyítottuk, hogy adott időintervallumban bekövetkező események száma bizonyos feltételek mellett POISSON-eloszlású, vagy utaltunk arra, hogy a központi határeloszlástétel biztosítja a mérési eredménynek, mint valószínűségi változónak azt a tulajdonságát, hogy normális eloszlású stb.), vagy pedig sok hasonló esetben végzett numerikus vizsgálat alapján tekintjük ismertnek. A nem-paraméteres módszerek esetén a sokaság eloszlására ilyen jellegű feltevessel nem élünk.

Első közelítésében a statisztikai tevékenységeket jellegük szerint három csoportba sorolhatjuk: *leírás, analízis, jóslás (extra*

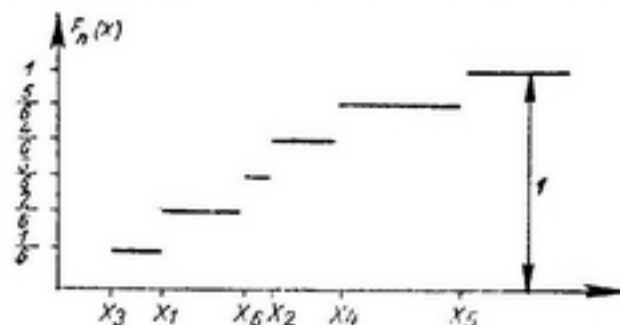
poláció). A leírás a mintában szereplő adatok elrendezésében, csoportosításában áll, és az a célja, hogy áttekintést adjon a rendelkezésre álló adathalmazról. Az analízis minden olyan módszer gyűjtőneve, mellyel a sokaság eloszlására következtetünk. Végül a jóslás elsősorban azokat a módszereket foglalja magában, amelyekkel egyes valószínűségi változók alapján további valószínűségi változók értékeire következtetünk. Éles határvonalat e három csoport között azonban nem vonhatunk.

A MINTA ELOSZLÁSA

10.6. Empirikus eloszlás. Tekintsünk egy x_1, x_2, \dots, x_n n -elemű mintát, és jelölje $F(x)$ a sokaság eloszlásfüggvényét. Az x_1, x_2, \dots, x_n értékek a számegyenesen véletlenszerűen helyezkednek el, minden konkrét esetben azonban kapunk n meghatározott pontot. Ha az így kapott pontok mindegyikéhez hozzárendelünk $\frac{1}{n}$ valószínűséget, akkor egy diszkrét valószínűségeloszlást kapunk, melyet *empirikus eloszlásnak* nevezünk. Az ehhez tartozó eloszlásfüggvényt (l. az 56. ábrát) $F_n(x)$ -szel jelölve, nyilvánvaló, hogy

$$F_n(x) = \frac{v_x}{n}, \quad (10.6.1)$$

ahol v_x azoknak az x_i -knek a száma, melyek x -nél kisebbek.



56. ábra

Az empirikus eloszláshoz tartozó jellemző adatokat empirikus jellemző adatoknak nevezzük. Ezek közül legfontosabbak az empirikus várható érték és az empirikus szórásnégyzet, melyeket \bar{x} , ill. s^2 jelöl:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (10.6.2)$$

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}. \quad (10.6.3)$$

A k -adik empirikus momentum képlete:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Analóg módon nyerjük a többi empirikus momentum (centrális, abszolút, centrális abszolút) képletét is. Ugyanilyen értelemben beszélünk *empirikus mediánról*, *terjedelemről* stb. Az előbbi páratlan n esetén a nagyság szerint rendezett x_i -k közül a középsővel, páros n esetén a két középső számtani átlagával egyenlő. Az utóbbi a legnagyobb és legkisebb mintaelem különbsége.

Az empirikus eloszlásfüggvényt és jellemző adatokat a sokaság eloszlásfüggvénye és jellemző adatai közelítésére használjuk, ez utóbbiakat megkülönböztetés céljából *elméleti adatoknak* is nevezzük. Ilyen értelemben beszélünk *elméleti eloszlásról*, *elméleti várható értékről*, *elméleti szórásról* stb. Az empirikus adatok legfőbb rendeltetése éppen a megfelelő elméleti adatok közelítése, becslése. Az alábbiakban e becslés elméleti vonatkozásaira térünk ki.

Mivel x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók, ezért rögzített x esetén $F_n(x)$, továbbá az empirikus jellemző adatok is mind valószínűségi változók. Ezek egyben az x_1, x_2, \dots, x_n mintabeli változók függvényei. Az $nF_n(x)$ érték a $\xi < x$ esemény gyakorisága, mely tehát binomiális eloszlású valószínűségi változó

$P(\xi < x) = F(x)$ paraméterrel. Ebből következik, hogy

$$P(nF_n(x) = k) = P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \quad (10.6.4)$$

$$= \binom{n}{k} F^k(x) (1 - F(x))^{n-k},$$

$$M(F_n(x)) = F(x). \quad (10.6.5)$$

A nagy számok BERNOULLI-féle törvénye értelmében igaz továbbá az, hogy minden x esetén

$$F_n(x) \Rightarrow F(x),$$

sőt BOREL tétele szerint minden x -re¹⁴

$$P(F_n(x) \rightarrow F(x)) = 1.$$

Tegyük fel, hogy létezik az elméleti eloszlás várható értéke, és jelöljük m -mel. Ekkor

$$M(\bar{x}) = \frac{1}{n} M(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} nm = m, \quad (10.6.6)$$

továbbá

$$\bar{x} \Rightarrow m,$$

feltéve, hogy létezik $\sigma = D(\xi)$; sőt a nagy számok erős törvényei értelmében bizonyos feltételek mellett

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = m) = 1. \quad (10.6.7)$$

Ez utóbbihoz Kolmogorov tétele (l. a 9.9. szakaszt) szerint elegendő $D(\xi)$ létezése, a (10.6.7) reláció azonban a 9.8. szakaszban általunk teljesen bebizonyított tételből is következik, ha létezik az $M(\xi^4)$ negyedik momentum. Az empirikus vár-

ható érték szórása n növelésével \sqrt{n} arányban csökken, ui.

$$D^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} D^2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (10.6.8)$$

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Az empirikus szórásnégyzetre nyilvánvalóan fennáll a következő egyenlőség:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \quad (10.6.9)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$$

A (10.6.9) formula alapján meghatározzuk s^2 várható értékét. Előbb azonban megjegyezzük, hogy ha $z_i = x_i - m$; $i = 1, 2, \dots, n$, akkor nyilvánvalóan fennáll az

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \bar{z}^2 \quad (10.6.10)$$

egyenlőség, ahol \bar{z} a z_1, z_2, \dots, z_n valószínűségi változók szám-tani átlaga. Ez az egyenlőség akkor is fennáll, ha m tetszőleges valós szám, nem feltétlenül az $m = M(\xi)$ érték. Legyen azonban most $m = M(\xi)$. Ekkor (10.6.10) alapján

$$\begin{aligned} M(s^2) &= \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^n z_i^2\right) - M(\bar{z}^2) = \frac{1}{n} n\sigma^2 - \frac{1}{n^2} M\left[\left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2\right] = \\ &= \sigma^2 - \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^n z_i^2 + 2 \sum_{i < j} z_i z_j\right) = \\ &= \sigma^2 - \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned} \quad (10.6.11)$$

Itt felhasználtuk azt, hogy z_1, z_2, \dots, z_n függetlenek, továbbá $M(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. (10.6.11) szerint az empirikus szórás-

¹⁴ GLIVENKO egy tétele szerint még az is igaz, hogy

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1.$$

négyzetnek megvan az a szépséghibája, hogy várható értéke nem egyenlő az elméleti szórásnégyzettel. Ezért σ^2 közelítésére s^2 helyett az

$$s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (10.6.12)$$

ún. *korrigált empirikus szórásnégyzetet* használjuk, melyre (10.6.11) szerint teljesül, hogy

$$M(s^{*2}) = \sigma^2. \quad (10.6.13)$$

Valamivel nehezebb számolással megmutatható, hogy

$$D^2(s^{*2}) = \frac{1}{n} \left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right), \quad (10.6.14)$$

ahol $\mu_4 = M[(\xi - m)^4]$, a ξ valószínűségi változó negyedik centrális momentuma. Mivel a jobb oldal 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, a CSEBSEV-egyenlőtlenségből rögtön következik, hogy

$$s^{*2} \Rightarrow \sigma^2, \quad (10.6.15)$$

amiből a (10.6.12) alapján az is következik, hogy

$$s^2 \Rightarrow \sigma^2. \quad (10.6.16)$$

Nagy mintaelemszám esetén s^2 és s^{*2} eltérése elhanyagolhatóvá lesz.

Az empirikus eloszlás diszkrét eloszlás, sűrűségfüggvényről tehát ez esetben nem beszélhetünk. Ha azonban a mintát folytonos eloszlású sokaságból vettük, akkor az $f(x)$ elméleti sűrűségfüggvényt mégis tudjuk közelíteni. Erre a célra szolgál a hisztogram, melyet a 3.5. szakaszban már bevezettünk.

Többdimenziós sokaság esetén az empirikus eloszlást a következő módon értelmezzük. Vizsgáljuk az n -elemű mintát, ezek az r -dimenziós tér egy-egy pontját határozzák meg. Az így

kapott n számú pont mindegyikéhez hozzárendelünk $\frac{1}{n}$ valószínűséget. Az r -dimenziós térben így módon értelmezett valószínűségeloszlást nevezzük empirikus eloszlásnak. Ebből az em-

pirikus jellemző adatokat ugyanúgy származtatjuk, mint ahogy egy elméleti (diszkrét) eloszlásból az elméleti jellemző adatokat.

10.7. Az \bar{x} és az s^2 eloszlása normális eloszlású sokaság esetén. Tegyük fel, hogy a sokaság $N(m, \sigma)$ -eloszlású. Ekkor \bar{x} független, normális eloszlású valószínűségi változók összege, tehát maga is normális eloszlású. A (10.6.6) és (10.6.8) formulák figyelembevételével az adódik tehát, hogy az \bar{x} empirikus várható érték $N(m, \sigma/\sqrt{n})$ -eloszlású.

Kevésbé egyszerű s^2 eloszlásának a meghatározása. Legyen x_1, x_2, \dots, x_n egy n -elemű minta, és tekintsük a $z_i = x_i - m$; $i = 1, 2, \dots, n$ valószínűségi változókat, amelyek függetlenek és $N(0, \sigma)$ eloszlásúak. Vezessük be ezek

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} z_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10.7.1)$$

transzformáltjait, ahol $A = (a_{ik})$ olyan ortogonális mátrix¹⁵, amelynek első sorában minden elem $1/\sqrt{n}$. Ilyen mátrix könnyen konstruálható; feltételünknek eleget tesz pl. az alábbi ortogonális mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \dots & -\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}.$$

¹⁵ Egy A négyzetes mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha $AA' = E$, ahol A' az A mátrix transzponáltját jelenti. A ortogonalitásából következik, hogy $A' = A^{-1}$ és $|A| = 1$ vagy $|A| = -1$. Az, hogy A ortogonális mátrix, másképpen kifejezve azt jelenti, hogy a mátrix sorait alkotó vektorok páronként ortogonális, egységnyi hosszúságú vektorok. Ugyanilyen tulajdonságuk az oszlopokat alkotó vektorok is.

A 7.8. szakasz 3. feladatában mondottak szerint az y_1, y_2, \dots, y_n valószínűségi változók együttes eloszlása normális. Mivel továbbá $M(y_i) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ és A ortogonalitásából kifolyólag

$$\begin{aligned} M(y_i y_j) &= M\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} z_k \sum_{r=1}^n a_{jr} z_r\right) = \\ &= M\left(\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n a_{ik} a_{jr} z_k z_r\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n a_{ik} a_{jr} M(z_k z_r) = \\ &= \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \begin{cases} \sigma^2, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j, \end{cases} \end{aligned}$$

vagyis y_1, y_2, \dots, y_n páronként korrelálatlanok, és így függetlenek is.

A (10.7.1) formulát tömör alakban a következőképpen is felírhatjuk:

$$\underline{y} = A \underline{z}, \quad (10.7.2)$$

ahol \underline{y} és \underline{z} az y_1, y_2, \dots, y_n , ill. a z_1, z_2, \dots, z_n komponensekből alkotott oszlopvektorok. (10.7.2)-ből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \underline{y}' \underline{y} = (A \underline{z})' A \underline{z} = \underline{z}' A' A \underline{z} = \underline{z}' \underline{z} = \sum_{i=1}^n z_i^2. \quad (10.7.3)$$

Vegyük figyelembe a (10.6.10) egyenlőséget, és fejezzük ki s^2 -et az y_1, y_2, \dots, y_n valószínűségi változókkal. Az A mátrix első sorában minden elem $1/\sqrt{n}$, tehát

$$y_1 = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \bar{z}. \quad (10.7.4)$$

(10.7.3) és (10.7.4) alapján

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 - \bar{z}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{y_1^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n y_i^2. \quad (10.7.5)$$

Mivel az $y_1/\sigma, \dots, y_n/\sigma$ valószínűségi változók $N(0, 1)$ eloszlásúak, innen rögtön adódik az

1. tétel. $N(m, \sigma)$ -eloszlású sokaság esetén $\frac{n}{\sigma^2} s^2$ $n-1$ -szabadságfokú χ^2 -eloszlású valószínűségi változó.

Megjegyzés. Tekintettel arra, hogy $s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2$, e tételből következik, hogy $\frac{n-1}{\sigma^2} s^{*2}$ is $n-1$ -szabadságfokú, χ^2 -eloszlású valószínűségi változó.

Vegyük figyelembe, hogy

$$\bar{z} = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} = \frac{x_1 - m_1 + \dots + x_n - m_n}{n} = \bar{x} - m.$$

Ezt (10.7.4)-be helyettesítve és \bar{x} -t kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$\bar{x} = \frac{y_1}{\sqrt{n}} + m. \quad (10.7.6)$$

Mivel \bar{x} csak az y_1 , s^2 pedig csak az y_2, \dots, y_n valószínűségi változók függvénye, továbbá y_1, y_2, \dots, y_n függetlenek, ebből adódik a következő fontos

2. tétel. Normális eloszlású sokaság esetén \bar{x} és s^2 független valószínűségi változók.

Megjegyzés. s^2 és s^{*2} csak egy konstans faktorban különböznek, tehát \bar{x} és s^{*2} is függetlenek.

E tétel megfordítottjára a továbbiakban nem lesz szükségünk. Megemlítjük azonban, hogy igaz a következő állítás: ha van olyan n , hogy a minta \bar{x} várható értéke, és s^2 szórásnégyzete függetlenek egymástól, akkor az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók normális eloszlásúak, vagyis a sokaság normális eloszlású.

10.8. Becslések tulajdonságai. Tegyük fel, hogy ismerjük a statisztikai sokaság eloszlásának a típusát, de nem ismerjük az eloszlás analitikus kifejezésében szereplő paraméterek konkrét értékeit. E paramétereket egy n -elemű minta alapján közelítjük, becsüljük. Egyszerűség kedvéért egyelőre tételezzük fel, hogy csak egy paramétert kell becsülnünk, a sokaság eloszlásfüggvénye tehát egy $F(x, a)$ függvény, ahol a valós állandó, melynek értékét azonban nem ismerjük.

Az a paraméter „valódi” értékének a becslésére az x_1, x_2, \dots, x_n mintaelemek egy

$$\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10.8.1)$$

függvényét használjuk. A (10.8.1) függvény természetesen nem lehet tetszőleges; ahhoz, hogy ezzel az a értéket jól becsülhessük, az \hat{a} függvénynek bizonyos jó tulajdonságokkal kell bírnia.

Az x_1, x_2, \dots, x_n mintabeli változók egy tetszőleges függvényét statisztikai függvénynek vagy röviden statisztikának nevezzük. Az a paraméter közelítésére konstruált statisztikát az a paraméter becslésének nevezzük.

Minden becslés természetesen valószínűségi változó, amelynek van egy valószínűségeloszlása. Mivel az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók eloszlása függ az a paramétertől, ez a paraméter az \hat{a} becslés eloszlásában is jelentkezik. Nyilvánvaló, hogy az a paraméter \hat{a} becslése annál jobb, minél inkább koncentrálódik \hat{a} eloszlása az a paraméter valódi értéke körül.

Az a paraméter \hat{a} becslését torzítatlannak nevezzük, ha \hat{a} várható értéke a -val egyenlő:

$$M(\hat{a}) = a. \quad (10.8.2)$$

Ha \hat{a}_1 és \hat{a}_2 az a paraméter két torzítatlan becslése és

$$D^2(\hat{a}_1) < D^2(\hat{a}_2), \quad (10.8.3)$$

akkor az \hat{a}_1 becslést az \hat{a}_2 becslésnél hatásosabbnak nevezzük.

Két torzítatlan becslés közül azt tekintjük jobbnak, amelynek kisebb a szórása. Ha azonban két becslés közül az egyik *torzított*, más szóval: $M(\hat{a}) \neq a$, a másik pedig torzítatlan, akkor a döntés már nem ilyen egyértelmű. Okvetlenül a torzítatlan becslés javára döntünk, ha ennek szórása kisebb a torzított becslés szórásánál, míg fordított esetben bármelyiket előnyben részesíthetjük a másikkal szemben. Ez elsősorban azon múlik, hogy milyen nagy a *torzítás*, vagyis az $M(\hat{a}) - a$ különbség és milyen a szórások viszonya. Kis torzítást szívesen megengedünk, ha ezáltal lényegesen kisebb szórású becsléshez jutunk.

Ha van olyan \hat{a}_0 torzítatlan becslés, amelynek szórása minimális az a paraméter összes torzítatlan becslései körében, akkor ezt *hatásos becslésnek* nevezzük. Akár van ilyen, akár nincsen, mindenképpen létezik az a paraméter \hat{a} torzítatlan becsléseire vett

$$D_0^2 = \inf_{M(\hat{a})=a} D^2(\hat{a})$$

alsó határ. Egy konkrét a becslés esetén a

$$\frac{D_0^2}{D^2(\hat{a})}$$

hányadost az \hat{a} becslés *hatásfokának* nevezzük. Egy \hat{a}_2 becslés \hat{a}_1 becsléshez viszonyított *relatív hatásfokán* pedig a

$$\frac{D^2(\hat{a}_1)}{D^2(\hat{a}_2)}$$

hányadost értjük.

Ha az a paraméter az $F(x, a)$ eloszlás várható értéke, akkor \bar{x} az a torzítatlan becslése. Ez egyben hatásosabb, mint az a paraméter bármely más

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \quad (10.8.4)$$

lineáris becslése, ahol p_1, p_2, \dots, p_n a

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (10.8.5)$$

feltételnek eleget tevő tetszőleges valós számok. Belátható, hogy a (10.8.4) becslés mindig torzítatlan. Másrészt, bevezetve az

$$\varepsilon_i = p_i - \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

jelölést és figyelembe véve, hogy (10.8.5) miatt

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) &= \sigma^2(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) = \\ &= \sigma^2 \left[\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \varepsilon_2 \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n \right)^2 \right] = \\ &= \sigma^2 \left[n \frac{1}{n^2} + 2 \frac{1}{n} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n) + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \right] = \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 \right) \cong \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0$, vagyis ha $p_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ez esetben pedig (10.8.4) \bar{x} -sal egyenlő.

Ha $a = \sigma^2$, ahol σ^2 a sokaság szórásnégyzete, akkor s^{*2} ennek torzítatlan becslése, szemben az s^2 becsléssel, amely torzított. Torzított becslések alkalmas korrekcióval gyakran torzítatlanokká tehetők.

Egy, az ismeretlen paraméter becslésére szolgáló formulában a mintaelemszám általában nem rögzített numerikus érték. Ennek így is kell lennie, mert azt akarjuk, hogy formulánk készen álljon minden egyes n esetére. Ezáltal tehát nem csupán egy becslésünk, hanem egy *becsléssorozatunk* van, amelynek első, második, ... tagjai megfelelnek az $n = 1, 2, \dots$ eseteknek. Mármint lehetséges, hogy az alacsony indexű becslések még nem elég jó tulajdonságúak, azonban n növekedtével egyre jobbak válnak.

Az a paraméter egy $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ becsléssorozatát aszimptotikusan torzítatlannak nevezzük, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\hat{a}_n) = a.$$

Belátható, hogy az empirikus szórásnégyzetekből alkotott s^2 becsléssorozat aszimptotikusan torzítatlan becsléssorozata a σ^2 elméleti szórásnégyzetnek.

Az a paraméternek egy $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$ becsléssorozatát konzisztensnek nevezzük, ha $a_n \rightarrow a$.

Ha az \hat{a}_n becslések mind torzítatlanok és $\lim_{n \rightarrow \infty} D^2(\hat{a}_n) = 0$, akkor \hat{a}_n konzisztens becsléssorozata az a paraméternek. A CSEBISEV-egyenlőtlenség szerint ui. minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$P(|\hat{a}_n - a| > \varepsilon) = P(|\hat{a}_n - M(\hat{a}_n)| > \varepsilon) \leq \frac{D^2(\hat{a}_n)}{\varepsilon^2},$$

tehát a bal oldalon álló valószínűség is 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, ami éppen azt jelenti, hogy $a_n \rightarrow a$. A (10.6.8) és (10.6.4) formulák szerint \bar{x} és s^{*2} konzisztens becsléssorozatait m -nek, ill. σ^2 -nek. Belátható, hogy s^2 is konzisztens becsléssorozata σ^2 -nek.

Végül még egy fontos fogalmat említünk meg, az elégséges becslés fogalmát.

Ha az a paraméter $\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ becslésének megvan az a tulajdonsága, hogy az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók együttes feltételes eloszlása bármely $\hat{a} = y$ feltétel esetén nem tartalmazza az a paramétert, akkor az \hat{a} becslést elégségesnek nevezzük.

Ennek a fogalomnak a jelentőségét kissé közelebbről meg kell világítanunk. Tegyük fel, hogy \hat{a} elégséges becslése a -nak, és a minta alapján meghatároztuk \hat{a} értékét. Mi történik akkor, ha \hat{a} ismeretében az a paraméterre további információt akarunk kapni? Minden gyakorlati statisztikai tevékenységet

megelőz egy elméleti megfontolás, amelynek alapján tevékenységünket illetően tájékozódunk. Ehhez viszont a legtöbb információ, amit felhasználhatunk, a mintaelemek együttes eloszlásának ismerete, miközben a paramétert az együttes eloszlás képletében formálisan feltüntetjük (numerikus értékét ui. nem ismerjük). Mármint, ha x_1, x_2, \dots, x_n feltételes együttes eloszlása minden $a=y$ feltétel mellett független az a paramétertől, akkor az a paramétert illetően semmilyen további elméleti megfontolásra nincs lehetőségünk, az a becslés tehát az összes információt tartalmazza, amit a mintából a -ra nyerhetünk, legyen ez az információ számunkra kevés vagy sok. Bizonyítás nélkül megemlítjük még, hogy ha létezik az a paraméternek hatásos becslése, akkor az valamely elégséges becslés egy függvénye. Ez a tény még jobban megvilágítja az elégséges becslés fogalmát.

1. példa. Megmutatjuk, hogy Poisson-eloszlású sokaság esetén \bar{x} elégséges becslése az eloszlás λ paraméterének. Ha ui. x_1, x_2, \dots, x_n egy n -elemű minta, akkor $n\bar{x}$ egy $n\lambda$ -paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, és így

$$P\left(x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n \mid \bar{x} = \frac{k}{n}\right) = \frac{P(x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n, n\bar{x} = k)}{P(n\bar{x} = k)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{P(x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n)}{P(n\bar{x} = k)} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda}}{\frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}}, & \text{ha } \sum_{i=1}^n k_i = k, \\ 0, & \text{ha } \sum_{i=1}^n k_i \neq k, \end{cases}$$

tehát

$$P\left(x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n \mid \bar{x} = \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n! n^k}, & \text{ha } \sum_{i=1}^n k_i = k, \\ 0, & \text{ha } \sum_{i=1}^n k_i \neq k, \end{cases}$$

ami minden k/n esetén független λ -tól.

2. példa. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll az az információ, hogy a sokaság egyenletes eloszlású valamely (c, d) intervallumban, nem ismerjük azonban a c, d határokat. Egy n -elemű minta alapján becsülni akarjuk az intervallum $a = \frac{c+d}{2}$ centrumát, amely egyben a sokaság várható értéke. Kézenfekvő volna erre a célra az \bar{x} empirikus várható értéket használni. Ez esetben azonban \bar{x} -nál hatásosabb becslés a minta két szélső elemének számtani átlaga:

$$d = \frac{x_1^* + x_n^*}{2}. \quad (10.8.6)$$

Erre teljesül az $M(d) = a$ feltétel, továbbá

$$D^2(d) = \frac{6\sigma^2}{(n+1)(n+2)}, \quad \sigma^2 = \frac{(d-c)^2}{12}. \quad (10.8.7)$$

Az \bar{x} empirikus várható érték szórásnégyzete σ^2/n , ami $n=2$ esetén megegyezik $D^2(d)$ -val, $n>2$ esetén pedig ennél nagyobb. Ha $n \leq 2$, akkor természetesen $d = \bar{x}$.

Valamely a elméleti érték becslésére egy többdimenziós sokaság mintaelemei is felhasználhatók. Ha a sokaság r -dimenziós, a minta elemszáma pedig n , akkor a becslések rn -változós függvényei a mintában szereplő valószínűségi változóknak. A fenti definíciók erre az esetre értelemszerűen átirthatók.

10.9. A maximum-likelihood módszer. Felvetődik a kérdés, hogyan lehet olyan becsléseket konstruálni, amelyeknek megvannak az említett jó tulajdonságai, ill. ezek közül minél több. A legfontosabb erre a célra szolgáló módszer a maximum-likelihood (legnagyobb valószínűség) módszer nevet viseli.

A módszer lényege a következő. Tegyük fel először, hogy a sokaság diszkrét eloszlású, és vezessük be a következő jelölést:

$$P(\xi = x) = p(x, a), \quad (10.9.1)$$

ahol a az ismeretlen paraméter. Egy konkrét x_1, x_2, \dots, x_n , tehát n -elemű minta esetén vizsgáljuk meg az

$$L = p(x_1, a)p(x_2, a) \cdots p(x_n, a) \quad (10.9.2)$$

szorzatot, mint a függvényét, amely valamilyen, az x_1, x_2, \dots, x_n

értékektől függő $a = \hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ helyen felveszi a maximumát. Az a paraméter valódi értékére ez az egyenlőség természetesen általában nem teljesül, mégis az

$$\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10.9.3)$$

statisztikát tekintjük a valódi érték becslésének. A (10.9.2) szorzat annak a valószínűségét adja meg, hogy éppen a rendelkezésre álló mintát kapjuk egy véletlen mintavétel során. A maximum-likelihood módszer alap gondolata tehát abban áll, hogy az a paraméter valódi értékét azzal a speciális \hat{a} értékkel becsüljük, mely ha paraméterünk valódi értéke volna, akkor éppen az adott minta bekövetkezése volna a legvalószínűbb az összes lehetséges n -elemű minták között.

Folytonos eloszlású sokaság esetén (10.9.2) helyett az

$$L = f(x_1, a)f(x_2, a) \cdots f(x_n, a) \quad (10.9.4)$$

függvény maximumát keressük, ahol $f(x, a)$ a sokaság sűrűségfüggvénye. Jelen esetben minden konkrét x_1, x_2, \dots, x_n n -elemű minta bekövetkezésének a valószínűsége 0, rögzített $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ esetén azonban beszélhetünk annak a valószínűségéről, hogy a minta elemei rendre az $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$, $(x_2, x_2 + \Delta x_2)$, ..., $(x_n, x_n + \Delta x_n)$ intervallumokba essenek. Ez a valószínűség pedig kis Δx -ek esetén jó közelítésben:

$$f(x_1, a)f(x_2, a) \cdots f(x_n, a)\Delta x_1\Delta x_2 \cdots \Delta x_n.$$

Ilyen értelemben, ha a valódi értéke becsléseként azt az $a = \hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ értéket fogadjuk el, melyet (10.9.4)-ben a helyébe téve, a szorzat maximális, lényegében ugyanazon elv alapján járunk el, mint a diszkrét eloszlás esetében.

A (10.9.2) és (10.9.4) függvényeket likelihood-függvényeknek nevezzük. Ezek az a paraméter és az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók függvényei. Minden konkrét minta esetén a likelihood-függvények azonban csupán az a változó függvényei.

A (10.9.2) és (10.9.4) szorzatok maximumhelyét meghatározhatjuk valamilyen közvetlen megfontolással, de sok esetben a függvények differenciálhatók a szerint, tehát célszerű a dif-

ferenciálszámítás módszerének az alkalmazása. Általában egyszerűbbé válik a feladat, ha a (10.9.2) és (10.9.4) szorzatok helyett ezek

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i, a); \quad (10.9.5)$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, a) \quad (10.9.6)$$

logaritmusával dolgozunk. Mivel a logaritmusfüggvény monoton növekvő, a (10.9.5) és (10.9.6) függvények maximumhelyei megegyeznek a megfelelő likelihood-függvények maximumhelyeivel. Az a paraméter valódi értékének becslését tehát általában a

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0 \quad (10.9.7)$$

ún. likelihood-egyenlet a -ra való megoldásával határozhatjuk meg legegyszerűbben, feltéve hogy $\ln L$ az a változó differenciálható függvénye és a (10.9.7) egyenlet megoldása a -ra valóban a maximumhelyet szolgáltatja (ez teljesül akkor, ha csak egy megoldás van és $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} < 0$ a megoldás helyén).

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételeket.

Ha létezik az a paraméternek egy \hat{a} minimális szórású, tehát hatásos becslése, akkor a likelihood egyenletnek egy megoldása van és ez egyenlő \hat{a} -val.

Ha \hat{a} az a paraméter elégséges becslése, akkor a likelihood egyenlet minden megoldása az \hat{a} becslés egy függvénye.

Semmilyen lényeges változtatást nem jelent több paraméter egyidejű becslése a maximum-likelihood elv alapján. Ha a sokaságnak r számú paramétere van, amelyek a_1, \dots, a_r , akkor $p(x, a)$ helyett $p(x, a_1, \dots, a_r)$ -et, $f(x, a)$ helyett $f(x, a_1, \dots, a_r)$ -et írva, a likelihood-függvény is tartalmazza ugyanezeket a változókat. A többváltozós függvények elmélete szerint a likeli-

hood-függvény logaritmusát, tehát egyben a likelihood-függvényt is maximálizáló $a_1 = \hat{a}_1, \dots, a_r = \hat{a}_r$ értékeket a

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a_1} = 0; \dots, \frac{\partial \ln L}{\partial a_r} = 0 \quad (10.9.8)$$

egyenletrendszer megoldása útján nyerjük, feltéve hogy $\ln L$ differenciálható az a_1, \dots, a_r változók szerint és a (10.9.8) egyenletrendszer megoldásrendszere valóban a maximumhelyet adja. (Ezt közvetlenül, vagy annak a kritériumnak az alapján dönthetjük el, hogy a $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a_i \partial a_k}$ elemekből alkotott determináns negatív definit. Az alábbi példákban e kritérium mindenütt teljesül, ezt azonban nem részletezzük.)

1. példa. Határozzuk meg a

$$p(x, a) = \binom{N}{x} a^x (1-a)^{N-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, N$$

binomiális eloszlás a ($0 < a < 1$) paraméterének maximum likelihood-becslését. A likelihood-függvény jelen esetben a következő:

$$L = \prod_{i=1}^n \binom{N}{x_i} a^{x_i} (1-a)^{N-x_i},$$

a likelihood-egyenlet pedig (x_1, \dots, x_n a differenciálás során állandók):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n \left[\ln \binom{N}{x_i} + x_i \ln a + (N-x_i) \ln (1-a) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a} - \frac{N-x_i}{1-a} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{(1-a)x_i - a(N-x_i)}{a(1-a)} = \\ &= \frac{1}{a(1-a)} \sum_{i=1}^n (x_i - aN) = 0. \end{aligned}$$

Ezen egyenlet megoldása az

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{nN} \quad (10.9.9)$$

függvény, ez az a paraméter maximum-likelihood-becslése. Mivel a binomiális eloszlás várható értéke Na , a tehát a várható érték N -edrésze,

és így (10.9.9) összhangban van a várható értéknek az empirikus várható értékkel való becslésével.

2. példa. Határozzuk meg egy normális eloszlású sokaság m várható értékének és $a = \sigma^2$ szórásnégyzetének egyidejű maximum-likelihood becsléseit. A sűrűségfüggvény mostani jelöléseinkkel a következő:

$$f(x, m, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2a}},$$

ahonnan a likelihood-függvény logaritmusára az adódik, hogy

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2a}} = -\frac{n}{2} (\ln 2\pi + \ln a) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i-m)^2}{2a}.$$

ebből m és a szerinti parciális differenciálással kapjuk a likelihood-egyenleteket:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - m}{a} = 0; \quad \frac{\partial \ln L}{\partial a} = -\frac{n}{2a} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{2a^2} = 0.$$

E két egyenlet megoldásrendszere a következő:

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}; \quad \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s^2.$$

Ha $a = \sigma^2$ ismert és csak m -et becsüljük, akkor is \bar{x} adódik maximum-likelihood becslésként. Ha azonban m -et ismerjük és csak a -t becsüljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2,$$

ami σ^2 torzítatlan becslése.

3. példa. Ha ξ lognormális eloszlású, akkor

$$a = M(\xi) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}}; \quad b^2 = D^2(\xi) = e^{2m + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1),$$

ahol $m = M(\ln \xi)$, $\sigma^2 = D^2(\ln \xi)$. Az a és b paraméterekkel m és σ^2 a következőképpen fejezhető ki:

$$m = \ln \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sigma^2 = \ln \frac{a^2 + b^2}{a^2} \quad (10.9.10)$$

A lognormális eloszlás sűrűségfüggvénye tehát a következő alakú:

$$f(x, a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \cdot \frac{1}{\left(\ln \frac{a^2 + b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \ln^2 \frac{x \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} / \ln \frac{a^2 + b^2}{a^2}}, x > 0. \quad (10.9.11)$$

Az a és b^2 paraméterek egyidejű maximum-likelihood becsléseinek meghatározása transzcendens egyenlethez vezet. Ismert b esetén egyszerűen meghatározható az a paraméter maximum-likelihood becslése. A számolás elvégzését gyakorló feladatként az Olvasóra bízunk. Bizonyítás nélkül közöljük az a és b^2 paraméterek alábbi maximum-likelihood, torzítatlan és minimális szórású, tehát hatásos becsléseit:

$$\hat{a} = e^{\bar{y}} \psi_n \left(\frac{s_y^{*2}}{2} \right) \quad (10.9.12)$$

$$\hat{b}^2 = e^{2\bar{y}} \chi_n(s_y^{*2}), \quad (10.9.13)$$

ahol

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$s_y^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

$$y_i = \ln x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

x_1, x_2, \dots, x_n a lognormális eloszlású sokaságból vett n -elemű minta, $\chi_n(t)$ és $\psi_n(t)$ pedig a következő függvények:

$$\chi_n(t) = \psi_n(2t) - \psi_n \left(\frac{n-2}{n-1} t \right); \quad (10.9.14)$$

$$\psi_n(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{2j}}{n^j (n-1) (n+1) \cdots (n-3+2j)} \cdot \frac{t^j}{j!}. \quad (10.9.15)$$

A $\psi_n(t)$ függvény eléggé lassan konvergál, egy alkalmas közelítő formula a következő:

$$\psi_n(t) = e^t \left[1 - \frac{t(t+1)}{n} + \frac{t^2(3t^2 + 22t + 21)}{6n^2} \right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (10.9.16)$$

A $\psi_n(t)$ és $\chi_n(t)$ függvényeknek pontos, tehát nem az előbbi közelítő formulái felhasználásával készült táblázatait megtaláljuk [1] 156, 159 oldalain.

KONFIDENCIA-INTERVALLUMOK

10.10. A konfidencia-intervallum fogalma. A statisztikai becslések még a legjobb tulajdonságok esetén sem adnak teljes választ a felvetett problémákra. A becslés és az elméleti érték között általában van egy véletlen jellegű eltérés, melynek nagyságára valamit mondanunk kell. Ha az a paraméter \hat{a} becslése torzítatlan, és az $a - \hat{a}$ eltérés eloszlása semmilyen ismeretlen paramétert nem tartalmaz (a -t is beleértve), akkor tetszőlegesen kis, általunk választott ε esetén található olyan d , hogy¹⁶

$$P(-d \leq a - \hat{a} \leq d) = P(\hat{a} - d \leq a \leq \hat{a} + d) = 1 - p. \quad (10.10.1)$$

Az $(\hat{a} - d, \hat{a} + d)$ véletlen helyzetű intervallum $1 - p$ valószínűséggel lefedi az a paraméter valódi értékét. Nyilvánvaló, hogy minél kisebbre választjuk ε -t, annál nagyobb lesz d . Ez a tény határt szab p csökkentésének.

A fenti eset azonban a gyakorlatban legritkábban fordul elő. Mégis, a legtöbb esetben az x_1, x_2, \dots, x_n mintára támaszkodva, lehetőségünk van olyan \hat{a}_1 és \hat{a}_2 statisztikák konstruálására, amelyekre teljesül a

$$P(\hat{a}_1 \leq a \leq \hat{a}_2) = 1 - p \quad (10.10.2)$$

egyenlőség, ahol p most is általunk tetszőlegesen megválasztott

¹⁶ Ha $a - \hat{a}$ eloszlása folytonos, akkor ilyen d mindig van. Diszkrét eloszlás esetén azonban általában meg kell elégednünk azzal, hogy alkalmas d esetén a (10.10.1) egyenlőség közelítően teljesül.

pozitív szám, melytől az \hat{a}_1 és \hat{a}_2 statisztikák függenek. Jelen esetben tehát az a paramétert egy intervallummal becsüljük, a becslésnek ezt a módját *intervallumbecslésnek* nevezzük.

Az (\hat{a}_1, \hat{a}_2) véletlen helyzetű intervallumot *konfidencia-(megbízhatósági) intervallumnak*, az $(1-p)$ 100%-ot a *megbízhatóság szintjének*, az intervallum kezdő- és végpontját pedig *konfidencia határoknak* nevezzük.

A leggyakoribb megbízhatósági szintek, melyekkel a gyakorlatban dolgozunk: 90%, 95%, 99%. Ezek megfelelnek az $p=0,1$; $p=0,05$; $p=0,01$ választásoknak. Túlzottan magas megbízhatósági szintet nem érdemes előírni, mert ezáltal az (\hat{a}_1, \hat{a}_2) intervallum hossza általában növekszik. Az alábbiakban négy konfidencia-intervallum-konstrukciót mutatunk be. Ezek részint a legfontosabbak, részint a legjobban illusztrálják az alap gondolatot.

10.11. Konfidencia-intervallum a sokaság m várható értékére $N(m, \sigma)$ eloszlás és ismert σ esetén. Ha x_1, x_2, \dots, x_n egy n -elemű minta, akkor az

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \quad (10.11.1)$$

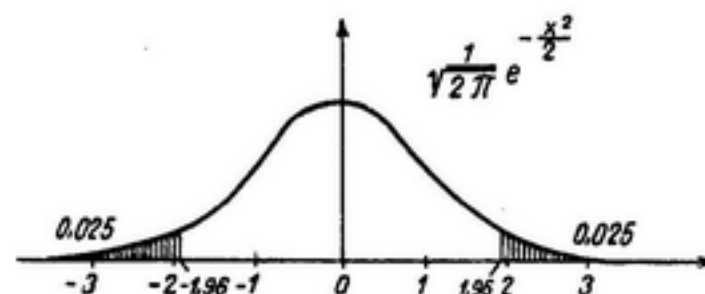
valószínűségi változónak $N(0, 1)$ eloszlása van. Az $N(0, 1)$ eloszlás táblázatából adott $p > 0$ esetén meghatározható az az u_p szám, melyre teljesül, hogy

$$P(|u| \leq u_p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_p} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - p, \quad (10.11.2)$$

(Az $p=0,05$ esetben $u_p=1,96$; l. az 57. ábrát.) Az $|u| \leq u$ egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy

$$\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (10.11.3)$$

vagyis, hogy az $\left(\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ véletlen helyzetű intervallum lefedi m -et. Ez tehát m -re egy $(1-p)$ 100% szintű konfidencia-intervallum.



57. ábra

Ha a konfidencia-intervallum lefedi m -et, akkor m és \bar{x} maximális abszolút eltérése legfeljebb a konfidencia-intervallum $u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ félhossza, ami 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. Felvethetjük azt a kérdést is, hogy milyen nagynak kell lennie a minta elemszámának ahhoz, hogy előírt p esetén a konfidencia-intervallum félhossza legfeljebb d legyen, amit szintén magunk választunk. Ekkor n -re az

$$u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

egyenlőtlenségből azt a már ismert feltételt kapjuk, (vö. a 9.15. szakasszal), hogy

$$n \geq u_p^2 \frac{\sigma^2}{d^2}. \quad (10.11.4)$$

Példa. Valamilyen szerves vegyület oxigéntartalmát határozzuk meg, az ismert szórás $\sigma=0,30\%$. 12 mérésből az $\bar{x}=3,25\%$ átlagot kaptuk. A

95%-os megbízhatósági határok a következők:

$$\bar{x} - u_{0,05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,25 - 1,96 \frac{0,30}{\sqrt{12}} = 3,08\%,$$

$$\bar{x} + u_{0,05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3,25 + 1,96 \frac{0,30}{\sqrt{12}} = 3,42\%.$$

10.12. Konfidencia-intervallum m -re $N(m, \sigma)$ eloszlású sokaság és ismeretlen σ esetén. A 10.11. pontban tárgyalt esettel szemben sokkal gyakoribb az az eset, amikor a σ paraméter is ismeretlen. Ekkor a következőképpen járunk el, A (10.11.1) helyett tekintjük a

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - m}{s^*} \quad (10.12.1)$$

statisztikát, mely abban különbözik u -tól, hogy az ismeretlen σ helyett itt s^* szerepel. (10.12.1) felírható a következő formában is

$$t = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \frac{1}{s^*}. \quad (10.12.2)$$

A számlálóban egy $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó $\sqrt{n-1}$ -szerese szerepel, a nevezőben álló valószínűségi változó pedig a 10.7. szakasz 1. tétele szerint $n-1$ -szabadságfokú, χ^2 -eloszlású. Ezenkívül \bar{x} és s^* függetlenségéből kifolyólag (10.7. szakasz 2. tétel) a számláló és a nevező függetlenek. Következésképpen t egy $n-1$ -szabadságfokú, STUDENT-eloszlású valószínűségi változó.

A STUDENT-eloszlás táblázatából adott p -hez meghatározható az a t_p szám, melyre teljesül a

$$P(|t| \leq t_p) = S_{n-1}(t_p) = 1 - p$$

egyenlőség. A t valószínűségi változó definícióját figyelembe

véve, ez ekvivalens azzal, hogy

$$P\left(\bar{x} - t_p \frac{s^*}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_p \frac{s^*}{\sqrt{n}}\right) = 1 - p. \quad (10.12.3)$$

Ilyenformán az m paraméterre egy konfidencia-intervallumot nyertünk, amelynek határai $(1-p)100\%$ szint esetén

$$\bar{x} \pm t_p \frac{s^*}{\sqrt{n}}.$$

Jelen esetben nemcsak a konfidencia-intervallum centruma, hanem a hossza is valószínűségi változó. Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $s^* \Rightarrow \sigma$, következésképpen adott p esetén

$$t_p \frac{s^*}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.$$

A mintaelemszám minden határon túli növelésével tehát a konfidencia-intervallum hossza sztohasztikusan 0-hoz tart. A p valószínűség értelmezése a következő: ha igen sokszor veszünk egymástól független n -elemű mintákat, és minden egyes esetben meghatározzuk az m paraméter $(1-p)100\%$ szintű konfidencia-intervallumát, akkor az esetek kb. $100p\%$ -ában m kívül, kb. $(1-p)100\%$ -ában pedig belül fekszik a konfidencia-intervallumon.

Adott p -hez tartozó t_p számot a IV. táblázatból olvashatjuk le. A táblázat felső sora a $100p$ értékeket, bal oldali oszlopa pedig a szabadságfokok számát tartalmazza. Adott p és szabadságfok esetén a t_p számot a megfelelő oszlop és sor kereszteződésében találjuk. A táblázat utolsó sorában¹⁷ ∞ szabadság-

¹⁷ A 3. függelék 8. formulájában h helyébe $\frac{1}{2}$ -et, p helyébe $\frac{n}{2}$ -t írva, azt kapjuk, hogy

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. A (7.5.2) egyenlőség szerint tehát az n -szabadságfokú STUDENT-el-

oszlás $s_n(x)$ sűrűségfüggvénye $n \rightarrow \infty$ esetén a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez konvergál, ez szerint a standard normális eloszlás a STUDENT-eloszlás határértéke, ha $n \rightarrow \infty$.

fok mellett a normális eloszláshoz tartozó értékek foglalnak helyet. Itt találjuk meg tehát az u_p értékeket, melyekről az előző pontban tettünk említést.

Példa. Villanyégők vizsgálatánál egy adott tételből 15 db-nak mérték meg az égési időtartamát, mely közelítőleg normális eloszlású volt. Az empirikus várható értékre és a korrigált empirikus szórásra az $\bar{x} = 1200$ óra, $s^* = 186$ óra adódott. A szabadságfokok száma 14, a 99%-os megbízhatósági határok a következők:

$$\bar{x} - t_{0,01} \frac{s^*}{\sqrt{n}} = 1200 - 2,977 \frac{186}{\sqrt{15}} = 1057 \text{ óra,}$$

$$\bar{x} + t_{0,01} \frac{s^*}{\sqrt{n}} = 1200 + 2,977 \frac{186}{\sqrt{15}} = 1343 \text{ óra.}$$

10.13. Konfidencia-intervallum két normális eloszlású sokaság várható értékeinek eltérésére, egyenlő, de ismeretlen szórások esetén. Tegyük fel, hogy van két egymástól független mintánk:

$$\begin{aligned} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1} \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \end{aligned} \quad (10.13.1)$$

ahol n_1 és n_2 lehetnek egyenlők, de különbözők is; az egyiket egy $N(m_1, \sigma_1)$, a másikat egy $N(m_2, \sigma_2)$ eloszlású sokaságból vettük, és bár σ_1, σ_2 ismeretlenek, de tudjuk, hogy $\sigma_1 = \sigma_2$. Az, hogy e két minta független, matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy a (10.13.1)-ben felírt $n_1 + n_2$ számú valószínűségi változó független. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i};$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2,$$

és tekintsük a következő statisztikát:

$$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (m_1 - m_2)}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}}. \quad (10.13.2)$$

Bebizonyítható, hogy t egy $n_1 + n_2 - 2$ -szabadságfokú STUDENT-eloszlású valószínűségi változó. Ha tehát a STUDENT-eloszlás táblázatából adott p -hez meghatározzuk azt a t_p számot, melyre teljesül, hogy

$$P(|t| \leq t_p) = 1 - p,$$

akkor az

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_p \sqrt{\frac{(n_1 + n_2)(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)}{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}} \quad (10.13.3)$$

határpontokkal rendelkező intervallum $1 - p$ valószínűséggel lefedti az $m_1 - m_2$ különbségnek megfelelő pontot a számegyenesen. Ez tehát egy $(1 - p)$ 100% szintű konfidencia-intervallum az $m_1 - m_2$ különbségre.

10.14. Konfidencia-intervallum σ -ra $N(m, \sigma)$ eloszlás esetén. Ha van egy n -elemű mintánk egy $N(m, \sigma)$ eloszlású sokaságból, akkor akármilyen legyen is m , a 107. szakasz 1. tétele szerint az $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ valószínűségi változó $n - 1$ -szabadságfokú χ^2 eloszlású.

Olyan intervallumot, amelybe ez $1 - p$ valószínűséggel esik, végtelen sok különböző módon választhatunk. Ugyanez a megjegyzés vonatkozik a 10.11., 10.12., 10.13. pontokban említett u és t valószínűségi változókra is. Míg azonban u és t eloszlásai szimmetrikusak a 0 pontra, aminek alapján kézenfekvő egy a 0 pontra szimmetrikus intervallumot választani, addig a χ^2 -eloszlás nem szimmetrikus a számegyenes egy pontjára nézve sem. Eléggé természetesnek tűnik azonban olyan $\chi_{1-p/2}^2$ és $\chi_{p/2}^2$ ($\chi_{p/2}^2 > \chi_{1-p/2}^2$ kis p esetén) határokat választani, melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_{1-p/2}^2\right) &= 1 - \frac{p}{2}; \\ P\left(\frac{ns^2}{\sigma^2} > \chi_{p/2}^2\right) &= \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (10.14.1)$$

E két határt külön-külön az $n-1$ -szabadságfokú eloszlás táblázata alapján határozzuk meg. A fenti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$P\left(\chi^2_{1-p/2} \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{p/2}\right) = 1-p,$$

amivel ekvivalens az alábbi reláció

$$P\left(\frac{ns^2}{\chi^2_{p/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns^2}{\chi^2_{1-p/2}}\right) = 1-p. \quad (10.14.2)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az

$$\left(\frac{ns^2}{\chi^2_{p/2}}, \frac{ns^2}{\chi^2_{1-p/2}}\right)$$

intervallum $(1-p) 100\%$ szintű konfidencia-intervallum az ismeretlen σ^2 paraméterre. Ugyanilyen szintű konfidencia-intervallum

$$\left(\frac{\sqrt{ns}}{\chi_{p/2}}, \frac{\sqrt{ns}}{\chi_{1-p/2}}\right)$$

a sokaság σ szórására.

Ha $p=0,05$, akkor a $\chi^2_{p/2}$ és $\chi^2_{1-p/2}$ értékeket a táblázatból esetleg nem tudjuk közvetlenül kiolvasni, e két számot ui. külön-külön kell meghatározni a (10.14.1) egyenlőségek alapján, márpedig az $\frac{p}{2}=0,025$ és $1-\frac{p}{2}=0,975$ valószínűségekhez tartozó értékeket nem minden táblázat tartalmazza. Ekkor és más hasonló esetben is lineáris interpolációt alkalmazunk.

Példa. Egyik egyorsós automata gép által készített alkatrészek közül 10-et kiválasztva, az alábbi eredményeket kapták

2,18	2,12
2,14	2,15
2,17	2,14
2,13	2,10
2,21	2,14.

Ennek alapján $\bar{x}=2,148$, $s=0,032$. A σ -ra vonatkozó 95%-os konfidencia határok a következők:

$$\text{alsó } \frac{\sqrt{ns}}{\chi_{p/2}} = 0,022,$$

$$\text{felső } \frac{\sqrt{ns}}{\chi_{1-p/2}} = 0,058.$$

10.15. Konfidencia-intervallum a binomiális eloszlás ismeretlen paraméterére. Legyen A egy esemény és jelölje p ennek valószínűségét: $p=P(A)$. n független kísérletet végezve, a p valószínűség becslésére a

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

relatív gyakoriságot használjuk, ahol $x_i=1$, vagy 0, aszerint, amint az A esemény az i -edik kísérlet során bekövetkezik vagy nem. Az $n\hat{p}$ valószínűségi változó binomiális eloszlású,

$$M(n\hat{p}) = np,$$

$$D^2(n\hat{p}) = npq, \quad q = 1-p.$$

A centrális határeloszlástétel szerint eléggé nagy n esetén az

$$\frac{n\hat{p} - np}{\sqrt{npq}} = \sqrt{n} \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq}}$$

standardizált valószínűségi változó közelítően $N(0, 1)$ eloszlású, tehát

$$P\left(\sqrt{n} \left| \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq}} \right| \leq \lambda\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1.$$

A baloldalon a zárójelben álló esemény ekvivalens azzal, hogy

$$(p - \hat{p})^2 \leq \lambda^2 \frac{pq}{n}.$$

Négyzetreemelés és rendezés után az

$$\left(1 + \frac{\lambda^2}{n}\right)p^2 - \left(2\hat{p} + \frac{\lambda^2}{n}\right)p + \hat{p} \approx 0 \quad (10.15.1)$$

egyenlőtlenség adódik. Itt bal oldalon, rögzített \hat{p} esetén a p változó egy másodfokú függvénye szerepel, amelynek grafikonja a p -tengelyt a megfelelő másodfokú egyenlet gyökeiben metszi, a gyökök közötti p értékekre pedig teljesül a (10.15.1) egyenlőtlenség. E két gyök a következő:

$$\hat{p}_1 = \frac{\hat{p} + \frac{\lambda^2}{2n} - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{\lambda^2}{4n}}}{1 + \frac{\lambda^2}{n}}; \quad (10.15.2)$$

$$\hat{p}_2 = \frac{\hat{p} + \frac{\lambda^2}{2n} + \frac{\lambda}{\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{\lambda^2}{4n}}}{1 + \frac{\lambda^2}{n}}. \quad (10.15.3)$$

A mondottakból következik, hogy

$$P(\hat{p}_1 \leq p \leq \hat{p}_2) \approx 2\Phi(\lambda) - 1. \quad (10.15.4)$$

A (\hat{p}_1, \hat{p}_2) intervallum tehát jó közelítésben $(1-\varepsilon)$ 100% szintű konfidencia-intervallum a p paraméterre, ha λ -t oly módon választjuk, hogy

$$2\Phi(\lambda) - 1 = 1 - \varepsilon;$$

$$2(1 - \Phi(\lambda)) = \varepsilon.$$

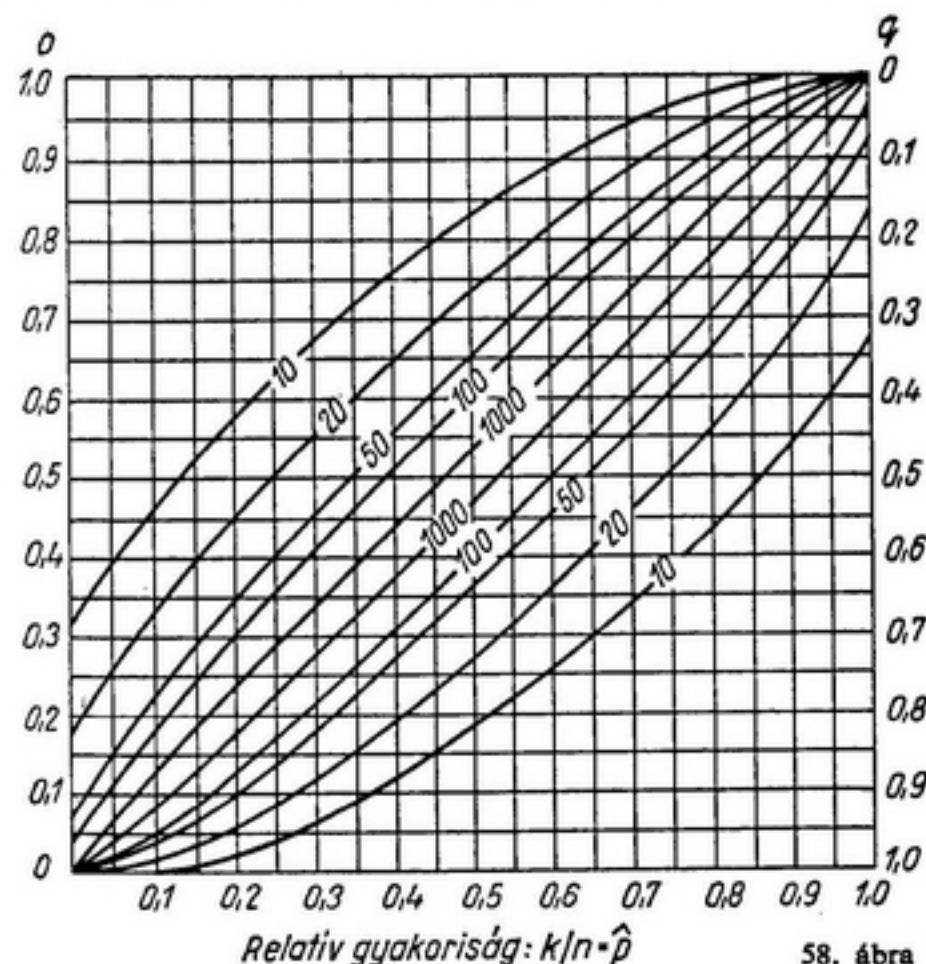
Ha n eléggé nagy, akkor $\frac{1}{n}$ elhanyagolható $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -hez képest,

ennélfogva a konfidencia határokra az alábbi közelítés adódik:

$$\hat{p}_1 \approx \hat{p} - \lambda \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \quad (10.15.5)$$

$$\hat{p}_2 \approx \hat{p} + \lambda \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}. \quad (10.15.6)$$

Az 58. ábrán feltüntettük néhány \hat{p} relatív gyakorisághoz tartozó \hat{p}_1 és \hat{p}_2 konfidencia-határokat. Az ábra a (10.15.2 és 3) pontos értékeket tartalmazza $n=10; 20; 50; 100; 1000$ esetén.



58. ábra

A statisztikai próbák egy vagy több statisztikai sokaság eloszlásaival kapcsolatos *hipotézisek* ellenőrzésére valók. Ebben a szakaszban a szóban forgó sokaságok eloszlásainak a *típusát* ismertnek tételezve fel, az eloszlás egyes *ismeretlen paramétereire* tett hipotézisek ellenőrzésével foglalkozunk. Az e célra alkalmas próbák közül hármat ragadunk ki. Minden egyes próbát megelőz egy elméleti meggondolás, amely eljárásunk indoklására szolgál. E helyen a próbák menetét illetően nem bocsátunk részletes előzetes magyarázatokba, csupán megjegyezzük, hogy az alapgondolat lényegében mindig ugyanaz, és ez akármelyik próbából megérthető. Az Olvasó számára azt ajánljuk, hogy a matematikai szempontból legegyszerűbb u -próbát gondosan tanulmányozza át, ezáltal a többieket is könnyen megértheti.

10.16. Az u -próba. Tegyük fel, hogy a sokaság normális eloszlású, és ismerjük a szórás számszerű értékét; ez az információ valamilyen korábbi vizsgálat alapján rendelkezésünkre áll. Ellenőrizni akarunk egy, a sokaság m várható értékére tett hipotézist, mely abban áll, hogy m egy meghatározott számmal egyenlő, $m = m_0$. Másképpen megfogalmazva: *a hipotézis abban áll, hogy a sokaság várható értéke és az m_0 szám között az eltérés 0-val egyenlő.* Emiatt a kiinduló hipotézist *null-hipotézisnek* is szokták nevezni. Legyen x_1, x_2, \dots, x_n egy, a sokaságból vett n -elemű minta. Ezek most az előzetes elméleti fejtegetés során még nem konkrét számszerű értékek, hanem valószínűségi változók. Ha helyes az $m = m_0$ hipotézis, akkor az

$$u = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \quad (10.16.1)$$

valószínűségi változó $N(0, 1)$ eloszlású. Mármint a standard normális eloszlás táblázatából adott $0 < p < 1$ számhoz meghatározzuk azt az u_p -t, amelyre teljesül a

$$P(|u| > u_p) = p$$

reláció¹⁸. u_p -t olyan kicsinek választjuk, hogy a p valószínűségű esemény gyakorlatilag elhanyagolható legyen, vagyis gyakorlatilag biztos legyen az $|u| \leq u_p$ esemény. Általában az $p = 0,05$, $p = 0,01$, $p = 0,001$ értékek használatosak.

Ha most egy n konkrét numerikus értékből álló mintánk van, akkor ezek \bar{x} számtani átlagát a (10.16.1) képletbe helyettesítve u -ra egy numerikus értéke kapunk. Két eset van: vagy $|u| > u_p$, vagy $|u| \leq u_p$. Az első esetben olyan esemény következett be, melyet gyakorlatilag lehetetlennek minősítettünk, és ebből (az indirekt bizonyítás elvéhez hasonlóan) arra következtetünk, hogy helytelen a kiinduló hipotézis. Az $m = m_0$ hipotézist ez esetben elvetjük, és azt mondjuk, hogy a sokaság tényleges m várható értéke és a hipotétikus m_0 közötti eltérés *lényeges, szignifikáns* az $(1 - p)$ 100%-os szinten. Az $|u| \leq u_p$ esetben nincs semmi indokunk a hipotézis elvetésére, nincs ellentmondás adataink, a konkrét minta és az $m = m_0$ hipotézis között.

Példa. Egy csővágó automatagépnek 1200 mm hosszúságú csődarabokat kell levágnia. Ellenőrizni akarjuk, hogy a gép által gyártott darabok hosszmérete megfelel-e az előírt méretnek. Előző adatfelvételekből tudjuk, hogy a szóban forgó gép által gyártott darabok hossza normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma = 3$ mm szórással. A vizsgálat céljából a leggyártott darabok közül véletlenszerűen kiválasztunk 16 db-ot, és az u -próbát alkalmazzuk annak eldöntésére, hogy nincs-e szignifikáns eltérés az előírt mérettől. A kiválasztott 16 db hosszméretére a következő értékeket kaptuk (mm-ben): 1193, 1198, 1203, 1191, 1195, 1196, 1199, 1191, 1201, 1196, 1193, 1198, 1204, 1196, 1198, 1200. Eszerint $m_0 = 1200$ mm, $\sigma = 3$ mm, $\bar{x} = 1197$ mm, $\sqrt{n} = 4$, tehát

$$u = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} = -4; |u| = 4 > u_{0,001} = 3,291.$$

A próba alapján magas szignifikancia szinten el kell vetnünk azt a feltevést, hogy a gép által gyártott darabok átlagos hosszmérete 1200 mm. A gyártást tehát le kell állítani, és a gépet újra beállítani a helyes méretre.

A szignifikancia szintjét mindig meg kell említenünk. Az eltérés ui. lehet szignifikáns 95%-os szinten, de nem szignifi-

¹⁸ Ez az u_p ugyanaz, mint az u -próba tárgyalásakor bevezetett u_p .

káns a 99%-os szinten. Ha a hipotézist elvetjük, fennforog a tévedés lehetősége, mégpedig mivel $P(|u| > u_p) = p$, ezt a próbát egymástól függetlenül igen sokszor elvégezve, átlagban minden 100 próba közül 100p esetben tévedünk.

Ha $|u| \leq u_p$, akkor a hipotézist nem vetjük el, az elfogadásra azonban minden további nélkül nincs elegendő alapunk. Az $|u| \leq u_p$, ill. az ezzel ekvivalens

$$m_0 - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq m_0 + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (10.16.2)$$

esemény nagy valószínűséggel bekövetkezhet akkor is, ha $m \neq m_0$, de m és m_0 eltérése kicsiny. m értékét nem ismerjük ugyan, formálisan azonban meg tudjuk határozni annak a valószínűségét, hogy a (10.16.2) reláció teljesüljön. Mindhárom tagból m -et levonva, majd σ/\sqrt{n} -nel osztva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{n} \frac{m_0 - m}{\sigma} - u_p \leq \sqrt{n} \frac{\bar{x} - m}{\sigma} \leq \sqrt{n} \frac{m_0 - m}{\sigma} + u_p,$$

és mivel középen egy $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó áll, a (10.16.2) reláció teljesülésének a valószínűsége

$$\Phi\left(\sqrt{n} \frac{m_0 - m}{\sigma} + u_p\right) - \Phi\left(\sqrt{n} \frac{m_0 - m}{\sigma} - u_p\right). \quad (10.16.3)$$

Ez egyben annak a valószínűsége, hogy tévedünk, ha az $|u| \leq u_p$ esetben elfogadjuk a hipotézist. Mármost akár $m_0 > m$, akár $m_0 < m$, a (10.16.3) valószínűség mindenképpen 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$. Nagy mintaelemszám esetén tehát az $|u| \leq u_p$ esetben elfogadhatjuk a hipotézist, mert a tévedés valószínűsége eléggé kicsiny.

Egy statisztikai próbánál kétféle hibát követhetünk el: elvetjük a hipotézist, holott az igaz, ill. elfogadjuk a hipotézist, holott az nem igaz. Ezeket első ill. második fajta hibáknak nevezzük. Az elsőfajta hiba valószínűsége éppen p . Ezt tetszés szerint csökkenthetjük, hiszen a szignifikancia szintjét magunk

írjuk elő. A második fajta hiba valószínűsége attól függ, hogy milyen alternatív hipotézis teljesül. Ha a minta elemszámának minden határon túl való növelése esetén a második fajta hiba minden alternatív hipotézis esetén 0-hoz tart, akkor a próbát *konzisztensnek* nevezzük. Az előbb bebizonyítottuk, hogy az u -próba konzisztens. Ugyanez áll valamennyi, ebben a könyvben tárgyalt próbára.

10.17. A t -próba. Feltesszük, hogy a sokaság normális eloszlású, azonban sem a sokaság várható értéke (m), sem a szórása (σ) nem ismeretes. Ellenőrizni akarjuk az $m = m_0$ hipotézist. A 10.12. szakasz szerint a

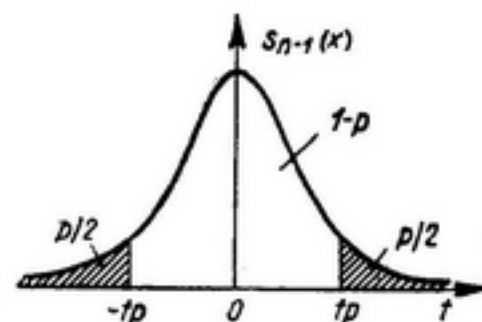
$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - m_0}{s^*} \quad (10.17.1)$$

valószínűségi változó $n-1$ -szabadságfokú STUDENT-eloszlású. Adott p -hez a STUDENT-eloszlás táblázatából meghatározható olyan t_p , amelyre teljesül a

$$P(|t| > t_p) = p$$

egyenlőség (l. az 59. ábrát). Ha most a mintából számított konkrét t érték abszolút értéke nagyobb, mint t_p , az $m = m_0$ hipotézist elvetjük. Ellenkező esetben nincs ellentmondás a minta és a hipotézis között, sőt eléggé nagy mintaelemszám esetén a hipotézist elfogadhatjuk, ha $|t| \leq t_p$. Az ezáltal elkövetett hiba valószínűsége ui. az u -próbához hasonlóan a mintaelemszám növelésével tetszőlegesen kicsivé tehető.

Példa. Árammérőket úgy igazítanak be, hogy a mérőket szinkron működtetik egy standard árammérővel. Beigazítás után 10 árammérőt tartalmazó mintát veszünk, és ellenőrizzük, hogy konstansaik csak véletlenszerűen térnek-e el a standard árammérő konstansától. E célból precíziós wattmérővel és stoppermérővel pontosan meghatározzuk a szóban forgó árammérők konstansait, majd t -próbával ellenőrizzük azt a feltevést, hogy az eltérések csak a véletlennek tulajdoníthatók-e vagy szisztematikusak.



59. ábra

A mintát alkotó 10 mérő konstansait és a mintabeli jellemző értékét az alábbiakban közöljük. A standard mérő konstansa 1.

x	
0,985	
1,003	
0,996	$\bar{x} = 0,994$
0,994	
1,002	$n = 10$
0,987	
0,993	
0,991	$s^* = 0,002\ 285$
1,004	$\frac{s^*}{\sqrt{n}}$
0,985	

Ennek alapján

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - 1}{s^*} = \frac{0,994 - 1}{0,002285} = -2,63.$$

A 9-szabadságfokú STUDENT-eloszlás táblázata alapján $t_{0,05} = 2,262$; $t_{0,01} = 3,250$. Eszerint szignifikáns eltérést tapasztalunk 95%-os szinten, de nincs szignifikáns eltérés 99%-os szinten. A hipotézis megtartásához azonban nincs elegendő alapunk (a 99%-os minősítés esetén), mert a minta elemszáma nagyon kicsi.

10.18. Két várható érték eltéréseinek vizsgálata. Tegyük fel, hogy van két normális eloszlású sokaságunk, amelyeknek paraméterei m_1, σ_1 , ill. m_2, σ_2 . Ezek konkrét értékei nem ismeretesek, feltesszük azonban, hogy $\sigma_1 = \sigma_2$ (ez az információ valamilyen, a mintától független megfontolás alapján rendelkezésünkre áll), és ellenőrizni akarjuk az $m_1 = m_2$ hipotézist. Ha az első sokaságból n_1 , a másodikból n_2 elemszámú mintát veszünk és e minták egymástól függetlenek, akkor a 10.13. pont szerint a hipotézis helyessége esetén a

$$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \quad (10.18.1)$$

valószínűségi változó $n_1 + n_2 - 2$ -szabadságfokú STUDENT-eloszlású. Adott (kis) p -hez a STUDENT-eloszlás táblázatából meg-

határozzuk azt a t_p -t, amelyre teljesül a $P(|t| > t_p) = p$ egyenlőség. Ha most a konkrét mintából számított t érték abszolút értékben nagyobb, mint t_p , a hipotézist elvetjük, ellenkező esetben nincs ellentmondás adataink és a hipotézis között. Ha n_1 és n_2 eléggé nagyok, akkor a $|t| \leq t_p$ esetben a hipotézist elfogadhatjuk, mert az ebben való tévedés valószínűsége n_1 és n_2 minden határon túli növelésével 0-hoz tart.

Példa. Meg akarjuk vizsgálni, hogy egy új készítési eljárás javítja-e a beton minőségét, nevezetesen növeli-e a törőszilárdságát. E célból ugyanabból a nyersanyagból 12 egyenlő mennyiségű mintát veszünk. Ezeket véletlenszerűen kettéosztjuk, és mind a régi, mind az új eljárással 6–6 próbakockát készítünk. Az alábbi táblázat mutatja az egyes próbakockák törőszilárdságát kg/cm^2 -ben; x_1 a régi, x_2 az új eljárással készített kockák törőszilárdságát jelenti.

x_1	x_2
300	305
301	317
303	308
288	300
294	314
296	316

Az adatok alapján azt kapjuk, hogy $\bar{x}_1 = 297$, $\bar{x}_2 = 310$, $s_1^2 = 30,4$, $s_2^2 = 46$, $|t| = 3,64$. A próba szignifikanciát mutat még a 99%-os szinten is, mert 10 szabadságfok esetén $t_{0,01} = 3,17$. Eszerint az új eljárás javítja a beton törőszilárdságát.

10.19. Az F -próba. Tegyük fel, hogy van egy $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$ mintánk egy $N(m_1, \sigma_1)$ eloszlású sokaságból és egy másik, $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$, az előzőtől független mintánk egy $N(m_2, \sigma_2)$ eloszlású sokaságból. Az $m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2$ paraméterek nem ismeretesek. Ellenőrizni akarjuk a $\sigma_1 = \sigma_2$ hipotézist. Jelöljük s_1^2 , ill. s_2^2 az első, ill. második minta empirikus szórásnégyzeteit.

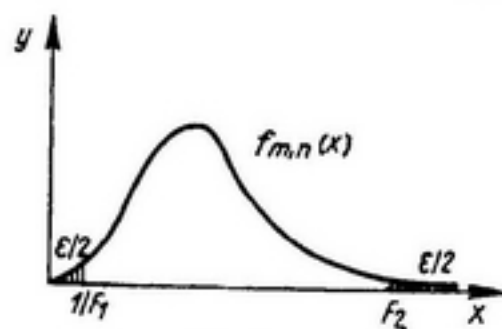
A 10.7. szakasz 2. tétele szerint $\frac{n_1 - 1}{\sigma_1^2} s_1^{*2}$ egy $n_1 - 1$ -szabadságfokú, $\frac{n_2 - 1}{\sigma_2^2} s_2^{*2}$ pedig $n_2 - 1$ -szabadságfokú χ^2 -eloszlású valószínűségi változó. Mivel a minták függetlenek, ezek a valószínűségi változók is függetlenek, ennél fogva $\sigma_1 = \sigma_2$ ese-

tén az

$$F = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} \cdot \frac{\frac{n_1 - 1}{\sigma_1^2} s_1^{*2}}{\frac{n_2 - 1}{\sigma_2^2} s_2^{*2}} = \frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} \quad (10.19.1)$$

valószínűségi változó $n_1 - 1, n_2 - 1$ -szabadságfokú F -eloszlást követ.

A $\sigma_1 = \sigma_2$ hipotézis ellenőrzéséhez ki kell jelölnünk egy olyan intervallumot, hogy F értéke p valószínűséggel essék ezen kívül. Ilyen intervallumot többféleképpen jelölhetünk ki. Igen egyszerűvé válik azonban a próba konkrét végrehajtása, ha az



60. ábra

intervallum $\frac{1}{F_1}$ -gyel jelölt alsó és F_2 -vel jelölt felső határát úgy állapítjuk meg, hogy (l. a 60. ábrát)

$$P\left(\frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} > F_2\right) = \frac{p}{2}; \quad (10.19.2)$$

$$P\left(\frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} < \frac{1}{F_1}\right) = P\left(\frac{s_2^{*2}}{s_1^{*2}} > F_1\right) = \frac{p}{2}. \quad (10.19.3)$$

Ekkor p annak a valószínűsége, hogy F kívül esik az $\left(\frac{1}{F_1}, F_2\right)$ intervallumon:

$$P\left[\frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}} \notin \left(\frac{1}{F_1}, F_2\right)\right] = p. \quad (10.19.4)$$

Vegyük figyelembe, hogy kis p esetén F_1 és F_2 1-nél nagyobb számok ($p \leq 0,3$ esetén ez mindig teljesül, bármilyenek legyenek is a szabadságfokok). Ebből következik, hogy annak eldöntésére, vajon F kívül vagy belül fekszik-e az $\left(\frac{1}{F_1}, F_2\right)$ interval-

lumon, elegendő az $\frac{s_1^{*2}}{s_2^{*2}}$ és $\frac{s_2^{*2}}{s_1^{*2}}$ hányadosok közül azt, amelyik 1-nél nagyobb, kiválasztani és megnézni, vajon nagyobb-e ez vagy sem, mint az $\frac{p}{2}$ valószínűséghez tartozó táblázati érték.

Ennek meghatározásakor ne tévesszük el a szabadságfokok sorrendjét, mely $n_1 - 1, n_2 - 1$, ill. $n_2 - 1, n_1 - 1$ aszerint, amint $s_1^{*2} > s_2^{*2}$, ill. $s_2^{*2} > s_1^{*2}$.

A hipotézist a fent mondottak alapján vetjük el, ill. fogadjuk el. Ez utóbbit azonban csak nagy mintaelemszám esetén tehetjük meg, egyébként csupán annyit mondhatunk, hogy nincs ellentmondás adataink és a hipotézis között.

Példa. A két várható érték eltéréseinek vizsgálatára említett példával kapcsolatban most ellenőrizni fogjuk a szórások egyenlőségére vonatkozó hipotézisünket. A példában

$$s_1^{*2} = 38,4;$$

$$s_2^{*2} = 46;$$

tehát a nagyobb és kisebb korrigált empirikus szórásnégyzet hányadosa

$$\frac{s_2^{*2}}{s_1^{*2}} = \frac{46}{38,4} = 1,2.$$

Az 5,5 szabadságfokú F -eloszlás táblázati értékeit megnézve, azt látjuk, hogy abban még az $p/2 = 0,3$ esetben is 1,2-nél nagyobb érték áll, mégpedig 1,64. Amint p csökken, ez a küszöbszám növekszik, tehát semmilyen gyakorlatban használatos szint esetén nem tapasztaltunk szignifikáns eltérést. A hipotézis biztonságos elfogadásához nagyobb elemszámú mintára volna szükségünk, ekkor válik ui. kicsivé a második fajta hiba. Az a tény azonban, hogy 1-től igen kevésbé eltérő hányadost kaptunk, a hipotézis elfogadása mellett szól.

A χ^2 -PRÓBÁK

10.20. Az illeszkedésvizsgálat fogalma. Ha a hipotézis ellenőrzésére szolgáló statisztikai függvény χ^2 -eloszlású vagy legalábbis a mintanagyság minden határon túli növeléskor aszimptotikusan (határértékben) χ^2 -eloszlású, akkor a statisztikai pró-

bát χ^2 -próbának nevezzük. χ^2 -próbával ellenőrizhetjük egy ξ valószínűségi változó eloszlására tett hipotézisünket. Mivel itt nem csupán egy eloszlás paramétereire tett hipotézis, hanem a ξ valószínűségi változó egész valószínűségeloszlására tett hipotézis ellenőrzéséről van szó, a megfelelő próbát *illeszkedésvizsgálatnak* nevezzük. Ha ezt a hipotetikus eloszlást teljesen megadjuk, akkor *tiszta illeszkedésvizsgálatról*, ha pedig csak az eloszlás típusát specializáljuk, és a benne levő paramétereket a mintából becsüljük, akkor *becsléses illeszkedésvizsgálatról* beszélünk. χ^2 -próbával ellenőrizhetjük a valószínűségi változók függetlenségét is. Továbbá azt a hipotézist is, hogy adott valószínűségi változók azonos eloszlásúak-e vagy sem. Ebben a részben e négy χ^2 -próbát tárgyaljuk.

10.21. Tiszta illeszkedésvizsgálat. Egy ξ valószínűségi változó eloszlására tett hipotézisünket oly módon ellenőrizzük, hogy ξ lehetséges értékeit véges sok, közös elemet nem tartalmazó csoportba soroljuk. Ha ξ lehetséges értékeinek száma véges és ez a szám nem túl nagy, akkor ξ minden értéke egy csoportot képvisel, a csoportosítás tehát adott. Ha ξ lehetséges értékei egy sorozatot alkotnak, akkor a nagy indexű, egyenként kis valószínűségű tagokat egy csoportba vonjuk össze, míg a többiek egyenként egy-egy csoportot képviselnek. Folytonos eloszlás esetén célszerű egyenlőközű csoportokat alkotni, a szakaszban leírt módon, ettől azonban esetenként eltérhetünk.

Jelölje r a csoportok számát, p_i a ξ valószínűségi változó hipotetikus eloszlásában annak a valószínűségét, hogy ξ értéke az i -edik csoportba essék, és v_i az i -edik csoportba eső minta-elemek számát, más szóval az i -edik csoport gyakoriságát. Nyilvánvaló, hogy fennállnak a

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1,$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_r = n$$

egyenlőségek, ahol n a minta elemszáma. Mivel hipotézisünk alapján p_i ugyanannak az eseménynek a valószínűsége, melynek v_i a gyakorisága, fennáll az $M(v_i) = np_i$ egyenlőség. A megfi-

gyelt és a várható gyakoriságok közötti eltérést célszerű egy

$$\sum_{i=1}^r c_i (v_i - np_i)^2$$

alakú mennyiséggel mérni, ahol c_1, c_2, \dots, c_r alkalmas pozitív súlyok. A fenti összeg a v_i gyakoriságok jelenléte miatt valószínűségi változó, amelynek határeloszlása ($n \rightarrow \infty$ esetén) egyszerű alakot ölt, ha az c_i súlyokat K. PEARSON nyomán a következőképpen választjuk: $c_i = 1/np_i$. Az így felírt

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} \quad (10.21.1)$$

összeget az empirikus és a (hipotetikus) elméleti eloszlás eltérése mérőszámának tekintjük. Mivel v_i binomiális eloszlású np_i várható értékkel, a MOIVRE—LAPLACE-tétel szerint a

$$z_i = \frac{v_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$$

valószínűségi változó aszimptotikusan normális eloszlású, 0 várható értékkel és $\sqrt{1-p_i}$ szórással. Ezek segítségével (10.21.1) a következő formában írható fel:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r z_i^2.$$

Ha z_1, z_2, \dots, z_r függetlenek volnának, akkor ebből már következne, hogy a χ^2 valószínűségi változó (alkalmas konstanssal szorozva) aszimptotikusan χ^2 -eloszlású. A z_i valószínűségi változók azonban nem függetlenek, sőt eleget tesznek a

$$\sum_{i=1}^r \sqrt{p_i} z_i = 0 \quad (10.21.2)$$

relációnak. Mégis, bebizonyítható, hogy a (10.21.1) valószínűségi változó aszimptotikusan χ^2 -eloszlású $r-1$ szabadságfokkal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\chi^2 < x) = K_{r-1}(x). \quad (10.21.3)$$

A szabadságfokok számának r -ről $r-1$ -re csökkenése heurisztikusan a (10.21.2) relációval magyarázható. Elég nagy n esetén $K_{r-1}(x)$ jól közelíti a χ^2 valószínűségi változó eloszlását. Arra vonatkozólag, hogy milyen nagynak kell n -nek lennie, hogy gyakorlatilag $K_{r-1}(x)$ -et a χ^2 valószínűségi változó eloszlásfüggvényének tekinthessük, azt mondhatjuk, hogy ehhez elegendő, ha $np_i \geq 10$ minden i -re vagyis n legalább a legkisebb p_i hipotetikus elméleti valószínűség reciprokának a 10-szerese.

Ezt a feltételt szem előtt tartva, a próba menete a következő. Adott kis p -hoz meghatározzuk azt a χ_p^2 számot, amelyre teljesül, hogy

$$p = 1 - K_{r-1}(\chi_p^2) \approx P(\chi^2 > \chi_p^2). \quad (10.21.4)$$

Ha a minta alapján kapott χ^2 értéke nagyobb, mint χ_p^2 , a hipotézist elvetjük. Azt mondjuk, hogy nincs ellenmondás a hipotézis és a minta között, ha $\chi^2 \leq \chi_p^2$. Sokelemű minta esetén a hipotézist elfogadhatjuk, ezzel nagy hibát nem követünk el, a fent leírt próba ui. konzisztens.

Példa. Ellenőrizzük azt a hipotézist, hogy a lottón az 1-től 90-ig terjedő számok mindegyikének egyenlő, tehát $1/90$ a valószínűsége. A lottó megindulásától kezdve, az 1961. évi 25. játékhétig bezárólag összesen 225 játékhét volt, ezek adatait vesszük alapul. Mivel minden alkalommal öt számot húznak, összesen $n = 1125$ adatunk van, ami a próba elvégzéséhez elegendő, mert $np_i = \frac{1125}{90} = 12,5 > 10$. Az egyes számok gyakoriságait az alábbi táblázat tartalmazza:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	8	14	13	18	14	18	14	17	10	11	13	17	16	17
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
9	10	12	15	14	10	11	16	15	12	17	13	11	17	7
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
10	9	12	16	13	12	17	14	10	8	9	15	9	12	16
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
14	9	12	21	6	19	9	13	13	10	10	10	9	10	9
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
11	8	8	11	12	10	17	8	12	12	20	6	15	15	19
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
9	17	14	10	14	12	13	15	10	10	11	12	9	12	10

A megfelelő χ^2 érték a következő:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{90} \frac{\left(v_i - \frac{n}{90}\right)^2}{\frac{n}{90}} = \frac{2}{100} \sum_{i=1}^{90} (2v_i - 25)^2 = 81,16.$$

Ha ezt összehasonlítjuk a χ^2 -eloszlás táblázatában a 89 szabadságfoknak megfelelő sor adataival, akkor azt látjuk, hogy a $p = 0,7$ esetben $\chi^2 = 81,6$, és amint p csökken, χ^2 növekszik, tehát semmilyen gyakorlatban használatos szinten végzett hipotézisvizsgálat nem mutat ellentmondást adataink és a hipotézis között. Sőt, ha a hipotézis igaz, akkor az esetek 70%-ában 81,6-nál nagyobb χ^2 értéket kapunk. Az egyes számok húzásainak valószínűségére tett hipotézist tehát elfogadhatjuk.

Megjegyezzük, hogy a fenti példában szereplő 1125 adatot nem egymástól függetlenül nyertük, az egymás után következő öt számot ui. egy alkalommal húzták ki, visszatevés nélkül. Ez azonban nem zavaró, mert az egy húzás során nyert öt mennyiség közti függőség nagyon kicsi, és általában, ha egy minta elemei nem is függetlenek, de a függőség nem túl erős, akkor is alkalmazható a χ^2 -próba.

10.22. Becslési illeszkedésvizsgálat. A tiszta illeszkedésvizsgálat ritkán fordul elő a gyakorlatban. Sokkal gyakoribb az az eset, amikor a p_i valószínűségek ismeretlen paramétereket tartalmaznak, melyeket a mintából becsülünk. Tegyük fel, hogy a p_i valószínűségek s számú paramétertől függenek:

$$p_i = p_i(a_1, \dots, a_s). \quad (10.22.1)$$

Ebben az esetben az ellenőrizendő hipotézis abban áll, hogy a sokaság eloszlása a (10.22.1) eloszlástípusba tartozik, *valamilyen* a_1, \dots, a_s paraméterekkel. Tehát pl. normális vagy Poisson-eloszlású-e a sokaság (mindkét esetben p_i egy csoport valószínűsége). Bizonyítás nélkül közöljük a következő tényt.

Ha $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_s$ az a_1, \dots, a_s paraméterek maximum-likelihood becslései, akkor a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{[v_i - np_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_s)]^2}{np_i(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_s)} \quad (10.22.2)$$

valószínűségi változó aszimptotikusan χ^2 -eloszlású $r-s-1$ szabadságfokkal, formulával kifejezve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\chi^2 < x) = K_{r-s-1}(x), \quad x > 0. \quad (10.22.3)$$

A próbát ugyanúgy hajtjuk végre, mint az előbb, csupán azt jegyezzük meg, hogy ez a próba is konzisztens.

Példa. Radioaktív elem α -részecskéket bocsát ki. Számlálóval mérjük egy bizonyos térrészbe t idő alatt érkező részecskék számát. Összesen $n=800$ mérést végzünk, minden alkalommal 7 másodpercig. Az alábbi táblázat mutatja az egyes k értékek gyakoriságait, ahol k a t idő alatt beérkezett részecskék száma, valamint a Poisson-eloszlásnak megfelelő elméleti értékeket:

k	n_k (gyakoriság)	$800 \frac{(3,86)^k}{k!} e^{-3,86} = np_k(\hat{\lambda})$
0	18	16,874
1	65	65,096
2	121	125,577
3	160	161,527
4	162	155,852
5	118	120,321
6	82	77,420
7	45	42,706
8	16	20,616
9	8	8,848
$k \geq 10$	5	5,163
	800	800,000

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=0}^9 kn_k + 11n_{10}}{800} = \frac{3087}{800} = 3,86.$$

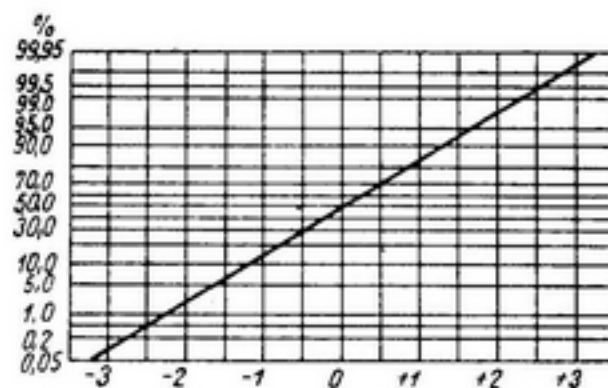
Ellenőrizni akarjuk, hogy a megfigyelt gyakoriságok eltérése a Poisson-eloszlásnak megfelelő elméleti értékektől véletlennek tekinthető-e, azaz a t idő alatt beérkezett α -részecskék száma valóban Poisson-eloszlást követ-e. χ^2 -próbát alkalmazunk: χ^2 értéke a táblázat alapján a következő:

$$\chi^2 = \sum_{k=0}^{10} \frac{(n_k - np_k(3,86))^2}{np_k(3,86)} = 2,839.$$

A csoportok száma 11 és 1 paramétert a mintából becsültünk, tehát a 10-szabadságfokú χ^2 -eloszlással kell dolgoznunk. Ennek táblázatából látható, hogy semmilyen, a gyakorlatban használatos szint mellett nem tapasztalunk szignifikáns eltérést. Sőt, mivel $\chi_{0,98}^2 = 3,059$, ezért ha a 3,86 paraméterű Poisson-eloszlású sokaságból nagyszámú, minden egyes esetben 800-elemű mintát vesszünk, akkor az esetek kb. 98%-ában, 3,059-nél nagyobb χ^2 érték adódik.

A most kapott χ^2 -érték még 3,059-nél is kisebb. Figyelembe véve még, hogy a minta elemszáma elég nagy, a hipotézist elfogadhatjuk.

Ha valamely vizsgálat azt a célt szolgálja, hogy eldöntsük, miszerint valószínűségi változónk normális eloszlású-e vagy sem, akkor azt *normalitásvizsgálatnak* nevezzük. Ennek egyik módja a becsléses illeszkedésvizsgálat. Egy másik, grafikus módszer abban áll, hogy az empirikus eloszlásfüggvényt ún. Gauss-papíron ábrázoljuk. A Gauss-papíron az $N(m, \sigma)$ eloszlás eloszlás-függvénye tetszőleges m és σ esetén egy egyenes (l. a 61. ábrát). Akármilyen normalitásvizsgálatot végezzünk is, előzetes tájékozódás érdekében célszerű $F_n(x)$ -et Gauss-papíron ábrázolni.



61. ábra

10.23. Függetlenségvizsgálat. Tekintettel arra, hogy nem csupán két mennyiségi, hanem két minőségi ismerv függetlenségéről is beszélhetünk, a problémát a következő módon fogalmazzuk meg: adott két teljes eseményrendszer: A_1, \dots, A_r ; B_1, \dots, B_s ; és ellenőrizni akarjuk azt a hipotézist, hogy e két

eseményrendszer független, azaz

$$P(A_i B_j) = P(A_i) P(B_j), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, r; \\ j = 1, \dots, s. \end{matrix} \quad (10.23.1)$$

Két valószínűségi változó függetlenségének ellenőrzése esetén az A_i és B_j események azt jelentik, hogy a változók értékei a megfelelő indexű csoportba esnek.

Tekintsünk egy n -elemű mintát, és vezessük be a következő jelöléseket:

v_{ij} az $A_i B_j$ esemény gyakorisága;

$v_{i\cdot} = \sum_{j=1}^s v_{ij}$ az A_i esemény gyakorisága;

$v_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r v_{ij}$ a B_j esemény gyakorisága;

$$p_{ij} = P(A_i B_j);$$

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^s p_{ij} = P(A_i); \quad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r p_{ij} = P(B_j).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s v_{ij} = n.$$

A v_{ij} gyakoriságokat az alábbi, ún. *kontingencia-táblába* rendezzük el:

Változók	1 2 ... S	Összeg
1	$v_{11} v_{12} \dots v_{1s}$	$v_{1\cdot}$
2	$v_{21} v_{22} \dots v_{2s}$	$v_{2\cdot}$
.
.
.
r	$v_{r1} v_{r2} \dots v_{rs}$	$v_{r\cdot}$
Összeg	$v_{\cdot 1} v_{\cdot 2} \dots v_{\cdot s}$	n

Két eset van: 1. $p_{i\cdot}$ és $p_{\cdot j}$ ismeretesek; 2. $p_{i\cdot}$ és $p_{\cdot j}$ nem ismeretesek. Az első esetben a próba nem más, mint egy tiszta illeszkedésvizsgálat; a hipotézis abban áll, hogy

$$P(A_i B_j) = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, r; \\ j = 1, \dots, s, \end{matrix}$$

tehát megalkotjuk a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(v_{ij} - np_{i\cdot} p_{\cdot j})^2}{np_{i\cdot} p_{\cdot j}}$$

valószínűségi változót, amely aszimptotikusan χ^2 -eloszlású, $rs - 1$ szabadságfokkal, és a próbát a szokásos módon elvégezzük.

Ez az eset azonban rendkívül ritka. Sokkal gyakoribb a második eset. Ekkor a

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(v_{ij} - \frac{v_{i\cdot} v_{\cdot j}}{n}\right)^2}{v_{i\cdot} v_{\cdot j}} = n \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{v_{ij}}{v_{i\cdot} v_{\cdot j}} - 1 \right) \quad (10.23.2)$$

statisztika tekinthető a próba alapjának, és erről bebizonyítható, hogy $n \rightarrow \infty$ esetén aszimptotikus χ^2 -eloszlású $(r-1)(s-1)$ szabadságfokkal. Ez ui. becsléses illeszkedésvizsgálatnak tekinthető rs számú csoport és $r+s-2$ becsült paraméter esetén (mind a $p_{i\cdot}$, mind a $p_{\cdot j}$ valószínűségek közül az egyik a többivel kifejezhető, tehát csak $r+s-2$ paraméterünk van), a szabadságfokok száma tehát $rs - (r+s-2) - 1 = (r-1)(s-1)$. A próbát a szokott módon végezzük el.

A két eseményrendszer *négyzetes kontingenciáján* a

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(p_{ij} - p_{i\cdot} p_{\cdot j})^2}{p_{i\cdot} p_{\cdot j}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot} p_{\cdot j}} - 1$$

menyiséget értjük. Ennek empirikus becslése χ^2/n , a (10.23.2) valószínűségi változó n -edrésze. Könnyen belátható, hogy

$$0 \leq \frac{\varphi^2}{q-1} \leq 1, \quad q = \min(r, s). \quad (10.23.3)$$

A $\frac{\varphi^2}{q-1}$ hányadost a két eseményrendszer függőségi mértékének tekintjük. Ennek empirikus becslése $\frac{\chi^2}{n(q-1)}$. A függőség e mértékének a következő fontos tulajdonságai vannak: 0 akkor és csak akkor, ha fennállnak a (10.23.1) egyenlőségek; ha $\frac{\varphi^2}{q-1} = 1$ és $q = \min(r, s) = r$, akkor — amint az könnyen belátható — minden j esetén van olyan i , hogy $B_j \subset A_i$. Ha ξ és η két valószínűségi változó, az A_i, B_j események pedig azt jelentik, hogy ξ az i -edik, η a j -edik értékét veszi fel, akkor ez utóbbi tulajdonság azt mondja ki, hogy $\frac{\varphi^2}{q-1} = \frac{\varphi^2}{r-1} = 1$ esetén ξ függvénye η -nak.

Példa. Csapágygyűrűk külső és belső átmérőjét ellenőrizzük. Az ellenőrzés során a gyűrűket mindkét átmérő mérete szempontjából három kategóriába soroljuk: jó, javítható, selejtes. Egy tétel minőségének ellenőrzése során találomra kivettünk 200 darabot, és ezeket mindkét méret megvizsgálása után kilenc csoportba osztottuk. Ellenőrizni akarjuk azt a feltevésünket, hogy a csapágygyűrűk külső és belső átmérőjének mérete megfelelő, javítható, vagy meg nem felelő volta független egymástól. E célból χ^2 -próbát alkalmazunk. A kontingencia-táblában az egyes gyakoriságok a következők voltak:

Külső átmérő \ Belső átmérő				
	jó	javítható	selejtes	Összeg
jó	169	8	1	178
javítható	9	4	1	14
selejtes	1	3	4	8
Összeg	179	15	6	200

Ennek alapján

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\left(v_{ij} - \frac{v_{i.} v_{.j}}{n} \right)^2}{\frac{v_{i.} v_{.j}}{n}} = 87,89.$$

Esetünkben $r=s=3$, így $(r-1)(s-1)=4$. A kapott χ^2 -érték jóval nagyobb, mint a 4 szabadságfokhoz tartozó valamennyi táblázati értéke a χ^2 -eloszlásnak, ezért a hipotézist el kell vetnünk. A függőség mértékének jellemzése céljából számítsuk ki a $\frac{\varphi^2}{q-1}$ hányadost:

$$\frac{\varphi^2}{q-1} = \frac{90,152}{200 \cdot 2} = 0,2197.$$

Ez azt mutatja, hogy a két méret pontossága a közepesnél gyengébb kapcsolatban van egymással.

10.24. Homogenitásvizsgálat. Homogenitásvizsgálatról abban az esetben beszélünk, ha el akarjuk dönteni, hogy két vagy több független minta azonos eloszlású sokaságból származik-e. Csak a két minta esetével foglalkozunk.

Mindkét valószínűségi változó értékeire ugyanazt a csoportosítást alkalmazva, jelölje r a csoportok számát. A két minta lehet különböző nagyságú is, jelöljék m és n az egyes minták elemszámait, továbbá μ_1, \dots, μ_r , ill. v_1, \dots, v_r az egyes gyakoriságokat. Ezeket célszerű az alábbi táblázatba foglalni:

μ_1	v_1	$\mu_1 + v_1$
μ_2	v_2	$\mu_2 + v_2$
...
...
...
μ_r	v_r	$\mu_r + v_r$
m	n	$m + n$

Bebizonyítható, hogy a

$$\chi^2 = mn \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i + v_i} \left(\frac{\mu_i}{m} - \frac{v_i}{n} \right)^2 \quad (10.24.1)$$

valószínűségi változó aszimptotikusan ($m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ esetén) $r-1$ -szabadságfokú χ^2 -eloszlású. Ennek alapján a próba a szokott módon elvégezhető. A gyakorlati számolás egyszerűsö-

dik, ha előbb kiszámítjuk az

$$\omega = \frac{m}{m+n}, \quad \omega_i = \frac{\mu_i}{\mu_i + \nu_i}$$

menyiségeket, amelyeknek segítségével χ^2 a következő módon írható fel:

$$\chi^2 = \frac{1}{\omega(1-\omega)} \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \omega_i - m\omega \right). \quad (10.24.2)$$

Példa. Meg akarjuk vizsgálni, van-e szignifikáns eltérés a kereső foglalkozást folytató és nem folytató asszonyok gyerekszám szerinti megoszlása között a munkás- és alkalmazott családokban. Véletlenszerűen kiválasztottunk 220 háztartást, ezekben 120 esetben az asszony kereső foglalkozást folytatott, 100 esetben nem. A két csoport gyerekszám szerinti gyakoriságai a következők voltak:

Gyerekek száma	Keresők	Nem keresők	Együtt
0	36	28	64
1	41	36	77
2	28	22	50
3	11	8	19
4	3	4	7
5 és több	1	2	3
	120	100	220

Jelen esetben $m=120$, $n=100$, $r=6$, továbbá

$$\chi^2 = mn \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i + \nu_i} \left(\frac{\mu_i}{m} - \frac{\nu_i}{n} \right)^2 = 1,189.$$

Ez a χ^2 -érték kisebb, mint az 5-szabadságfokú χ^2 -eloszlás valamennyi, próbákra alkalmazott táblázati értéke, adataink tehát nem állanak ellentmondásban azzal a hipotézissel, hogy a két eloszlás azonos.

REGRESSZIÓK

10.25. Kétváltozós regresszió. Tegyük fel, hogy van két valószínűségi változónk: ξ , η és az η valószínűségi változó értékét akarjuk ξ értéke alapján valamilyen módon becsülni. Mint általában minden konkrét, numerikus statisztikai következtést, ezt is megelőzi egy elmélet, amely abban áll, hogy ξ és η együttes elméleti eloszlására támaszkodva, felírunk egy formulát, pontosabban egy függvényt, amelynek független változója helyébe ξ konkrét értékét helyettesítve, a függő változóra kapott érték η megfelelő konkrét értékének becsléséül szolgál.

Az alapvető kérdés azonban az, hogy milyen elv alapján írjunk fel egy ilyen függvényt? Erre sokféle lehetőség kínálkozik, de úgy tűnik, hogy leghelyesebb a következőképpen eljárni. Ha csak az η valószínűségi változóval volna dolgunk, akkor η értékét $M(\eta)$ várható értékével becsülnénk. Jelen esetben azonban ξ is rendelkezésünkre áll, sőt η -ra nézve esetleg bizonyos információt tartalmaz, melyet érdemes figyelembe vennünk, η értékét ennek a ξ -re vonatkoztatott $M(\eta|\xi)$ feltételes várható értékével becsüljük. Ez a következőképpen interpretálható. Sok esetben megfigyeljük ξ és η értékeit, majd vesszük azoknak az η -ra kapott adatoknak a számtani átlagát, amelyeknek megfelelő ξ értékek az x számmal egyenlők, és ezután η értékét ezzel a számtani átlaggal becsüljük. Ez azonban csupán interpretáció és nem konkrét utasítás a numerikus számításra. A legtöbb esetben ui. a ξ -re kapott adatok között a valószínűségi változónak aránylag kevés értéke szerepel, és ha a jövőben egy, ezek-től eltérő x -szel találkozunk, nem tudunk mit tenni. Másrészt, még ha x szerepel is a ξ -re kapott értékek között, akkor is általában oly kevésszer, hogy η megfelelő értékeinek számtani átlaga aligha tekinthető $M(\eta|\xi=x)$ kielégítő közelítésének.

Ezért úgy járunk el, hogy ξ és η együttes eloszlására támaszkodva, felírjuk az x változó

$$y = M(\eta|\xi=x) \quad (10.25.1)$$

függvényét, és az ebben szereplő ismeretlen paramétereket — ha ilyenek vannak — adataink alapján becsüljük.

A (10.25.1) függvényt az η valószínűségi változó ξ -re vonatkoztatott regressziójának nevezzük.

Ha ξ és η együttes eloszlása kétdimenziós normális eloszlás, együttes sűrűségfüggvényük

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}, \quad (10.25.2)$$

ahol $m_1 = M(\xi)$, $m_2 = M(\eta)$, $\sigma_1 = D(\xi)$, $\sigma_2 = D(\eta)$, r pedig ξ és η korrelációs együtthatója, akkor ξ egy $N(m_1, \sigma_1^2)$, η pedig $N(m_2, \sigma_2^2)$ eloszlású valószínűségi változó. Jelölje $f(x)$ a ξ sűrűségfüggvényét:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}. \quad (10.25.3)$$

Az η valószínűségi változónak ξ -re vonatkoztatott $g(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvénye a 3.10. szakasz szerint a (10.25.2) és a (10.25.3) függvények hányadosa:

$$g(y|x) = \frac{h(x, y)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left(y-m_2-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1)\right)^2}. \quad (10.25.4)$$

Ez rögzített x és változó y esetén egy

$$N\left(m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1), \sigma_2\sqrt{1-r^2}\right)$$

eloszlás sűrűségfüggvénye, amiből következik, hogy

$$M(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y|x) dy = m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1). \quad (10.25.5)$$

Azt kaptuk tehát, hogy normális együttes eloszlás esetén η -nak ξ -re vonatkoztatott regressziója egy egyenes, mely keresztül megy a sík m_1, m_2 koordinátájú pontjain és iránytangense $r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$.

A (10.25.1) függvényt geometriailag ábrázolva, a kapott görbét *regressziós görbének* nevezzük, mely normális együttes eloszlás esetén az előbbiek szerint egy egyenes. Ha ez az egyenes az x -tengellyel párhuzamos, akkor ξ és η függetlenek, mert a regressziós egyenes iránytangense ($\sigma_2 > 0$ esetén) csak akkor lehet 0, ha $r=0$, márpedig normális együttes eloszlás esetén ez a tulajdonság maga után vonja a két valószínűségi változó függetlenségét.

A feltételes várható értékkel kapcsolatban említettük, hogy $M(\eta|\xi)$ valószínűségi változóként is felfogható, ez esetben ez a ξ valószínűségi változó egy függvénye, és megvan az a tulajdonsága, hogy ξ valamennyi $h(\xi)$ függvényét tekintve az

$$M[(\eta - h(\xi))^2] \quad (10.25.6)$$

várható érték akkor minimális, ha $h(\xi) = M(\eta|\xi)$. Mármint, ha ξ és η együttes eloszlása normális, akkor az a $h(x)$ függvény, melynek argumentuma helyébe a ξ valószínűségi változót téve, a (10.25.6) várható érték minimális, a (10.25.5) lineáris függvény. Ez esetben tehát a (10.25.6) várható érték abszolút, valamennyi $h(x)$ függvényre vett minimumát elérhetjük akkor is, ha csak a

$$h(x) = a + bx$$

lineáris függvényekre szorítkozunk. Ugyanez vonatkozik arra az esetre is, amikor bár ξ és η együttes eloszlása nem normális, a (10.25.1) regresszió azonban lineáris.

Függetlenül attól, hogy ez a függvény lineáris-e vagy sem, kereshetjük a ξ valószínűségi változónak azt az $a + b\xi$ lineáris függvényét, mely ξ összes lineáris függvényei közül ennek legjobb becslését szolgáltatja abban az értelemben, hogy az

$$M[(\eta - a - b\xi)^2] \quad (10.25.7)$$

várható érték minimális. Ha az $m_1 = M(\xi)$, $m_2 = M(\eta)$, $\sigma_1 = D(\xi)$, $\sigma_2 = D(\eta)$, $r = R(\xi, \eta)$ jelölést alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy (10.25.7) akkor minimális, ha

$$b = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad (10.25.8)$$

$$a = m_2 - m_1 r \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (10.25.9)$$

Az a lineáris függvény tehát, melynek argumentuma helyébe ξ -t téve, az η valószínűségi változó legjobb lineáris becslését kapjuk, a következő:

$$y = m_2 + r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - m_1), \quad (10.25.10)$$

amely felírható az

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = r \frac{x - m_1}{\sigma_1} \quad (10.25.11)$$

alakban is.

A (10.25.10) függvény geometriai képe egy egyenes, melyet regressziós egyenesnek nevezünk. Ennek $b = r \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ iránytangense pedig a regressziós együttható nevet viseli.

Szemben a (10.25.1) pontos elméleti regresszióval, a (10.25.10) függvényt lineáris regresszióval nevezük. A pontos elméleti regresszió helyett megelégedhetünk a lineáris regresszióval akkor, ha jogos az a feltételezés, hogy az utóbbi nem nagyon tér el az előbbitől. (Ennek eldöntésénél sokat segít a minta x_i, y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ értékeinek a síkon való ábrázolása. Normális együttes eloszlás esetén a kettő egybeesik. A lineáris regresszióval megvan az az előnye, hogy képlete egyszerű, míg a pontos elméleti regresszió képletének meghatározása általában igen komplikált, ha ugyan az együttes eloszlás típusa ismereténél a hiánya már eleve nem gördít akadályt e meghatározás elé.

Ha a (10.25.10) képletben x helyébe a ξ valószínűségi változót tesszük, megkapjuk az η valószínűségi változó

$$\hat{\eta} = m_2 + r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\xi - m_1) \quad (10.25.12)$$

becslését. Az $\eta - \hat{\eta}$ eltérés szórásnégyzete, ami egyben a (10.25.7) várható érték minimuma is, a következő

$$\sigma^2 = D^2(\eta - \hat{\eta}) = \sigma_2^2 (1 - r^2). \quad (10.25.13)$$

A (10.25.10) lineáris regressziós azonban még mindig elméleti. Ennek empirikus változatát megkapjuk, ha az egyes paramétereket empirikus becsléseikkel helyettesítjük. Ha

$$x_1, y_1$$

$$x_2, y_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_n, y_n$$

egy n -elemű minta, akkor a várható értékek becslései

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (10.25.14)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i;$$

a regressziós együttható becslése pedig

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (10.25.15)$$

Felírjuk még σ_1^2 , σ_2^2 és r becsléseit is:

$$\begin{aligned} s_1^{*2} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \\ s_2^* &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2; \\ \hat{r} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (10.25.16)$$

σ^2 becslésére az $s_2^{*2}(1 - \hat{r}^2)$ mennyiséget használjuk.

Ha ξ és η együttes eloszlása normális, akkor a

$$t = \frac{s_1}{s_2} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} (\hat{b} - b) \quad (10.25.17)$$

valószínűségi változó $n-2$ -szabadságfokú STUDENT-eloszlású. Ez a tény lehetővé teszi, hogy b -re konfidencia intervallumot konstruáljunk, ill. adott hipotézist ellenőrizzünk. Ha még az is teljesül, hogy $r=0$, akkor a

$$t = \sqrt{n-2} \frac{\hat{r}}{\sqrt{1-\hat{r}^2}} \quad (10.25.18)$$

valószínűségi változó $n-2$ -szabadságfokú STUDENT-eloszlású. Ez a tény lehetővé teszi az $r=0$ hipotézis ellenőrzését, ami azt jelenti, hogy ξ és η függetlenek (feltettük ui., hogy együttes eloszlásuk normális).

A mintában szereplő $x_i, y_i, i=1, 2, \dots, n$ értékek a síkon n pontot határoznak meg. Egy konkrét minta esetén felvethetjük azt a kérdést, hogy melyik az az $y=a+bx$ egyenes, amelyik ezekhez a legjobban illeszkedik a legkisebb négyzetek elve

értelmében, vagyis mely a, b számok esetén lesz a

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (10.25.19)$$

összeg minimális. Megoldásként b -re a (10.25.15), a -ra pedig az $\bar{y} - \bar{x}\hat{b}$ érték adódik, a legjobban illeszkedő egyenes tehát a (10.25.10) egyenes, ha ott az elméleti értékek helyébe azok becsléseit helyettesítjük. Ez a megjegyzés korábbi eredményeinket újabb megvilágításba helyezi.

10.26. Többváltozós regresszió. Az előző szakaszban tárgyaltakkal szemben többször előfordul az az eset, amikor egy valószínűségi változó becslésekor egynél több további valószínűségi változóra támaszkodunk. Nem ritka az az eset sem, amikor egynél több valószínűségi változót akarunk becsülni. Ekkor azonban mindegyikre külön-külön ugyanazt az eljárást alkalmazhatjuk, ezért az elméleti tárgyalás során feltesszük, hogy csak egynek az értékét akarjuk becsülni.

Jelöljük $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ a rendelkezésünkre álló valószínűségi változókat, és tegyük fel, hogy ξ_1 értékét akarjuk becsülni ξ_2, \dots, ξ_n alapján. Megállapodunk abban, hogy becslő formulaként az

$$x_1 = M(\xi_1 | \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = h(x_2, \dots, x_n) \quad (10.26.1)$$

$n-1$ -változós függvényt fogadjuk el, amelynek független változói helyébe ξ_2, \dots, ξ_n konkrét értékeit téve, a bal oldalon megkapjuk a ξ_1 valószínűségi változó $\hat{\xi}_1$ becslését.

A (10.26.1) függvényt a ξ_1 valószínűségi változó ξ_2, \dots, ξ_n -re vonatkoztatott regressziójának nevezzük.

Az $[x_2, \dots, x_n; h(x_2, \dots, x_n)]$ pontok az n -dimenziós térben egy felületen helyezkednek el, amelynek regressziós felület a neve. Ugyanúgy, mint a kétváltozós esetben, itt is fennáll az, hogy a $h(x_2, \dots, x_n)$ függvény minimalizálja az

$$M[(\xi_1 - h(\xi_2, \dots, \xi_n))^2] \quad (10.26.2)$$

várható értéket, miközben h befutja az $n-1$ -változós függvényeket.

Speciális esetben, mint pl. akkor, amikor $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ együttes eloszlása n -dimenziós normális eloszlás, a (10.26.1) regresszió az x_2, \dots, x_n változók lineáris függvénye. Ekkor a regressziós felület sík.

Regressziós síkról azonban tetszőleges együttes eloszlású valószínűségi változók esetén is beszélünk, és ezen azt az

$$x_1 = a_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \quad (10.26.3)$$

hipersíkot értjük, melyben szereplő $a_1, b_{12}, \dots, b_{1n}$ együtthatók minimalizálják az

$$M[(\xi_1 - a_1 - b_{12}\xi_2 - \dots - b_{1n}\xi_n)^2] \quad (10.26.4)$$

várható értéket.

Ez egy minimumfeladat az $a_1, b_{12}, \dots, b_{1n}$ változókra, amelynek megoldásaként a

$$b_{1k} = -\frac{C_{1k}}{C_{11}} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_k} \frac{R_{1k}}{R_{11}}; \quad (10.26.5)$$

$$a_1 = m_1 + b_{12}m_2 + \dots + b_{1n}m_n \quad (10.26.6)$$

értékek adódnak, ahol $m_k = M(\xi_k)$, $\sigma_k = D(\xi_k)$; C_{ik} és R_{ik} pedig a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók

$$C = (c_{ik}) = (M[(\xi_i - m_i)(\xi_k - m_k)])$$

kovariancia-, ill.

$$R = (r_{ik}) = \left(\frac{c_{ik}}{\sigma_i \sigma_k} \right)$$

korreláció-mátrixának előjeles aldeterminánsai. Ha ξ_1 helyett ξ_i -t becsüljük a többiek segítségével, akkor a_1 helyett a_i -t, b_{1k} helyett b_{ik} -t írunk, és ezekre a fenti principium alapján az adó-

dik, hogy

$$b_{ik} = -\frac{C_{ik}}{C_{ii}} = -\frac{\sigma_i}{\sigma_k} \frac{R_{ik}}{R_{ii}}; \quad (10.26.7)$$

$$a_i = m_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n b_{ik}m_k. \quad (10.26.8)$$

Ilyenformán a regressziós sík egyenlete

$$x_1 = m_1 - \sum_{k=2}^n \frac{C_{1k}}{C_{11}} (x_k - m_k) = m_1 - \sum_{k=2}^n \frac{\sigma_1}{\sigma_k} \frac{R_{1k}}{R_{11}} (x_k - m_k), \quad (10.26.9)$$

ill. általában

$$x_i = m_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{C_{ik}}{C_{ii}} (x_k - m_k) = m_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\sigma_i}{\sigma_k} \frac{R_{ik}}{R_{ii}} (x_k - m_k). \quad (10.26.10)$$

A b_{ik} együtthatókat *regressziós együtthatóknak* nevezzük. Ha valószínűségi változóink együttes eloszlása n -dimenziós normális eloszlás, akkor a regressziós sík egyben a (10.26.1) pontos elméleti regressziót szolgáltatja.

A ξ_i valószínűségi változó és ennek

$$\hat{\xi}_i = m_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n b_{ik}(\xi_k - m_k) \quad (10.26.11)$$

becslése közti $\eta_i = \xi_i - \hat{\xi}_i$ különbséget *maradéknak* nevezzük. Bebizonyítható, hogy ez korrelálatlan a $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók mindegyikével és

$$D^2(\eta_i) = \frac{|C|}{C_{ii}} = \sigma_i^2 \frac{R}{R_{ii}}. \quad (10.26.12)$$

E mennyiség a ξ_i valószínűségi változó $\hat{\xi}_i$ alapján történő becslésének hatásosságát jellemzi.

A b_{ik} , η_i és σ_i^2 jelölések rövidítései az ún. YULE-féle jelölésrendszernek. b_{ik} teljes jelölése $b_{i,1,\dots,i-1,i+1,\dots,k-1,k+1,\dots,n}$, az első index azt mutatja, hogy melyik változót becsüljük, a második arra a változóra utal, amely előtt éppen ez a regressziós együttható áll, ezután pontot írunk és a pont után felsoroljuk a regressziós kapcsolatban helyet foglaló további változók indexeit. Erre azért van szükség, mert néha a rendelkezésünkre álló és indexszel ellátott valószínűségi változóknak csak egy részével dolgozunk. η_i és σ_i^2 YULE-féle jelölései $\eta_{i,1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}$ ill. $\sigma_{i,1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}^2$; ahol tehát a pont után a jobb oldalon álló valószínűségi változók indexeit soroljuk fel, a sorrend tulajdonképpen lényegtelen.

Az $r_{ik} = R(\xi_i, \xi_k)$ korrelációs együttható a ξ_i és ξ_k valószínűségi változók teljes kapcsolata erősségének a mérőszáma. A kettő közvetlen kapcsolatának mérésére az ún. *parciális korrelációs együttható* szolgál. Hogy ennek a jelentőségét jobban megértsük, tekintsük a következő négy valószínűségi változót: ξ_1 a paradicsomtermés átlaga júliusban, ξ_2 a júliusi csapadékmennyiség, ξ_3 a júliusi átlagos középhőmérséklet, ξ_4 a mozilátogatók száma júliusban. ξ_1 és ξ_4 között jelentős korrelációt találunk, ui. mindkettő a ξ_2 és ξ_3 valószínűségi változókkal szoros kapcsolatban van. Egymásra gyakorolt közvetlen hatásuk azonban elhanyagolható. Az ilyen közvetlen hatások mérésére való a $\varrho_{ik} = \varrho_{i,1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,k-1,k+1,\dots,n}$ parciális korrelációs együttható, amelynek definíciója a következő: tekintsük a $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ valószínűségi változókat. Ezek segítségével elkészítjük ξ_i és ξ_k regresszió alapuló becsléseit, és az így kapott

$$\eta_{i,1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n}$$

$$\eta_{k,1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}$$

maradékok közönséges értelemben vett korrelációs együtthatóját nevezzük ξ_i és ξ_k parciális korrelációs együtthatójának. Ezáltal ξ_i és ξ_k kapcsolatából a többi változók hatása kiszűrődik.

dik. Bebizonyítható, hogy

$$\varrho_{ik} = -\frac{C_{ik}}{\sqrt{C_{ii}C_{kk}}} = -\frac{R_{ik}}{\sqrt{R_{ii}R_{kk}}}. \quad (10.26.13)$$

Az r_{ik} korrelációs együtthatót a parciálisból való megkülönböztetés céljából *totális korrelációs együtthatónak* is nevezzük.

Végül a ξ_i valószínűségi változónak és ξ_i becslésének $\varrho_i = \varrho_{i,1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}$ korrelációs együtthatóját *többszörös korrelációs együtthatónak* nevezzük. Ez a regressziós kapcsolat szorosságának a mérőszáma. Bebizonyítható, hogy

$$\varrho_i = \sqrt{1 - \frac{|C|}{\sigma_i^2 C_{ii}}} = \sqrt{1 - \frac{|R|}{R_{ii}}}. \quad (10.26.14)$$

ϱ_i akkor és csak akkor 1, ha $\hat{\xi}_i = \xi_i$, továbbá akkor és csak akkor 0, ha ξ_i korrelálatlan a többi ξ_j valószínűségi változók mindegyikével.

A gyakorlati számításban a regressziós sík képletében szereplő elméleti értékek általában nem ismeretesek, ezeket egy N -elemű

$$x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}$$

$$x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2}$$

$$\dots \dots \dots ! \dots \dots$$

$$x_{1N}, x_{2N}, \dots, x_{nN}$$

minta alapján becsüljük. E séma i -edik oszlopa egy N -elemű mintát alkot a ξ_i valószínűségi változóra nézve, ennek felhasználásával készítjük el az m_i és σ_i^2 mennyiségek \bar{x}_i és σ_i^{*2} empirikus becsléseit.

A c_{ik} kovariancia torzítatlan becslése a következő:

$$\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k), \quad (10.26.15)$$

az r_{ik} korrelációs együttható becslése pedig

$$\frac{\sum_{j=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_k)}{\left(\sum_{j=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \sum_{j=1}^N (x_{kj} - \bar{x}_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (10.26.16)$$

Ez utóbbi becslés torzított.

A regressziós együtthatókat, továbbá a parciális és többszörös korrelációs együtthatókat pedig úgy becsüljük, hogy ezek képleteibe a most említett becsléseket egyszerűen beírjuk.

Figyelembe véve, hogy az inverz-mátrix definíciója értelmében az R korreláció-mátrix inverze a következő

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{R_{11}}{|R|} & \frac{R_{12}}{|R|} & \dots & \frac{R_{1n}}{|R|} \\ \frac{R_{12}}{|R|} & \frac{R_{22}}{|R|} & \dots & \frac{R_{2n}}{|R|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{R_{1n}}{|R|} & \frac{R_{2n}}{|R|} & \dots & \frac{R_{nn}}{|R|} \end{pmatrix}, \quad (10.26.17)$$

az R^{-1} mátrix ismeretében a jellemző adatok már igen egyszerű számolással megkaphatók. Pl. ϱ_i -t (10.26.14) szerint úgy kapjuk meg, hogy az R^{-1} mátrix bal felső sarkában álló elem reciprokát 1-ből levonjuk, és a kapott számnak vesszük a (pozitív) négyzetgyökét. Attól függően, hogy közülük soknak vagy kevésnek az értékét akarjuk meghatározni, döntjük el, hogy érdemes-e a korreláció-mátrixot invertálni, vagy egyszerűbb a közvetlen számítás. Sok változó esetén mindenesetre az invertálás látszik előnyösebbnek a determinánsokkal való számolás helyett. R^{-1} helyett természetesen C^{-1} -gyel is dolgozhatunk.

Ha a mintában szereplő numerikus adatokat tekintjük, és keressük azt az

$$x_1 = a_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \quad (10.26.18)$$

síkot, mely az n -dimenziós tér $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})$, $i=1, 2, \dots, N$ pontjaira a legkisebb négyzetek értelmében a legjobban illeszkedik, vagyis amelyre a

$$\sum_{i=1}^n (x_{1i} - a_1 - b_{12}x_{2i} - \dots - b_{1n}x_{ni})^2 \quad (10.26.19)$$

négyzetösszeg minimális, akkor megoldásként a (10.26.9) regressziós síkot kapjuk azzal a különbséggel, hogy az egyes jellemzők helyébe ezek empirikus becslése kerül. Ez a megoldás tehát ugyanarra az eredményre vezet.

E könyvnek nem célja a regressziós problémák kimerítő tárgyalása, megemlítjük azonban, hogy vannak olyan problémák, melyekben n változó szerepel ugyan, közülük azonban csak egy, mondjuk ξ_1 valószínűségi változó, a többi nem. Az ilyen esetekben a mintát úgy tekintjük, mint az x_2, \dots, x_n változók különböző (legtöbbször általunk választott) értékrendszereihez tartozó és a véletlen által torzított, megfelelő ξ_1 értékek összességét. Ha most feltételezhetjük azt, hogy az $M(\xi_1)$ várható érték, és az x_2, \dots, x_n változók között egy

$$M(\xi_1) = a_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \quad (10.26.20)$$

lineáris kapcsolat áll fenn, amelyben szereplő állandókat a legkisebb négyzetek elve alapján becsüljük, vagyis úgy választjuk, hogy a (10.26.19) négyzetösszeggel formailag megegyező négyzetösszeg minimális legyen, akkor eredményként a (10.26.7 és 8) értékek empirikus változatait kapjuk. Igazi empirikus átlag és szórásnégyzet csak \bar{x}_1 és s_1^2 lesz, a többi adat elveszti korábbi értelmét. Számítástechnikailag ez az eset tehát nem különbözik a tényleges regressziótól, az interpretáció azonban más.

Gyakran előfordul olyan eset is, amikor két valószínűségi változónk van, ξ , η , és keressük ξ -nek azt az

$$a + b_1\xi + b_2\xi^2 + \dots + b_n\xi^n \quad (10.26.21)$$

n -edfokú polinomját, mely η -t a legjobban közelíti abban az

értelemben, hogy az

$$M[(\eta - a - b_1\xi - b_2\xi^2 - \dots - b_n\xi^n)^2] \quad (10.26.22)$$

várható érték minimális. Ha jelöléseinket a következőképpen módosítjuk: $\eta = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, $\xi^2 = \xi_3$, ..., $\xi^n = \xi_{n+1}$; $a = a_1$, $b_1 = b_{12}$, ..., $b_n = b_{1, n+1}$, akkor az $n+1$ -változós lineáris regresszió problémája áll előttünk, ilyenformán a (10.26.22) várható értéket minimalizáló állandókat a (10.26.7 és 8) képletek szolgáltatják (n helyett $n+1$ -et írva), csupán azt kell figyelembe vennünk, hogy mit jelentenek most $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$. Ha $n \geq 4$, a szükséges számítások bonyolulttá válnak, ez esetben a közönséges polinom módszere helyett az ún. ortogonális polinom módszerét ajánljuk. A (10.26.22)-t minimalizáló konstansokkal felírt

$$y = a + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

n -edfokú függvényt az η valószínűségi változó ξ -re vonatkoztatott n -edfokú regressziójának nevezzük. Használatos a *parabolikus regresszió* név is.

Példa. A magyar Duna vízgyűjtője Ausztriában és Bajorországban fekszik. Ha itt jelentős mennyiségű csapadék esik, akkor a Dunán árhullám vonul végig, melynek pl. Budapestre vonatkozó tetőző vízállását előre akarjuk jelezni. A probléma igen alapos és körültekintő vizsgálatot igényel,¹⁹ erre itt részletesen nem térhetünk ki, hanem megelégszünk azzal, hogy a regresszió illusztratív példaként egy leegyszerűsített eljárást ismertessünk. Változóink a következők:

ξ_1 az árhullám tetőző vízállása Budapestnél, csak a jelentősebbeket véve figyelembe,

ξ_2 az árhullámot kiváltó csapadék, mely 15 osztrák és bajor területen elhelyezett állomás adatainak a számtani átlaga,

ξ_3 a Duna vízállása Budapestnél az árhullámot kiváltó esőzés kezdetekor.

¹⁹ Vö. K. SZÉSZTAY, Einige Methoden der Vorhersage der Abflussverhältnisse, Vizgazdálkodási Tudományos Kutató Intézet, 1961.

Feladatunknak tekintjük a ξ_1 valószínűségi változó regresszióján alapuló becslését a ξ_2 és ξ_3 valószínűségi változók bevonásával. Részletesebb vizsgálat esetén még további változókat is bevonnak, látni fogjuk azonban, hogy a regressziós kapcsolat még így is elég szorosnak mutatkozik. Mind a konkrét adatok, mind pedig az elméleti megfontolás alátámasztják azt, hogy az $M(\xi_1 | \xi_2 = x_2, \xi_3 = x_3)$ regresszió, legalábbis közelítőleg lineáris. Eszerint nem követünk el nagy hibát, ha eleve lineáris regresszióján alapuló becslést konstruálunk ξ_1 -re. Rendelkezésünkre áll egy 26 elemű minta, melyet az alábbi táblázat tartalmaz

Budapestnél az árhullám tetőző	időpontja (nap)	vízállása (cm)	csapadék (mm)	Budapesti vízállás az esőzés kezdetén
1	1896.8.14	590	58	405
2	1896.8.20	660	52	450
3	1897.8.8	780	133	350
4	1899.9.22	770	179	285
5	1903.7.15	710	98	330
6	1906.7.20	640	72	400
7	1907.5.2	670	72	550
8	1907.6.29	520	43	480
9	1907.7.21	660	62	450
10	1912.5.31	690	67	610
11	1912.7.27	500	64	380
12	1912.8.4	460	33	460
13	1912.9.16	610	57	425
14	1912.9.21	710	62	560
15	1914.7.14	620	54	420
16	1914.7.24	660	48	620
17	1918.7.1	620	86	390
18	1918.8.15	590	74	350
19	1926.6.26	740	95	570
20	1926.7.1	730	44	710
21	1926.7.17	720	53	700
22	1926.8.6	720	77	580
23	1926.8.14	640	46	700
24	1954.7.18	805	123	560
25	1955.6.26	510	26	370
26	1955.7.16	673	62	430

A táblázat alapján

$$\bar{x}_1 = 653,77 \text{ cm}, \quad s_1^* = 88,36 \text{ cm},$$

$$\bar{x}_2 = 70,77 \text{ mm}, \quad s_2^* = 33,21 \text{ mm},$$

$$\bar{x}_3 = 482,12 \text{ cm}, \quad s_3^* = 121,61 \text{ cm},$$

az empirikus korrelációmátrix a következő (a gyakorlatban kényelmi okokból R -et írunk \hat{R} helyett; hasonlóan járunk el a többi mennyiségnél is):

$$R = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,6563 & 0,2776 \\ 0,6563 & 1,0000 & -0,3730 \\ 0,2776 & -0,3730 & 1,0000 \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsára és előjeles aldeterminánsaira az alábbi értékeket kapjuk:

$$|R| = 0,2172,$$

$$R_{11} = 0,8608, \quad R_{12} = R_{21} = -0,7598,$$

$$R_{22} = 0,9229, \quad R_{13} = R_{31} = -0,5224,$$

$$R_{33} = 0,5693, \quad R_{23} = R_{32} = 0,5552.$$

Ennek alapján

$$b = 274,99, \quad \varrho = 0,86,$$

$$b_{12} = 23,48, \quad \varrho_{12} = 0,85,$$

$$b_{13} = 0,44, \quad \varrho_{13} = 0,75,$$

$$\varrho_{23} = -0,77.$$

A regressziós sík a következő

$$x_1 = 274,99 + 2,35x_2 + 0,44x_3,$$

ahová x_1 és x_3 cm-ben, x_2 pedig mm-ben helyettesítendő. A ϱ többszörös korrelációs együttható elég nagynek mutatkozik, tehát a változók közti lineáris kapcsolat elég szoros. Ugyanerre utal R determinánsának aránylag alacsony értéke.

x_2 és x_3 helyébe a jövőben ξ_2 és ξ_3 konkrét értékeit helyettesítve, a baloldalon megkapjuk ξ_1 becslését, $\hat{\xi}_1$ -t. A $\xi_1 - \hat{\xi}_1$ maradék szórása $\sigma = 43,52$ cm.

MINTAVÉTEL VÉGES SOKASÁGBÓL

10.27. Egyszerű véletlen mintavétel véges sokaságból. Vizsgáljunk egy véges, N számú egyedből álló sokaságot. Mindegyik egyedhez tartozik egy számérték, jelöljük ezeket X_1, X_2, \dots, X_N . E számok között lehetnek egyenlők is. *Egyszerű véletlen mintavételnek nevezzük $n < N$ számú egyed olyan egymás utáni, visszatevés nélküli kiválasztását, amelynek során minden egyes lépésben a még a sokaságban levő egyedek egyenlő valószínűséggel kerülnek kiválasztásra.* Egy másik módja az egyszerű véletlen mintavételnek, amikor n számú egyedet egyidejűleg választunk ki, mégpedig minden ilyen egyed n -est egyenlő, azaz $1/\binom{N}{n}$ valószínűséggel. Valamennyi formula és számszerű eredmény, amelyet e két mintavétellel kapcsolatban kapunk, ugyanaz, az elméleti tárgyalásban azonban a kettő között mégis különbség van. Az első esetben ui. a kísérletnek a sorrend fontossága miatt

$$N(N-1)\dots(N-n+1) = \binom{N}{n} n!,$$

a másik esetben pedig csak

$$\binom{N}{n}$$

számú lehetséges kimenetele van. Mi a tárgyalásban az előző felfogásmódot követjük.

Jelöljük x_1, x_2, \dots, x_n az egyedek egymás utáni kiválasztása során nyert számértékeket. Ezek egymástól függő, de azonos eloszlású, sőt ekvivalens valószínűségi változók, mindegyik el-

oszlása megegyezik annak a ξ valószínűségi változónak az eloszlásával, mely az egyed véletlenszerű kiválasztása során kapott számértéket adja. Ha X_1, X_2, \dots, X_N mind különbözők, akkor ξ ezek mindegyikét $\frac{1}{N}$ valószínűséggel veszi fel, egyébként pedig

$$P(\xi = X_i) = \frac{k}{n}, \quad (10.27.1)$$

ahol k az X_i értéknek az X_1, X_2, \dots, X_N számok közötti előfordulási számával egyenlő. A ξ valószínűségi változó eloszlása egyben a sokaság eloszlása. A várható érték és a szórásnégyzet definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\bar{X} = M(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i; \quad (10.27.2)$$

$$\sigma^2 = D^2(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2. \quad (10.27.3)$$

Az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók összességét a sokaságból vett n -elemű mintának nevezzük. E szakaszban az a célunk, hogy a sokaság várható értékének, az X_i számok számtani átlagának becslésével foglalkozzunk. Igen fontos gyakorlati probléma az is, hogy a sokaságban előforduló, bizonyos típusú egyedek számának, az összes egyedek számához, N -hez viszonyított arányát becsüljük. Ez az ún. *aránybecslés* azonban elméletileg nem különbözik \bar{X} becslésétől; ha ui. X_1, X_2, \dots, X_N gyanánt 1-et, ill. 0-t írunk aszerint, hogy az egyed a szóban forgó kategóriába tartozik vagy nem, akkor \bar{X} éppen a sokaságbeli arányt adja.

\bar{X} becslésére az x_1, x_2, \dots, x_n valószínűségi változók

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (10.27.4)$$

számtani átlagát választjuk, amelynek várható értéke \bar{X} -sal

egyenlő:

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i) = \frac{1}{n} n\bar{X} = \bar{X}. \quad (10.27.5)$$

\bar{x} tehát torzítatlan becslése \bar{X} -nak.

Határozzuk meg \bar{x} szórását. Az x_i és x_j ($i \neq j$) valószínűségi változók kovarianciája a következő:

$$\begin{aligned} M[(x_i - \bar{X})(x_j - \bar{X})] &= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{k < l} (X_k - \bar{X})(X_l - \bar{X}) = \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left[\left(\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X}) \right)^2 - \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 \right] = -\frac{\sigma^2}{N-1}, \end{aligned}$$

ennek alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} D^2(\bar{x}) &= M\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{X}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} M\left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n\sigma^2 - 2 \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{N-1} \right), \end{aligned}$$

ennél fogva

$$D^2(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n-1}{N-1}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}. \quad (10.27.6)$$

A véges és végtelen sokaságból vett n -elemű minták szórásai tehát a $\sqrt{1 - \frac{n-1}{N-1}} \approx \sqrt{1 - \frac{n}{N}}$ korrekciós faktorban különböznek egymástól. Mivel ez mindig 1-nél kisebb, véges sokaság esetén \bar{x} szórása kisebb, mint az ugyanilyen szórású végtelen sokaságból, ill. ugyanebből a sokaságból, de visszatevéssel vett n elemű minta számtani átlagának a szórása. Ha az X_i értékek mind 1-gyel vagy 0-val egyenlők, és P az 1 számértékű egyedek sokaságbeli aránya, akkor ξ is csak az 1 és 0 értékeket veszi

fel P , ill. $Q = 1 - P$ valószínűséggel, következésképpen

$$\sigma = D(\xi) = \sqrt{PQ} \quad (10.27.7)$$

és így a $p = \bar{x}$ mintabeli arány szórása megegyezik a hipergeometrikus eloszlás szórásának $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -szeresével. Ennek így is kell lennie, mert $n\bar{x}$ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó.

Foglalkozzunk most a minta szórásnégyzetével, melyet az alábbi egyenlőséggel definiálunk:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (10.27.8)$$

Ennek várható értékét az előbbiek alapján már könnyen meghatározhatjuk. Ugyanis az

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 - (\bar{x} - \bar{X})^2$$

egyenlőség mindkét oldalán várható értéket véve, az adódik, hogy

$$M(s^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D^2(x_i) - D^2(\bar{x}) = \frac{1}{n} n\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right),$$

tehát

$$M(s^2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1} \sigma^2. \quad (10.27.9)$$

Ebből következik, hogy az

$$s^{*2} = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (10.27.10)$$

ún. korrigált empirikus szórásnégyzet torzítatlan becslése σ^2 -nak.

Visszatérve \bar{X} becslésének problémájára, a centrális határeloszlástétel egyik általunk nem tárgyalt változata alapján, elég nagy n esetén \bar{x} közelítően normális eloszlású. Az is bebizonyítható, hogy N -hez relatíve kicsi, de egyébként elegendően nagy n esetén a

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{X}}{s^*} \quad (10.27.11)$$

valószínűségi változó közelítően $N(0, 1)$ eloszlású, tehát

$$P\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - \bar{X}|}{s^*} \leq \lambda\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1. \quad (10.27.12)$$

Ebből pedig következik, hogy az

$$\bar{x} \pm \lambda \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \frac{s^*}{\sqrt{n}} \quad (10.27.13)$$

határokkal rendelkező intervallum közelítőleg $(2\Phi(\lambda) - 1)$ 100%-os konfidencia-intervallum az \bar{X} átlagra. (10.27.13)-ban $\frac{n-1}{N-1}$

helyett az ettől lényegtelenül különböző $\frac{n}{N}$ -et írtunk. A gyakorlati számolás során s^* kifejezésében is $\frac{N-1}{N}$ helyett vehetünk 1-et.

Aránybecslésnél \bar{X} helyett P -t, \bar{x} helyett p -t írva, a binomiális eloszlás paraméterére vonatkozó konfidencia-intervallumnál alkalmazott megfontoláshoz analóg módon azt kapjuk, hogy a $(f = n/N)$

$$\frac{p + \frac{\lambda^2(1-f)}{2n} \pm \frac{\lambda\sqrt{1-f}}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p) + \frac{\lambda^2(1-f)}{4n}}}{1 + \lambda^2(1-f)/n} \quad (10.27.14)$$

határokkal bíró intervallum $(2\Phi(\lambda) - 1)$ 100%-os konfidencia-intervallum az ismeretlen P arányra. Hasonlítsuk össze ezt a (10.15.2 és 3) képletekkel. Ha $\frac{1}{n^2}$ elhanyagolható $\frac{1}{n}$ -hez képest, akkor e határok közelítően

$$p \pm \lambda \sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{p(1-p)}{n}}. \quad (10.27.15)$$

10.28. Előírt pontosságú becsléshez szükséges mintanagyság meghatározása. Kétféle pontosságot írhatunk elő. Egyrészt azt, hogy legfeljebb milyen nagy abszolút, vagy relatív hibát engedünk meg a szóban forgó elméleti értéknek a minta alapján végzett becslésekor, másrészt előírhatunk egy (általában 1-hez közel álló) valószínűségi szintet, mely annak a valószínűsége, hogy a becslés ténylegesen nem haladja meg az előbbi előírt abszolút vagy relatív hibát. E két előírt számhoz tartozik egy olyan számérték, amellyel egyenlő nagyságú vagy nála nagyobb n mintaelemszám esetén a fenti követelmény teljesül.

Említettük, hogy eléggé nagy n esetén \bar{x} normális eloszlású. Mivel \bar{x} várható értéke X , szórásnégyzete pedig a (10.27.6) alatti mennyiség, következik, hogy az

$$\frac{\bar{x} - X}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}} \quad (10.28.1)$$

valószínűségi változó közelítően $N(0, 1)$ -eloszlású. Ebből egyszerű megfontolással adódik, hogy az

$$\bar{x} \pm \lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \quad (10.28.2)$$

végpontokkal ellátott intervallum közelítőleg $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséggel lefedi az \bar{X} értéket. A $2\Phi(\lambda) - 1$ valószínűséget előírva, meghatározhatjuk a megfelelő λ -t. \bar{X} és \bar{x} eltérése nem nagyobb, mint ε , ha a (10.28.2) intervallum félhossza

nem nagyobb ε -nál, vagyis

$$\lambda \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \leq \varepsilon. \quad (10.28.3)$$

Ezt az egyenlőtlenséget n -re megoldva, azt kapjuk, hogy

$$n \geq \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}}, \quad n_0 = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (10.28.4)$$

Ha a sokaság végtelennek tekinthető, vagyis $\frac{n}{N}$ elhanyagolhatóan kicsiny, akkor a (10.28.4) egyenlőtlenséget n -re megoldva, azt kapjuk, hogy $n \geq n_0$. n_0 tehát (ill. nem egész n_0 esetén az n_0 utáni legkisebb egész szám) az előírásoknak megfelelő mintaelemszám végtelen sokaság esetén, véges sokaság esetén azonban ennél kisebb minta is elegendő, ezt fejezi ki a (10.28.4) egyenlőtlenség. Ha nem az ε , hanem a $d = \frac{\varepsilon}{X}$ maximális megengedett relatív hibát írjuk elő, akkor analóg megfontolással az n mintaelemszámra az adódik, hogy

$$n \geq \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}}, \quad n_0 = \frac{\lambda^2 \cdot \sigma^2}{d^2 \cdot \bar{X}^2}. \quad (10.28.5)$$

Itt n_0 szintén a végtelen sokaság esetén szükséges mintaelemszámot szolgáltatja.

Aránybecslésekor $X = P$; $\sigma^2 = P(1 - P)$, n_0 tehát a (10.28.4) és a (10.28.5) formulákban a következőképpen specializálódik:

$$n_0 = \lambda^2 \frac{P(1 - P)}{\varepsilon^2}; \quad (10.28.6)$$

$$n_0 = \lambda^2 \frac{1 - P}{Pd^2}. \quad (10.28.7)$$

A (10.28.4) formulában a sokaság σ^2 szórásnégyzete, a (10.28.5) formulában pedig a sokaság $\frac{D^2(\xi)}{M^2(\xi)} = \frac{\sigma^2}{\bar{X}^2}$ relatív szórásnégyzete szerepel. Úgy tűnik, hogy ez circulus vitiosus, mert ha pl. aránybecslés esetén ismerjük a $\sigma^2 = P(1-P)$ mennyiséget, ebből P meghatározható, és nincs szükségünk mintavételre. Formuláink azonban mégsem tartalmatlanok. A gyakorlatban ui. aránybecslés esetén P értékével kapcsolatban bizonyos információ többnyire rendelkezésünkre áll, pl. tudjuk azt, hogy $0,2 \leq P \leq 0,4$; és a mintavétel azt célozza, hogy a P arányt ennél pontosabban határozzuk meg. Figyelembe véve, az $y = x(1-x)$ ($0 \leq x \leq 1$) függvény alakját, a (10.28.6) egyenlőséggel értelmezett n_0 -ra azt kapjuk, hogy

$$0,16 \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2} \leq n_0 \leq 0,24 \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}$$

és így, ha

$$n \geq \frac{0,24 \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}}{1 + 0,16 \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{N}} \cong \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}},$$

akkor a szükséges mintaelemszám biztosítva van. Analóg módon járunk el, ha ε helyett d -t írjuk elő.

Ha nem arányt becsülünk, hanem egy \bar{X} átlagot, akkor megtehetjük azt, hogy egy korábbi mintavétel során kapott σ^2 , ill. $\frac{\sigma^2}{\bar{X}^2}$ értéket elfogadunk, vagy előbb egy kis minta alapján ezeket becsüljük, és az így kapott n szolgál az \bar{X} becsléséhez veendő minta elemszámaként. Ilyenkor célszerű az abszolút hibát előírni, mert kis minta alapján $\frac{\sigma^2}{\bar{X}^2}$ becslése általában pontosabb, mint σ^2 becslése. Ha a most leírt utat követjük, akkor n értéke szintén a véletlentől függ, ez esetben tehát a

követelményeknek megfelelő mintaelemszámot is csak becsüljük. Ezt az eljárást a *mintanagyság becslésének* nevezzük.

Az egyszerű véletlen mintavétel nem az egyetlen módja egy véges sokasággal kapcsolatos információ szerzésének. A többi, rétegezett, csoportos, többlépcsős stb. mintavételek azonban mind ezen alapulnak. Utóbbiakkal e könyv keretein belül nem foglalkozunk.

10.29. Feladatok. 1. A 3.20. szakasz 7. feladatának megoldására támaszkodva bizonyítsuk be a (10.8.7) egyenlőségeket.

2. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, a)$ intervallumban, ahol a az ismeretlen paraméter. Mutassuk meg, hogy az a paraméter maximum likelihood becslése $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ és határozzuk meg a torzítás értékét, tehát a becslés várható értékének és az a -nak a különbségét.

3. A következő 11 elemű mintát egy ismeretlen szórású normális eloszlású sokaságból vettük: 1; 2,5; 4,3; 4,6; 4,7; 4,9; 5; 5,3; 5,4; 6. Határozzuk meg a várható érték 95%-os megbízhatósági határait.

4. A MOIVRE-LAPLACE-tételre támaszkodva bizonyítsuk be a (10.21.3) határértékrelációt az $r=2$ esetben.

5. Egy pénzdarabot 600-szor feldobtunk és 285 esetben volt fej az eredmény. Vizsgáljuk meg a χ^2 -próba segítségével, van-e ellentmondás a $p = \frac{1}{2}$ hipotézis és adataink között.

6. Két valószínűséget akarunk összehasonlítani homogenitásvizsgálat segítségével. Ez megfelel az $r=2$ esetnek. Az első esetben $m=500$ kísérletből $\mu_1=340$, a második esetben $n=400$ kísérletből $\nu_1=248$ gyakoriság adódott. Van-e ellentmondás a hipotézis és adataink között.

7. Tekintsük a ξ, η valószínűségi változópárra vonatkozó alábbi 10-elemű mintát:

x : 1; 2; 2,5; 3; 5; 5,6; 5,8; 6; 9; 10,

y : 3; 4,5; 6,3; 7; 8; 18; 16,8; 18; 21; 20.

A (10.25.14) és (10.25.15) becslésekre támaszkodva határozzuk meg a regressziós egyenest. Mennyi lesz η becslése, ha $\xi=12$.

8. Bizonyítsuk be, hogy a (10.25.19) négyzetösszeget minimalizáló b -re és a -ra \hat{b} ill. $\bar{y} - \bar{x}\hat{b}$ adódik.

9. Bizonyítsuk be az analóg állítást a (10.26.19) négyzetösszeggel kapcsolatban.

10. Egy 10 000 készterméket tartalmazó tételben levő selejtesek P arányát egyszerű véletlen mintavétellel akarjuk becsülni. Milyen kiválasztási arány esetén tudjuk biztosítani, hogy a becslés relatív hibája 95% valószínűséggel nem haladja meg a 10%-ot.

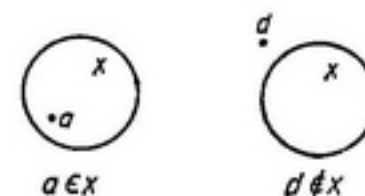
FÜGGELÉK

- 1. Halmazelméleti alapfogalmak és összefüggések**
- 2. A kombinatorika elemei**
- 3. A gamma-függvény**

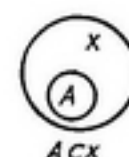
1. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK ÉS ÖSSZEFÜGGÉSEK

Halmaznak bizonyos elemek egy jól meghatározott összességét nevezzük. E helyen a halmazokat latin nagybetűkkel, a halmazok elemeit latin kisbetűkkel fogjuk jelölni, ehhez azonban hozzátesszük, hogy ha egy halmazt elemeinek felsorolásával adunk meg, akkor a felsorolt elemeket kapcsolt zárójelek közé téve, ez is a szóban forgó halmaz egy jelölésmódja. Tehát pl. az 1, 2, 3 számokból alkotott halmazt így is jelölhetjük: $\{1, 2, 3\}$.

Tekintsünk egy $X = \{a, b, c, \dots\}$ halmazt. Azt, hogy a eleme X -nek, más szóval a hozzátartozik X -hez, a következő módon jelöljük: $a \in X$, a d nem eleme X -nek állítás rövid jelölése pedig: $d \notin X$ (l. a 62. ábrát). Ha egy A halmaz minden eleme egyben eleme X -nek is, akkor azt mondjuk, hogy A *részhal-maza* X -nek; ennek jelölése $A \subset X$ (l. a 63. ábrát). Ha $A \subset X$,



62. ábra



63. ábra

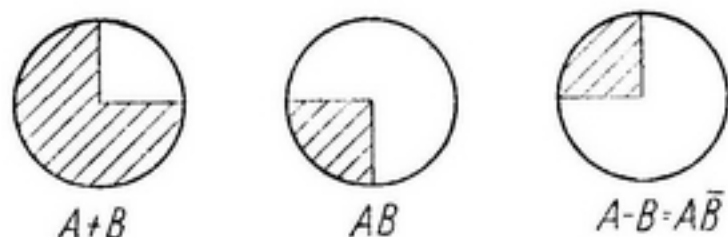
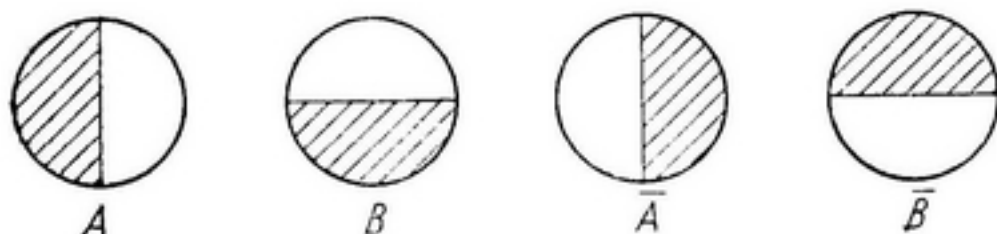
de X -nek van olyan d eleme, mely nem eleme A -nak, akkor azt mondjuk, hogy A *valódi részhal-maza* az X halmaznak. Az X halmaz szintén részhal-maza önmagának, erre azt mondjuk, hogy nem valódi részhal-maz. Ha egy részhal-maz csak az egyetlen a elemből áll, akkor ezt úgy jelöljük, hogy a -t zárójelbe tesszük: $\{a\}$; erre a megkülönböztetésre azért van szük-

ség, mert a halmazelmélet és a részhalmaz fogalmilag különbözők. Nyilvánvaló, hogy ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$.

Az A és B halmazok $A+B$ összege, vagy egyesítése (l. a 64. ábrát) azoknak az elemeknek az összessége, amelyek A és B közül legalább az egyikhez hozzátartoznak, tehát pl.

$$A = \{1, 2, 4\}, \quad B = \{2, 7, 8, 9\};$$

$$A+B = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}.$$



64. ábra

Nyilvánvaló, hogy fennállnak a következő egyenlőségek:

$$A+A=A \quad (\text{idempotencia});$$

$$A+B=B+A \quad (\text{kommutativitás});$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad (\text{asszociativitás})$$

Ez utóbbi tulajdonság lehetővé teszi az egyszerűbb $A+B+C$ írásmódot, ebből félreértés nem származhatik. Azt, hogy $A \subset B$, a halmazok összeadása segítségével oly módon is kifejezhet-

jük, hogy $A+B=B$. Beszélhetünk tetszőlegesen sok, mégpedig véges vagy végtelen sok halmaz összegéről egyaránt. Az A_α halmazok egyesítését így jelöljük: $\sum_\alpha A_\alpha$, és ezen azoknak az elemeknek az összességét értjük, amelyek legalább egy A_α -hoz hozzátartoznak.

Az A és B halmazok AB szorzatán vagy közös részén (l. a 64. ábrát) azoknak az elemeknek az összességét értjük, amelyek mind A -hoz, mind B -hez hozzátartoznak, tehát pl.

$$A = \{1, 2, 4\}; \quad B = \{2, 4, 6\}; \quad AB = \{2, 4\}.$$

Nyilvánvaló, hogy fennállnak a következő egyenlőségek

$$AA=A \quad (\text{idempotencia});$$

$$AB=BA \quad (\text{kommutativitás});$$

$$A(BC)=(AB)C \quad (\text{asszociativitás}).$$

Ez utóbbi egyenlőség lehetővé teszi az egyszerűbb ABC írásmódot. Ebből félreértés nem származhatik.

Azt, hogy $A \subset B$, a halmazok szorzása segítségével oly módon is kifejezhetjük, hogy $AB=A$. Beszélhetünk tetszőlegesen sok, mégpedig véges vagy végtelen sok halmaz szorzatáról is. Az A_α halmazok $\prod_\alpha A_\alpha$ szorzata azoknak az elemeknek az összessége, amelyek mindegyik A_α -hoz hozzátartoznak.

Egyesítése bármely két halmaznak van. Abból a célból, hogy bármely két vagy esetleg több halmaz szorzatáról is beszélhessünk — még akkor is, ha nincs közös elemük —, bevezetünk egy ideális, tehát csupán szimbolikus halmazt, amelyet *üres halmaznak* nevezünk. Erre azt mondjuk, hogy nincs eleme, továbbá minden halmaz részhalmazának tekintjük, és O -val jelöljük. Ha tehát az A és B halmazoknak nincs közös eleme, akkor ezt a következőképpen fejezzük ki:

$$AB=O.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy A és B idegen (diszjunkt) halmazok.

Mivel O -nak nincs eleme, fennállnak az alábbi egyenlőségek

$$A + O = A;$$

$$AO = O.$$

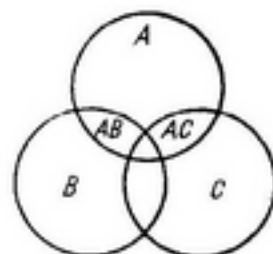
Az összeadás és a szorzás műveletét összekapcsolja az

$$A(B + C) = AB + AC$$

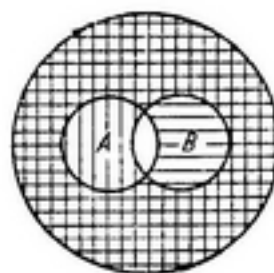
ún. disztributív törvény, melyet a 65. ábrán szemléltetünk. E törvény általánosítása a következő:

$$A \sum_{\alpha} B_{\alpha} = \sum_{\alpha} AB_{\alpha}.$$

Legyen $A \subset X$. Az A halmaz X -re vonatkozó kiegészítő- vagy komplementum-halmazán X azon elemeinek az összességét ért-



65. ábra



$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

66. ábra

jük, amelyek nem tartoznak A -hoz. Ezt a halmazt \bar{A} -sal jelöljük (l. a 64. ábrát). Általában halmazokkal kapcsolatos vizsgálatokat egy adott X halmazon belül végzünk, melynek a többi halmaz részhalmaza, ezért a fenti \bar{A} jelölés, amely nem utal az X alaphalmazra, nem vezet félreértésre. Nyilvánvaló, hogy

$$A + \bar{A} = X; \quad A\bar{A} = O;$$

$$\bar{\bar{X}} = O; \quad \bar{O} = X.$$

Az Olvasó könnyen meggyőződhet az alábbi egyenlőségek helyességéről (l. a 66. ábrát):

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B};$$

$$\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B},$$

általában

$$\overline{\prod_{\alpha} A_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \bar{A}_{\alpha},$$

$$\overline{\sum_{\alpha} A_{\alpha}} = \prod_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}.$$

Az A és B halmazok $A - B$ különbségét a következő egyenlőséggel értelmezzük:

$$A - B = A\bar{B};$$

ez tehát azoknak az elemeknek az összessége, melyek hozzátartoznak A -hoz, de B -hez nem. Szemben a számokra vonatkozó műveleti szabályokkal, halmazoknál általában

$$(A - B) + B \neq A,$$

ezzel szemben minden A és B halmaz esetén

$$(A - B) + B = A + B.$$

Innen következik, hogy $(A - B) + B = A$, akkor és csak akkor, ha $B \subset A$, ez ui. szükséges és elegendő feltétele annak, hogy $A + B = A$ legyen.

2. A KOMBINATORIKA ELEMEI

1. Permutációk. n egymástól különböző elem egy meghatározott sorrendben való elhelyezését az n elem egy permutációjának nevezzük. Kérdés, mennyi n különböző elem esetén az összes permutációk száma? Azt állítjuk, hogy ez a szám: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n$. Az 1-től n -ig terjedő számok szorzatát n faktoriál-

lisanak nevezzük, és ezt a számot a következőképpen jelöljük: $n!$.
Tehát

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n.$$

Eszerint $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$ stb. Megállapodunk továbbá abban, hogy

$$0! = 1.$$

Azt, hogy n elem összes permutációinak a száma $n!$, teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen ez az n elem az 1-től n -ig terjedő egész számok összessége. Ha $n=1$, akkor nyilván csak egy lehetséges sorrend van. Ha $n=2$, akkor az összes lehetséges sorrendek száma 2. Ha $n=3$, akkor az összes lehetséges permutációk a következők:

$$\begin{array}{lll} 1, 2, 3 & 1, 3, 2 & 3, 1, 2 \\ 2, 1, 3 & 2, 3, 1 & 3, 2, 1 \end{array}$$

Ezeket a két elem 1, 2 és 2, 1 permutációiból úgy kaptuk, hogy a 3-ast mindkettőben először az utolsó, majd a középső, végül az első pozícióba helyeztük. Ilyenformán az 1, 2, 3 számok összes permutációinak a száma $2 \cdot 3 = 3!$.

Tegyük fel, hogy n elem összes permutációinak a száma $n!$, és az 1, 2, ..., n számokhoz vegyük még hozzá az $n+1$ -et is. Az 1, 2, ..., n számok minden permutációjából az $n+1$ szám hozzávételével $n+1$ permutációt kapunk, mert az $n+1$ -et elhelyezhetjük az első, második, ..., utolsó ($n+1$ -edik) pozícióba. Ha tehát n elem összes permutációinak a száma $n!$, akkor $n+1$ elem összes permutációinak a száma

$$n!(n+1) = (n+1)!$$

Állításunk helyességét megmutattuk az 1, 2, 3 esetekben. Látuk azt is, hogy az n elemre vonatkozó állítás helyességéből következik az $n+1$ elemre vonatkozó állítás helyessége. Eszerint állításunk minden pozitív egész számra igaz,

2. Ismétléses permutációk. Tegyük fel most, hogy van összesen n elemünk, de közöttük vannak egyenlők is, mégpedig legyenek ezek az elemek egész számok, és az n elem közül legyen k_1 számú 1, k_2 számú 2, ..., k_r számú r , ahol

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n.$$

Az n elem egy sorrendjét továbbra is egy permutációnak nevezzük, két permutációt azonban csak akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy olyan pozíció, amelyben az egyes permutációkban különböző számok állnak. Kérdés, mennyi az összes különböző permutációk száma?

Jelölje ezt a számot $C_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)}$. Ha a rendelkezésünkre álló $C_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)}$ számú permutációk mindegyikében az 1-eseket, 2-eseket stb. egymás között permutáljuk, akkor összesen $n!$ permutációt kell kapnunk, ez n elem összes lehetséges permutációinak a száma. Ámde az 1-esek száma mindig k_1 , a 2-eseké k_2 s. i. t. tehát a $C_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)}$ számú permutációk mindegyikéből

$$k_1! k_2! \cdots k_r!$$

további permutációt alkothatunk. Eszerint

$$n! = C_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)} k_1! k_2! \cdots k_r!,$$

ahonnan

$$C_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{(n)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}.$$

Ha speciálisan $r=2$, k_1 -et pedig k -val jelöljük, akkor $k_2 = n-k$, ennél fogva k számú 1-es és $n-k$ számú 2-es összes különböző permutációinak a száma (ezt csak $C_k^{(n)}$ -nel jelöljük $C_{k, n-k}^{(n)}$ helyett)

$$C_k^{(n)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Példaképpen nézzük azt az esetet, amikor $k=2$, $n=4$. Az ösz-

szes különböző permutációk a következők:

$$\begin{array}{ll} 1, 1, 2, 2 & 2, 1, 1, 2, \\ 1, 2, 1, 2 & 2, 1, 2, 1, \\ 1, 2, 2, 1 & 2, 2, 1, 1. \end{array}$$

Ezek száma 6, ami képletünkben is következik, mert

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

3. Kombinációk. Ha n különböző elem közül k elemet kiválasztunk, azt az n elem egy k -ad osztályú kombinációjának nevezzük. Kérdés, n elem esetén mennyi az összes különböző k -ad osztályú kombinációk száma. Más szóval: n elem közül hány különböző módon lehet k számút kiválasztani? Most a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, tehát pl. az 1, 2, 3 számokból 1, 2 kiválasztása ugyanaz, mint 2, 1 kiválasztása.

A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az

$$1, 2, \dots, n-1, n$$

számokból hány különböző módon lehet k darabot kiválasztani. Írjunk a kiválasztott számok alá 1-eseket, a ki nem választottak alá 0-kat. Ha pl. az 1, 2, ..., k számokat választottuk ki, akkor a következőt kapjuk

$$\begin{array}{ll} 1, 2, \dots, k, & k+1, \dots, n; \\ 1, 1, \dots, 1, & 0, \dots, 0. \end{array}$$

Mármint világos, hogy minden k szám kiválasztásának megfelel a k számú 1-es és az $n-k$ számú 0 egy permutációja és viszont. A k -ad osztályú kombinációk száma tehát annyi, ahány különböző permutációja van a k számú 1-esnek és az $n-k$ számú 0-nak. Ez a szám azonban a 2. pont szerint

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Jelöljük ezt a számot $\binom{n}{k}$ -val (olv. n alatt a k vagy n a k fölött).

Eszerint n különböző elem összes k -ad osztályú kombinációinak a száma.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Megállapodás szerint $\binom{n}{0} = 1$.

Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy az előbbi egyenlőség jobb oldalán a számlálókban k tényező szorzata szerepel, tehát $\binom{n}{k}$ kiszámításakor a számlálóban n -től lefelé haladva (n -et is beleértve) pontosan k számot szorzunk össze.

4. Variációk. Képzeljük el, hogy n elem közül k elemet most egyenként választunk ki, és a kiválasztott elemeket a kiválasztás sorrendjében egymás mellé elhelyezzük. Ekkor kapunk egy k -ad osztályú variációt. Az elemeket különbözőknek tételezve fel, kérdés, mennyi az összes k -ad osztályú variációk száma.

Egy k -ad osztályú variáció képzését úgy is felfoghatjuk, hogy előbb kiválasztunk k elemet, majd ezeket permutáljuk. Mivel k különböző elem összes permutációinak a száma $k!$, n elem közül k elemet pedig $\binom{n}{k}$ módon lehet kiválasztani, következésképpen n elem összes k -ad osztályú variációinak a száma,

$$\binom{n}{k} k! = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} k! = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Ha pl. egy sportegyesületben összesen van 20 labdarúgó, és a belőlük kiállított csapatokat különbözőknek nevezzük akkor is, ha ugyanazokból a játékosokból áll, de más felállításban, akkor az egyesület

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10$$

különböző módon tud egy labdarúgó-csapatot kiállítani.

A (4) egyenlőséggel összhangban minden elem egyenlő a két fölötte álló elem összegével. A PASCAL-háromszögből látható, de $\binom{n}{k}$ definíciójából is rögtön következik, hogy

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

8. Egy speciális probléma. Vizsgáljunk N azonos elemet:

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_N$$

Kérdés, hány különböző módon tudjuk ezeket $R-1$ függőleges egyenesnek az elemek közé iktatásával R számú olyan csoportba beosztani (az első csoportot a legelső függőleges vonal előtti elemek, az utolsót az utolsó függőleges utáni elemek alkotják; 0 elemű csoportot is megengedünk), hogy az elem-nélküli csoportok száma k_0 , az egyelemű csoportok száma k_1, \dots , az N -elemű csoportok száma k_N legyen. Azt állítjuk, hogy ez

$$\frac{R!}{k_0! k_1! \dots k_N!}, \quad \begin{matrix} k_0 + k_1 + \dots + k_N = R, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + Nk_N = N \end{matrix} \quad (5)$$

különböző módon lehetséges.

Az állítást a következő módon bizonyítjuk. Tekintsünk egy, a kívánt tulajdonságú csoportokba való beosztást. Ebből a többieket oly módon származtatjuk, hogy az egyes csoportokat egymás között permutáljuk, miközben az azonos elemszámú csoportokat azonosoknak tekintjük. Tehát pl. az $N=5$, $k_0=0$, $k_1=1$, $k_2=2$, $k_3=k_4=k_5=0$ esetben az

$$a|a, a|a, a$$

beosztásból permutációval a következő továbbiakat származtathatjuk:

$$a, a|a|a, a,$$

$$a, a|a, a|a,$$

A két kettes csoport egymás közti permutációja nem ad újat. Mivel az összes ilyen permutációk száma éppen (5), ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy az összes lehetséges, R csoportba való beosztások száma

$$\frac{(N+R-1)!}{N!(R-1)!} = \binom{N+R-1}{R-1},$$

minden ilyen beosztás ui. az N elem és az $R-1$ vonal egy permutációja. Eszerint fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{\substack{k_0+k_1+\dots+k_N=R \\ k_1+2k_2+\dots+Nk_N=N}} \frac{R!}{k_0! k_1! \dots k_N!} = \binom{N+R-1}{R-1}. \quad (6)$$

3. A GAMMA-FÜGGVÉNY

A gamma-függvényt a $p > 0$ számokon a következő integrállal értelmezzük:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \quad (1)$$

Ez a p változó folytonos, sőt tetszőleges sokszor folytonosan differenciálható függvénye, differenciálhányadosainak származtatásánál a p szerinti differenciálás az integráljel alatt elvégezhető, vagyis

$$\Gamma^{(r)}(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (\ln x)^r e^{-x} dx. \quad (2)$$

Az (1) formula alapján könnyen belátható, hogy ha $p \rightarrow 0$ vagy $p \rightarrow \infty$, akkor $\Gamma(p) \rightarrow \infty$. A gamma-függvény egyik legfontosabb tulajdonsága a következő:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad (3)$$

amelyet parciális integrálással igazolhatunk. Ugyanis

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = [-x^p e^{-x}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p).$$

Ha $p=1$, akkor

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

ennélfogva (3) figyelembevételével egy tetszőleges $p = n+1$ egész-számmra az adódik, hogy

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (4)$$

A gamma-függvény tehát a pozitív egész-számokon értelmezett $n!$ függvényt egy valamennyi pozitív számon értelmezett, tetszőlegesen sokszor differenciálható függvénné terjeszti ki. E függvény egy másik alapvető tulajdonsága:

$$\Gamma(p+1) \sim p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}, \quad (5)$$

ha $p \rightarrow \infty$. A \sim jel aszimptotikus egyenlőséget jelent, vagyis a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p+1)}{p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}} = 1 \quad (6)$$

reláció egy más kifejezőmódja. Ha p csak a pozitív egész-számokon fut keresztül, akkor (5) az

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \quad (7)$$

ún. STIRLING-formulára redukálódik.

A (6) határértékreklációra támaszkodva bebizonyítható, hogy tetszőleges, de rögzített pozitív h esetén

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(p+h)}{\Gamma(p)p^h} = 1. \quad (8)$$

A gamma-függvénnyel kapcsolatban megemlítjük még, hogy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (9)$$

amit az (1) formulára támaszkodva egyszerűen bebizonyíthatunk. Ugyanis az $x=u^2$ helyettesítést alkalmazva,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Végül megemlítjük a gamma-függvénnyel kifejezhető EULER-féle béta-függvényt. Ez egy kétváltozós függvény, mely a $p > 0$, $q > 0$ számpárhoz a

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (10)$$

értéket rendeli. Bebizonyítható, hogy fennáll az igen fontos

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (11)$$

reláció, ahonnan az is kitűnik, hogy

$$B(p, q) = B(q, p).$$

A POISSON-ELOSZLÁS

A k -nak megfelelő sor és a λ -nak megfelelő oszlopban a

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

valószínűség értéke áll.

$\lambda \backslash k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05362	0,07581
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01263
4		0,00005	0,00025	0,00071	0,00158
5			0,00001	0,00005	0,00016
6					0,00001

$\lambda \backslash k$	0,6	0,7	0,8	0,9	
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	
2	0,09878	0,12166	0,14379	0,16466	
3	0,01976	0,02838	0,03834	0,04939	
4	0,00296	0,00496	0,00766	0,01111	
5	0,00035	0,00069	0,00123	0,00200	
6	0,00003	0,00008	0,00016	0,00030	
7			0,00001	0,00003	

$\lambda \backslash k$	1	2	3	4	5
0	0,36788	0,13534	0,04978	0,01831	0,00673
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01532	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00306	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05040	0,10420	0,14622
7	0,00007	0,00343	0,02160	0,05954	0,10444

$\lambda \backslash k$	1	2	3	4	5
8		0,00085	0,00810	0,02977	0,06527
9		0,00019	0,00270	0,01322	0,03626
10		0,00003	0,00081	0,00529	0,01813
11			0,00022	0,00192	0,00824
12			0,00005	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00019	0,00132
14				0,00005	0,00047
15				0,00001	0,00015
16					0,00004
17					0,00001

$\lambda \backslash k$	6	7	8	9	10
0	0,00247	0,00091	0,00033	0,00012	0,00004
1	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,04461	0,02234	0,01073	0,00499	0,00227
3	0,08923	0,05212	0,02862	0,01499	0,00756
4	0,13385	0,09122	0,05725	0,03373	0,01891
5	0,16062	0,12772	0,09160	0,06072	0,03783
6	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06305
7	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09007
8	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9	0,06883	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11	0,02252	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12	0,01126	0,02635	0,04812	0,07276	0,09478
13	0,00519	0,01418	0,02961	0,05037	0,07290
14	0,00222	0,00709	0,01692	0,03238	0,05207
15	0,00089	0,00331	0,00902	0,01943	0,03471
16	0,00033	0,00144	0,00451	0,01093	0,02169
17	0,00011	0,00059	0,00212	0,00578	0,01276
18	0,00003	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19	0,00001	0,00008	0,00039	0,00137	0,00373
20		0,00003	0,00015	0,00061	0,00183
21			0,00006	0,00026	0,00088
22			0,00002	0,00010	0,00040
23				0,00004	0,00017
24				0,00001	0,00007
25					0,00002
26					0,00001

λ k	11	12	13	14	15
0	0,00001				
1	0,00018	0,00007	0,00002	0,00001	
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003
3	0,00370	0,00177	0,00082	0,00038	0,00017
4	0,01018	0,00530	0,00269	0,00133	0,00064
5	0,02241	0,01274	0,00699	0,00373	0,00193
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00869	0,00483
7	0,06457	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03043	0,01944
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03240
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861
11	0,11938	0,11437	0,10148	0,08435	0,06628
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09841	0,08285
13	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09560
14	0,07275	0,09048	0,10209	0,10599	0,10244
15	0,05335	0,07239	0,08847	0,09892	0,10244
16	0,03668	0,05429	0,07188	0,08655	0,09603
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08473
18	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061
19	0,00839	0,01613	0,02716	0,04085	0,05574
20	0,00461	0,00968	0,01765	0,02859	0,04181
21	0,00241	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986
22	0,00121	0,00301	0,00645	0,01213	0,02036
23	0,00057	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328
24	0,00026	0,00078	0,00197	0,00430	0,00830
25	0,00011	0,00037	0,00102	0,00241	0,00498
26	0,00004	0,00017	0,00051	0,00129	0,00287
27	0,00002	0,00007	0,00024	0,00067	0,00159
28		0,00003	0,00011	0,00033	0,00085
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044
30			0,00002	0,00007	0,00022
31				0,00003	0,00010
32				0,00001	0,00005
33					0,00002
34					0,00001

λ k	16	17	18	19	20
0					
1					
2	0,00001				
3	0,00007	0,00003			
4	0,00030	0,00014	0,00006	0,00003	0,00001
5	0,00098	0,00049	0,00024	0,00011	0,00005
6	0,00262	0,00138	0,00071	0,00036	0,00018
7	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,01198	0,00716	0,00416	0,00236	0,00130
9	0,02131	0,01352	0,00832	0,00498	0,00290
10	0,03409	0,02300	0,01498	0,00946	0,00581
11	0,04959	0,03554	0,02452	0,01635	0,01057
12	0,06612	0,05035	0,03678	0,02588	0,01762
13	0,08138	0,06584	0,05092	0,03783	0,02711
14	0,09301	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,09921	0,09062	0,07857	0,06504	0,05164
16	0,09921	0,09628	0,08839	0,07724	0,06456
17	0,09338	0,09628	0,09359	0,08632	0,07595
18	0,08300	0,09093	0,09359	0,09112	0,08439
19	0,06989	0,08136	0,08867	0,09112	0,08883
20	0,05592	0,06915	0,07980	0,08656	0,08883
21	0,04260	0,05598	0,06840	0,07832	0,08460
22	0,03098	0,04326	0,05596	0,06764	0,07691
23	0,02155	0,03197	0,04380	0,05587	0,06688
24	0,01437	0,02265	0,03285	0,04423	0,05573
25	0,00919	0,01540	0,02365	0,03362	0,04458
26	0,00566	0,01007	0,01637	0,02456	0,03429
27	0,00335	0,00634	0,01091	0,01728	0,02540
28	0,00191	0,00385	0,00701	0,01173	0,01814
29	0,00105	0,00225	0,00435	0,00768	0,01251
30	0,00056	0,00127	0,00261	0,00486	0,00834
31	0,00029	0,00070	0,00151	0,00298	0,00538
32	0,00014	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33	0,00007	0,00019	0,00046	0,00102	0,00203
34	0,00003	0,00009	0,00024	0,00057	0,00119
35	0,00001	0,00004	0,00012	0,00030	0,00068
36		0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37		0,00001	0,00003	0,00008	0,00020
38			0,00001	0,00004	0,00010
39				0,00002	0,00005
40					0,00002
41					0,00001

A NORMÁLIS ELOSZLÁS

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,5000	0,32	0,6255	0,64	0,7389	0,96	0,8315
0,01	0,5040	0,33	0,6293	0,65	0,7422	0,97	0,8340
0,02	0,5080	0,34	0,6331	0,66	0,7454	0,98	0,8365
0,03	0,5120	0,35	0,6368	0,67	0,7486	0,99	0,8389
0,04	0,5160	0,36	0,6406	0,68	0,7517	1,00	0,8413
0,05	0,5199	0,37	0,6443	0,69	0,7549	1,01	0,8438
0,06	0,5239	0,38	0,6480	0,70	0,7580	1,02	0,8461
0,07	0,5279	0,39	0,6517	0,71	0,7611	1,03	0,8485
0,08	0,5319	0,40	0,6554	0,72	0,7642	1,04	0,8508
0,09	0,5359	0,41	0,6591	0,73	0,7673	1,05	0,8531
0,10	0,5398	0,42	0,6628	0,74	0,7703	1,06	0,8554
0,11	0,5438	0,43	0,6664	0,75	0,7734	1,07	0,8577
0,12	0,5478	0,44	0,6700	0,76	0,7764	1,08	0,8599
0,13	0,5517	0,45	0,6736	0,77	0,7794	1,09	0,8621
0,14	0,5557	0,46	0,6772	0,78	0,7823	1,10	0,8643
0,15	0,5596	0,47	0,6808	0,79	0,7853	1,11	0,8665
0,16	0,5636	0,48	0,6844	0,80	0,7881	1,12	0,8686
0,17	0,5675	0,49	0,6879	0,81	0,7910	1,13	0,8708
0,18	0,5714	0,50	0,6915	0,82	0,7939	1,14	0,8729
0,19	0,5753	0,51	0,6950	0,83	0,7967	1,15	0,8749
0,20	0,5793	0,52	0,6985	0,84	0,7995	1,16	0,8770
0,21	0,5832	0,53	0,7019	0,85	0,8023	1,17	0,8790
0,22	0,5871	0,54	0,7054	0,86	0,8051	1,18	0,8810
0,23	0,5910	0,55	0,7088	0,87	0,8078	1,19	0,8830
0,24	0,5948	0,56	0,7123	0,88	0,8106	1,20	0,8849
0,25	0,5987	0,57	0,7157	0,89	0,8133	1,21	0,8869
0,26	0,6026	0,58	0,7190	0,90	0,8159	1,22	0,8888
0,27	0,6064	0,59	0,7224	0,91	0,8186	1,23	0,8907
0,28	0,6103	0,60	0,7257	0,92	0,8212	1,24	0,8925
0,29	0,6141	0,61	0,7291	0,93	0,8238	1,25	0,8944
0,30	0,6179	0,62	0,7324	0,94	0,8264	1,26	0,8962
0,31	0,6217	0,63	0,7357	0,95	0,8289	1,27	0,8980

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,28	0,8997	1,60	0,9452	1,92	0,9726	2,48	0,9934
1,29	0,9015	1,61	0,9463	1,93	0,9732	2,50	0,9938
1,30	0,9032	1,62	0,9474	1,94	0,9738	2,52	0,9941
1,31	0,9049	1,63	0,9484	1,95	0,9744	2,54	0,9945
1,32	0,9066	1,64	0,9495	1,96	0,9750	2,56	0,9948
1,33	0,9082	1,65	0,9505	1,97	0,9756	2,58	0,9951
1,34	0,9099	1,66	0,9515	1,98	0,9761	2,60	0,9953
1,35	0,9115	1,67	0,9525	1,99	0,9767	2,62	0,9956
1,36	0,9131	1,68	0,9535	2,00	0,9772	2,64	0,9959
1,37	0,9147	1,69	0,9545	2,02	0,9783	2,66	0,9961
1,38	0,9162	1,70	0,9554	2,04	0,9793	2,68	0,9963
1,39	0,9177	1,71	0,9564	2,06	0,9803	2,70	0,9965
1,40	0,9192	1,72	0,9572	2,08	0,9812	2,72	0,9967
1,41	0,9207	1,73	0,9582	2,10	0,9821	2,74	0,9969
1,42	0,9222	1,74	0,9591	2,12	0,9830	2,76	0,9971
1,43	0,9236	1,75	0,9591	2,14	0,9838	2,78	0,9973
1,44	0,9251	1,76	0,9608	2,16	0,9846	2,80	0,9974
1,45	0,9265	1,77	0,9616	2,18	0,9854	2,82	0,9976
1,46	0,9279	1,78	0,9625	2,20	0,9861	2,84	0,9977
1,47	0,9292	1,79	0,9633	2,22	0,9868	2,86	0,9979
1,48	0,9306	1,80	0,9641	2,24	0,9875	2,88	0,9980
1,49	0,9319	1,81	0,9649	2,26	0,9881	2,90	0,9981
1,50	0,9332	1,82	0,9656	2,28	0,9887	2,92	0,9982
1,51	0,9345	1,83	0,9664	2,30	0,9893	2,94	0,9984
1,52	0,9357	1,84	0,9671	2,32	0,9898	2,96	0,9985
1,53	0,9370	1,85	0,9678	2,34	0,9904	2,98	0,9986
1,54	0,9382	1,86	0,9686	2,36	0,9909	3,00	0,9986
1,55	0,9394	1,87	0,9693	2,38	0,9913	3,20	0,9993
1,56	0,9406	1,88	0,9699	2,40	0,9918	3,40	0,9996
1,57	0,9418	1,89	0,9806	2,42	0,9922	3,60	0,9998
1,58	0,9429	1,90	0,9713	2,44	0,9927	3,80	0,9999
1,59	0,9441	1,91	0,9719	2,46	0,9931		

A NORMÁLIS ELOSZLÁS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYE

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)
0,00	0,3989	0,32	0,3790	0,64	0,3251	0,96	0,2516	1,28	0,1758
0,01	0,3989	0,33	0,3778	0,65	0,3230	0,97	0,2492	1,29	0,1736
0,02	0,3989	0,34	0,3765	0,66	0,3209	0,98	0,2468	1,30	0,1714
0,03	0,3988	0,35	0,3752	0,67	0,3187	0,99	0,2444	1,31	0,1691
0,04	0,3986	0,36	0,3739	0,68	0,3166	1,00	0,2420	1,32	0,1669
0,05	0,3984	0,37	0,3725	0,69	0,3144	1,01	0,2396	1,33	0,1647
0,06	0,3982	0,38	0,3712	0,70	0,3123	1,02	0,2371	1,34	0,1626
0,07	0,3980	0,39	0,3697	0,71	0,3101	1,03	0,2347	1,35	0,1604
0,08	0,3977	0,40	0,3683	0,72	0,3079	1,04	0,2323	1,36	0,1582
0,09	0,3973	0,41	0,3668	0,73	0,3056	1,05	0,2299	1,37	0,1561
0,10	0,3970	0,42	0,3653	0,74	0,3034	1,06	0,2275	1,38	0,1539
0,11	0,3965	0,43	0,3637	0,75	0,3011	1,07	0,2251	1,39	0,1518
0,12	0,3961	0,44	0,3621	0,76	0,2989	1,08	0,2227	1,40	0,1497
0,13	0,3956	0,45	0,3605	0,77	0,2966	1,09	0,2203	1,41	0,1476
0,14	0,3951	0,46	0,3589	0,78	0,2943	1,10	0,2179	1,42	0,1456
0,15	0,3945	0,47	0,3572	0,79	0,2920	1,11	0,2155	1,43	0,1435
0,16	0,3939	0,48	0,3555	0,80	0,2897	1,12	0,2131	1,44	0,1415
0,17	0,3932	0,49	0,3538	0,81	0,2874	1,13	0,2107	1,45	0,1394
0,18	0,3925	0,50	0,3521	0,82	0,2850	1,14	0,2083	1,46	0,1374
0,19	0,3918	0,51	0,3503	0,83	0,2827	1,15	0,2059	1,47	0,1354
0,20	0,3910	0,52	0,3485	0,84	0,2803	1,16	0,2036	1,48	0,1334
0,21	0,3902	0,53	0,3467	0,85	0,2780	1,17	0,2012	1,49	0,1315
0,22	0,3894	0,54	0,3448	0,86	0,2756	1,18	0,1989	1,50	0,1295
0,23	0,3885	0,55	0,3429	0,87	0,2732	1,19	0,1965	1,51	0,1276
0,24	0,3876	0,56	0,3410	0,88	0,2709	1,20	0,1942	1,52	0,1257
0,25	0,3867	0,57	0,3391	0,89	0,2685	1,21	0,1919	1,53	0,1238
0,26	0,3857	0,58	0,3372	0,90	0,2661	1,22	0,1895	1,54	0,1219
0,27	0,3847	0,59	0,3352	0,91	0,2637	1,23	0,1872	1,55	0,1200
0,28	0,3836	0,60	0,3332	0,92	0,2613	1,24	0,1849	1,56	0,1182
0,29	0,3825	0,61	0,3312	0,93	0,2589	1,25	0,1826	1,57	0,1163
0,30	0,3814	0,62	0,3292	0,94	0,2565	1,26	0,1804	1,58	0,1145
0,31	0,3802	0,63	0,3271	0,95	0,2541	1,27	0,1781	1,59	0,1127

x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)
1,60	0,1109	1,92	0,0632	2,24	0,0325	2,56	0,0151	2,88	0,0063
1,61	0,1092	1,93	0,0620	2,25	0,0317	2,57	0,0147	2,89	0,0061
1,62	0,1074	1,94	0,0608	2,26	0,0310	2,58	0,0143	2,90	0,0060
1,63	0,1057	1,95	0,0596	2,27	0,0303	2,59	0,0139	2,91	0,0058
1,64	0,1040	1,96	0,0584	2,28	0,0297	2,60	0,0136	2,92	0,0056
1,65	0,1023	1,97	0,0573	2,29	0,0290	2,61	0,0132	2,93	0,0055
1,66	0,1006	1,98	0,0562	2,30	0,0283	2,62	0,0129	2,94	0,0053
1,67	0,0989	1,99	0,0551	2,31	0,0277	2,63	0,0126	2,95	0,0051
1,68	0,0973	2,00	0,0540	2,32	0,0270	2,64	0,0122	2,96	0,0050
1,69	0,0957	2,01	0,0529	2,33	0,0264	2,65	0,0119	2,97	0,0048
1,70	0,0940	2,02	0,0519	2,34	0,0258	2,66	0,0116	2,98	0,0047
1,71	0,0925	2,03	0,0508	2,35	0,0252	2,67	0,0113	2,99	0,0046
1,72	0,0909	2,04	0,0498	2,36	0,0246	2,68	0,0110	3,00	0,0044
1,73	0,0893	2,05	0,0488	2,37	0,0241	2,69	0,0107	3,10	0,0033
1,74	0,0878	2,06	0,0478	2,38	0,0235	2,70	0,0104	3,20	0,0024
1,75	0,0863	2,07	0,0468	2,39	0,0229	2,71	0,0101	3,30	0,0017
1,76	0,0848	2,08	0,0459	2,40	0,0224	2,72	0,0099	3,40	0,0012
1,77	0,0833	2,09	0,0449	2,41	0,0219	2,73	0,0096	3,50	0,0009
1,78	0,0818	2,10	0,0440	2,42	0,0213	2,74	0,0093	3,60	0,0006
1,79	0,0804	2,11	0,0431	2,43	0,0208	2,75	0,0091	3,70	0,0004
1,80	0,0790	2,12	0,0422	2,44	0,0203	2,76	0,0088	3,80	0,0003
1,81	0,0775	2,13	0,0413	2,45	0,0198	2,77	0,0086	3,90	0,0002
1,82	0,0761	2,14	0,0404	2,46	0,0194	2,78	0,0084	4,00	0,0001
1,83	0,0748	2,15	0,0396	2,47	0,0189	2,79	0,0081	4,10	0,0001
1,84	0,0734	2,16	0,0387	2,48	0,0184	2,80	0,0079	4,20	0,0001
1,85	0,0721	2,17	0,0379	2,49	0,0180	2,81	0,0077		
1,86	0,0707	2,18	0,0371	2,50	0,0175	2,82	0,0075		
1,87	0,0694	2,19	0,0363	2,51	0,0171	2,83	0,0073		
1,88	0,0681	2,20	0,0355	2,52	0,0167	2,84	0,0071		
1,89	0,0669	2,21	0,0347	2,53	0,0163	2,85	0,0069		
1,90	0,0656	2,22	0,0339	2,54	0,0158	2,86	0,0067		
1,91	0,0644	2,23	0,0332	2,55	0,0154	2,87	0,0065		

A STUDENT-ELOSZLÁS

$n \backslash p$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036

$n \backslash p$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Adott n és p esetén a táblázat alapján meghatározható az a t_p , melyre

$$P(|t| > t_p) = p.$$

A χ^2 -ELOSZLÁS

$n \backslash p$	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	0,000	0,000	0,003	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339
15	5,229	5,985	7,261	8,547	1,307	11,721	14,339
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336

$n \backslash p$	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,268
4	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,793
29	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

A adott n és p esetén a táblázat alapján meghatározható az a χ^2 , melyre

$$P(\chi^2 > \chi_p^2) = p.$$

1.12. 1. $\binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}$.

2. $\frac{1}{\binom{N+n-1}{n}}$, ill. $\frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$.

3. $\frac{1}{\binom{N}{n}}$, ill. $1 - \frac{n}{N}$, ha $k=0$ és $\frac{n}{N}$, ha $k=1$.

4. a) $4! \frac{(13!)}{52!}$; b) $4! \frac{\binom{13}{6} \binom{13}{4} \binom{13}{2} 13}{\binom{52}{13}}$; c) $\frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$.

5. $\ln 2 - \frac{1}{2}$. 6. $\frac{1}{10}$. 7. $\frac{2}{5}$.

2.13. 2. $\binom{4\,000\,000}{k} \left(\frac{1}{90}\right)^k \left(1 - \frac{1}{90}\right)^{4\,000\,000-k}$.

3. $\binom{200}{10} \left(\frac{1}{12}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{190}$. 4. $\frac{3}{5}$, ill. $\frac{2}{5}$.

5. a) $\frac{44}{243}$; b) $\frac{20}{71}$.

6. A két valószínűség a következő:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,5177; \quad 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,4914,$$

tehát az első eset a valószínűbb.

7. $\left(\frac{35}{36}\right)^3 \frac{1}{6}$. 8. $\left(\frac{40}{20}\right) \frac{1}{2^{42}}$.

12. $\left(\frac{5}{3}\right) (0,516)^3 (0,484)^2$. 13. $\frac{11}{12}, \frac{1}{3}, \frac{7}{12}, \frac{5}{12}$.

14. $P(A_1), \dots, P(A_n)$ közül legalább egy 1-gyel egyenlő, a többi pedig tetszőleges lehet.

3.20. 2. $\frac{1}{x} f(\ln x)$. 3. $r(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - x^2, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

4. $s(x) = \frac{\lambda \mu}{(\lambda x + \mu)^2}, x > 0$.

6. $\frac{n}{b-a} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}$, ill. $\frac{n}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-1}$.

7. $\frac{3}{16}, \frac{10}{16}, \frac{3}{16}$. 8. $F(x|\xi < K) = \begin{cases} \frac{F(x)}{F(K)}, & \text{ha } x \leq K; \\ 1, & \text{ha } x > K. \end{cases}$

9. A sűrűségfüggvények: $xe^{-\frac{x^2}{2}}, x > 0$, ill. $\frac{x}{2\pi}, 0 < x < 2\pi$.

4.15. 5. $M(\eta) = b - \frac{1}{n+1}(b-a), M(\xi) = a + \frac{1}{n+1}(b-a)$.

$$M\left(\frac{\eta + \xi}{2}\right) = \frac{a+b}{2}, D^2\left(\frac{\eta + \xi}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}.$$

7. A várható érték 6-tal egyenlő.

8. A várható érték és a szórásnégyzet 2-vel, a módusz 1-gyel egyenlő, a medián az $\frac{1}{2} = (x+1)e^{-x}$ egyenlet pozitív megoldása

9. A várható érték 0, a szórás $\sqrt{2}$. 11. $-\frac{3}{11}$.

5.13. 2. $\frac{2^{n-1}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda x} \int_0^{\lambda x} y^{n-2} e^{-y} dy$.

3. $\frac{1}{k+1} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}$.

4. Ha $d-c \leq b-a$, akkor az összeg sűrűségfüggvénye:

$$r(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a+c; \\ \frac{x-a-c}{(b-a)(d-c)}, & \text{ha } a+c \leq x \leq b+c; \\ \frac{1}{d-c}, & \text{ha } b+c \leq x \leq a+d; \\ \frac{b+d-x}{(b-a)(d-c)}, & \text{ha } a+d \leq x \leq b+d; \\ 0, & \text{ha } b+d \leq x. \end{cases}$$

5. $\frac{59}{60}$.
- 6.8. 1. $\lambda = np \approx 0,09$.
 2. $p_n(t) = n\lambda$.
 3. $P_n(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$
 5. $2\lambda\pi x e^{-\lambda\pi x^2}$, $x > 0$, ahol λ a pontsűrűség.
- 7.8. 6. $k = \beta^2/\Gamma(a)$, $m = \frac{a}{\beta} + \mu$, $\sigma^2 = \frac{a}{\beta^2}$, $\gamma_1 = 2 \frac{1+a^2}{\sqrt{a}}$.
- 9.21. 2.
$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_{N-1} \\ p_{N-1} & p_0 & p_1 & \dots & p_{N-2} \\ p_{N-2} & p_{N-1} & p_0 & \dots & p_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_0 \end{pmatrix}$$
3. $P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, $P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.
5. Ha $i < j$, akkor

$$R(\xi_i, \xi_j) = (P_{11}^{(j-i)} - P_1(j)) \times$$

$$\times \left(\frac{P_1(i)}{P_1(j)(1 - P_1(i))(1 - P_1(j))} \right)^{\frac{1}{2}},$$
 ahol $P_1(i)$ és $P_1(j)$ az előző feladatban szereplő mennyiségek és

$$P_{11}^{(j-i)} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + (1 - \lambda - \mu)^{j-i} \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$
- 10.29. 2. A torzítás értéke: $-\frac{1}{n+1}(b-a)$.
3. $\bar{x} + t_{0,05} \frac{s^*}{\sqrt{10}} = 4,73 \pm 3,46$.
5. Minthogy a $\chi^2 = \frac{1}{6}$, magas szinten sincs szignifikáns eltérés.
6. Minthogy $\chi^2 = 3,53$, a 95%-os szinten még nincs szignifikáns eltérés.
7. Az $y - \bar{y} = \hat{b}(x - \bar{x})$ regressziós egyenes
 $y - 12,26 = 7,82(x - 4,99)$.
10. $f = \frac{n}{N} = \frac{n}{10\,000} \cong \frac{n_0}{10\,000 + n_0}$; $n_0 = 384,16 \left(\frac{1}{P} - 1 \right)$.

1. AICHISON, J.—BROWN, J. A. C.: The lognormal distribution. Cambridge University Press 1957.
2. ARROW, K. J.—KARLIN, S.—SCARF, H.: Studies in the mathematical theory of inventory and production. Stanford University Press 1958.
3. BARTLETT, M. S.: An introduction to stochastic processes. Cambridge University Press 1956.
4. BLANC-LAPIERRE, A.—FORTET, R.: Théorie des fonctions aléatoires. Paris, Masson 1953.
5. BHARUCHA-REID, A. T.: Elements of the theory of Markov processes and their applications. New York, McGraw-Hill 1960.
6. COCHRAN, W. G.—COX, G. M.: Experimental design. New York, Wiley 1950.
7. COCHRAN, W. G.: Sampling techniques. New York—London, Wiley 1953.
8. CRAMÉR, H.: Mathematical methods of statistics. Princeton, 1951.
9. ДООВ, J. L.: Stochastic processes. New York, Wiley 1953.
10. Дунин-Барковский, И. В.—Смирнов, Н. В.: Теория вероятностей и математическая статистика в технике (Общая часть). Москва, Гостехиздат 1955.
11. FELLER, W.: An introduction to probability theory and its applications. New York, Wiley 1950.
12. GNYEGYENKO, B. V.—KOLMOGOROV, A. N.: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai. Budapest, Akadémiai Kiadó 1951.
13. Гнеденко, Б. В.: Курс теории вероятностей. Москва, Гостехиздат 1954.
14. GRENNANDER, M.—ROSENBLATT, M.: Statistical analysis of stationary time series. New York, Wiley 1957.
15. HALD, A.: Statistical theory with engineering applications. New York, Wiley 1957, 3. kiadás.
16. HALD, A.: Statistical tables and formulas. New York, Wiley 1958. 2. kiadás.

17. HANSEN, M. H. — HURWITZ, W. N. — MADOW, W. G.: Sample survey methods and theory. I—II. New York, Wiley 1953.
18. JORDAN KÁROLY: Fejezetek a klasszikus valószínűségyszámításból. Budapest, Akadémiai Kiadó 1956.
19. KENDALL, A.: The advanced theory of statistics. I—II. London, Griffin 1945—1948.
20. MEDGYESSY PÁL — TAKÁCS LAJOS: Valószínűségyszámítás. Műszaki Matematikai Gyakorlatok (szerk. Fazekas Ferenc), Budapest, Tankönyvkiadó 1957.
21. MEDGYESSY, P.: Decomposition of superpositions of distribution functions. Budapest, Akadémiai Kiadó 1961.
22. MORAN, P. A. P.: The theory of storage. London—New York, Methuen-Wiley 1959.
23. PEARSON, E. S.: Biometrika tables for statisticians. Cambridge University Press 1945.
24. PRÉKOPÁ ANDRÁS — ÉLTETŐ ÖDÖN: Matematikai statisztika. Budapest, KSH (rotaprint kézirat) 1961.
25. RÉNYI ALFRÉD: Valószínűségyszámítás. Budapest, Tankönyvkiadó 1954.
26. SCHMETTERER, L.: Einführung in die mathematische Statistik. Wien, Springer-Verlag 1956.
27. Statisztikai minőségellenőrzés, szerk. Vincze István. Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó 1958.
28. van der WAERDEN, B. L.: Mathematische Statistik. Berlin, Springer-Verlag 1957.
29. WALD, A.: Sequential analysis. New York, Wiley 1947.
30. WIENER, N.: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. New York, Wiley 1949.

TÁRGYMUTATÓ

A

Abszolút eltérés 162
 — valószínűségek 303
 alkatrészek élettartama 102, 188
 általános valószínűségi tétel 45, 48
 árammérők beigazítása 357
 aránybecslés 176, 390, 393, 394, 395, 396
 átmenetvalószínűségek mátrixa 301
 axiómák 22, 23

B

Banach-gyűfák 129
 Bayes tétele 54
 Bernoulli-féle kísérletsorozat 62
 — problémája 62
 — tétele 274
 Bernstein tétele 276
 Bertrand-féle paradoxon 35
 becslés 332
 —, elégséges 335
 —, hatásos 333
 —, intervallum 344
 —, maximum likelihood 338, 339, 340, 341, 342
 —, torzítatlan 332
 —, torzított 333
 becsléssorozat
 —, aszimptotikusan torzítatlan 335
 —, konzisztens 335
 binomiális együtthatók 411
 — eloszlás 174
 — közelítése 202, 291, 292
 — tagjainak maximuma 174
 — tétel 410
 bolyongás síkon 117
 — számegyenesen 29, 116, 299
 — visszaverő falak esetén 300
 Borel — Cantelli lemma 281
 Borel tétele 280
 Buffon-féle tűprobléma 37

Cs

Csapágygyűrűk méretellenőrzése 370
 Csebisjev-egyenlőtlenség 151

D

diszkrét eloszlás 78, 87, 110
 — valószínűségi változó 78
 — — vektorváltozó 87, 110
 Duna vizállásának vizsgálata 386

E

Egyenletes eloszlások kompozíciója 195, 196
 egyszerű alternatíva 62, 174
 ekvivalens valószínűségi változók 118, 389
 elektroncső működése 12, 205
 elméleti eloszlás 325
 — szórás 325
 — várható érték 325
 eloszlás 23, 76, 86, 87, 110
 —, béta 239
 —, bimodális 167
 —, binomiális 174
 —, Cauchy 127, 237
 —, χ^2 230
 —, χ 232
 —, csonkított 216
 —, diszkrét 78, 87, 110
 —, egydimenziós normális 221
 —, egyenletes 192
 —, együttes 87, 110
 —, elfajult 159
 —, Erlang 215
 —, exponenciális 188
 —, F 237
 —, feltételes 93, 113
 —, folytonos 79, 87, 111, 112
 —, gamma 191
 —, geometriai, Pascal 184
 —, hipergeometrikus 179
 —, kevert 80
 —, Laplace 169
 —, logaritmikusan normális 228
 —, Markov — Pólya — Eggenberger 182
 —, Maxwell 233
 —, n -dimenziós 159
 —, negatív binomiális 185
 —, Pearson 241

eloszlás, perem 90
 —, *Poisson* 201
 —, polihipergeometrikus 181
 —, polinomiális 177
 —, *Student* 234
 —, többdimenziós normális 225
 —, unimodális 167
 —, z 239
 eloszlásfüggvény 76
 — alapvető tulajdonságai 76, 77, 88, 112, 113
 —, együttes 88, 112
 —, feltételes 93, 113
 eloszlások 76
 — keveréke 108
 — kompozíciója 100, 103
 eloszlás paramétere 332
 empirikus eloszlás 324
 — medián 325
 — momentum 325
 — szórás 325
 — terjedeleme 325
 — várható érték 325
 ergodicitás 303
 esemény 15
 —, biztos 16
 —, elemi 14
 —, különbség 17
 —, lehetetlen 16
 —, összeg 17
 —, sűrűség 205
 —, szorzat 17
 —, tér 14
 eseményfolyamat 204
 —, független növekményű 206
 —, stacionárius növekményű 206
 események (sztochasztikus) függetlensége 56, 58
 esemény komplementuma 17
 eseményterek szorzata 62
 exponenciális eloszlások kompozíciója 191, 192

F

Faktoriális momentum 249
 feltételes eloszlásfüggvény 93, 113
 — relatív gyakoriság 49
 — sűrűségfüggvény 95, 114
 — valószínűség 49
 — várható érték 140
 ferdeségi együttható 168
 film átlátszóságának fluktuációja 259
 Fischer-féle z eloszlás 239
 folytonos valószínűségi változó 79
 — — vektorváltozó 87, 111, 112
 források véletlenszerű használata 252
 független események 56
 — kísérletek 18, 62

független valószínűségi változók 96, 104
 — valószínűségi vektorváltozók 115
 függetlenségvizsgálat 367

G

Gamma-függvény 413
 generátorfüggvény 248
 gépállások vizsgálata 185

Gy

Gyakoriság 18
 —, relatív 19
 —, feltételes relatív 49

H

Hájek-féle egyenlőtlenség 285
 halmaz 401
 — elem 401
 — függvény 22
 — kiegészítője (komplementuma) 404
 — különbség 405
 halmaz-összeg (egyesítés) 402
 — része 401
 — szorzat (közös rész) 403
 határfok 333
 —, relatív 333
 hatásosság 332, 333
 hipotézis, alternatív 357
 —, null 354
 hipotézisek ellenőrzése 354
 hisztogram 83
 homogenitásvizsgálat 371

I

Illeszkedésvizsgálat, becsléses 362
 —, tiszta 365
 indikátorváltozó 119
 interkvartilis félterjedeleme 166
 inverz-mátrix 137, 226, 384
 — — elemeinek várható értéke 137
 izzólámpák élettartama 105, 348

J

Jordan tételei 48

K

Karakterisztikus függvény 262
 kedvező pontok 33
 kísérlet 11
 — kimenetele 11, 12
 —, véletlen 11

kísérletszám meghatározása előírt pontosságú közelítéshez 286, 287, 288, 296, 297, 298
 klasszikus valószínűségi mező 25
 Kolmogorov-féle megalapozás 23
 Kolmogorov tétele 284
 Kolmogorov-egyenlőtlenség 285
 kombináció 408
 kombinatorika 405
 komplex értékű valószínűségi változók 262
 kompozíció 100, 103
 konfidencia-intervallum 343
 — — a binomiális eloszlás paraméterére 351
 — — a sokaság várható értékére 344, 346
 — — két várható érték eltérésére 348
 — — σ -ra 349
 kontingencia, négyzetes 369
 — tábla 368
 konvergencia, 1 valószínűséggel 273
 —, sztochasztikus 272
 korreláció (-s) együttható 153
 — mátrix 158
 —, parciális 382
 —, többszörös 383
 —, totális 383
 korrelálatlan változók 156
 — —, páronként 160
 korrigált empirikus szórás 328
 kovariancia 152
 — mátrix 157
 központi határeloszlástétel 289
 kvantilis 166

L

Láncmolekulák kialakulása 27, 136
 — lebomlása 63, 144, 196, 259
 láncreakciók 256
 Laplace — Ljapunov-tétel 294
 lapultsági együttható 168
 lehetséges pontok 33
 lift-közlekedési probléma 143
 likelihood-egyenlet 339
 Lindeberg — Feller-tétel 295
 lineárisan független valószínűségi változók 159
 lottó 31, 298
 — számok egyenletes eloszlása 364

M

Maradék 381
 Markov-féle egyenlőség 303
 — egyenlőtlenség 150
 Markov-lánc 299
 —, homogén 300
 —, véges állapotú 304
 Markov tétele 304

mátrix, korreláció 158
 —, kovariancia 158
 —, pozitív definit 158
 —, pozitív szemidefinit 159
 maximum likelihood módszer 337
 medián 163
 minta 322, 390
 — elem 322
 — eloszlása 324
 — momentuma 325
 — nagyság meghatározása előírt pontosságú becsléshez 296, 297, 298, 345, 394
 —, rendezett 322
 — szórása 325
 — várható értéke 325
 mintanagyság becslése 397
 mintavétel 325
 — véges sokaságból 118, 389
 — végtelen sokaságból 321, 322
 — visszatevés nélkül 29, 320
 — visszatevéssel 29, 63, 320
 módusz 167
 Moivre — Laplace-tétel 291
 momentum, 161
 —, abszolút 161
 —, centrális 161
 —, centrális abszolút 161
 —, empirikus 325
 műveletek eseményekkel 17

N

Nagy számok törvénye 20, 272, 274
 — — —, erős 274, 279
 — — —, gyenge 271, 274
 négyzetes kontingencia 369
 nem paraméteres módszerek 323
 normális eloszlások kompozíciója 225, 267
 normalitás-vizsgálat 367

O

Összeg szórása 149
 — várható értéke 138

P

Paraméter 332
 paraméterek becslése 332
 paraméteres módszerek 323
 Pearson-család 241
 permutáció 405
 —, ismétléses 407
 Poisson-eloszlású valószínűségi változók összegének eloszlása 251
 Poisson-folyamat 208
 —, stacionárius növekményű 211
 polinomiális tétel 411
 pontsűrűség 212

R	
Radioaktív atom 189	
— bomlássorok 192	
— bomlás vizsgálata 366	
regresszió (-s) 142, 374, 379	
— egyenes 376	
— együttható 376, 381	
— elméleti 374, 379	
— empirikus 377, 378, 383, 384	
— felület 379	
— görbe 375	
— lineáris 376, 380	
— parabolikus 386	
— sík 380	
relatív eltérés 152, 288, 298	
— gyakoriság 19	
— feltételes 49	
— hatások 333	
— szórás 152	
részhalmoz 401	
S	
selejtvizsgálat 54	
sokaság eloszlása 319	
sorbanálási probléma 216	
statistikai következtetés 323	
statistikai próba 354	
— F 359	
— t 357	
— u 354	
— χ^2 362	
statistikai függvény 332	
— sokaság 317	
„Steiner”-képlet 147	
sűrűségfüggvény 79, 88, 112	
— együttes 88, 112	
— feltételes 95, 114	
szignifikancia szintje 355	
szignifikáns eltérés 355	
szíkes területek becslése 176	
szórás 146	
szóródási együttható 160	
szorzási szabály 51	
— általános 51	
szorzat várható értéke 139	
sztohasztikus folyamat 73	
— függvénytér szerű 75	
— realizációja 74	
születési folyamat 217	
T	
Találkozás problémája 47	
telefon-probléma 212, 213, 214, 215, 255	
teljes eseményrendszer 41	
teljes valószínűség tétele 52	

terjedelem 166	
termodinamikai valószínűség 27	
törési folyamat 229, 230	
törőszilárdság összehasonlítása 359	
torzítás 333	
toto 410	
Ü	
Üres halmaz 403	
V	
Valószínűség 19, 22, 23, 24	
— alapvető tételei 41, 42, 43	
— a posteriori 56	
— a priori 56	
— axiómái 22, 23	
— eloszlás 23	
— feltételes 49	
— meghatározása geometriai módszerekkel 33	
— meghatározása kombinatorikai módszerekkel 24	
valószínűségi mező 23	
— klasszikus 25	
— változó 69	
— vektorváltozó 73	
valószínűségi változó függvénye 84	
— — sűrűségfüggvényének meghatározása 85	
valószínűségi változók függetlensége 69, 114	
— — függvénye várható értékének meghatározása 134	
— — hányadosának sűrűségfüggvénye 106	
— — összegének sűrűségfüggvénye 104	
— — szorzatának sűrűségfüggvénye 106	
valószínűségi vektorváltozók függetlensége 115	
várakozási idők minimumának várható értéke 131	
várható érték 123, 124, 125	
— feltételes 140	
variáció 409	
— ismétléses 410	
véletlen 6	
— jelenség 7	
— kísérlet 11	
— pontelhelyezkedés 211	
véletlen esemény-folyamat 204	
— — eseménysűrűsége 205	
— — független növekményű 206	
— — stacionárius növekményű 206	
véletlen tagszámú összegek 254	
verseny-problémák 127	
víztorló probléma 82 309	

ELŐSZÓ	5
1. A valószínűségelmélet alapjai	
<i>Az esemény matematikai fogalma</i>	11
1.1 Véletlen kísérlet — 1.2. Véletlen események — 1.3. Műveletek eseményekkel	
<i>A valószínűség matematikai fogalma</i>	18
1.4. Gyakoriság és relatív gyakoriság — 1.5. A nagy számok törvénye — 1.6. A valószínűség axiómái	
<i>Valószínűségek meghatározása kombinatorikai módszerekkel</i>	24
1.7. A klasszikus valószínűségi mező — 1.8. Példák — 1.9. Mintavétel visszatevés nélkül	
<i>Valószínűségek meghatározása geometriai módszerekkel</i>	33
1.10. Általános megjegyzések — 1.11. Példák — 1.12. Feladatok	
2. A valószínűségek kalkulusa	
<i>A valószínűségek alapvető összefüggései</i>	41
2.1. Alaptételek — 2.2. Egy határértéktétel — 2.3. Az általános valószínűségi tétel	
<i>Feltételes valószínűség és függetlenség</i>	49
2.4. Feltételes valószínűség — 2.5. A szorzási szabály — 2.6. A teljes valószínűség tétele — 2.7. BAYES tétele — 2.8. Események függetlensége — 2.9. Egy független eseményekkel kapcsolatos tétel — 2.10. Megjegyzések a függetlenség fogalmához — 2.11. BERNOULLI problémája — 2.12. Láncmolekulák lebomlása — 2.13. Feladatok	
3. Valószínűségi változók és eloszlásai	
<i>Valószínűségi változók</i>	69
3.1. A valószínűségi változó fogalma — 3.2. Valószínűségi vektorváltozók, sztohasztikus folyamatok	
<i>Valószínűségi változók eloszlásai</i>	75
3.3. Az eloszlás és az eloszlásfüggvény — 3.4. Eloszlások osztályozása — 3.5. A hisztogram — 3.6. Valószínűségi változó függvényének eloszlása	
<i>Két valószínűségi változó együttes eloszlása</i>	86
3.7. Két valószínűségi változó együttes eloszlása — 3.8. Az együttes eloszlásfüggvény — 3.9. Peremeloszlások — 3.10. Feltéte-	

les eloszlások — 3.11. Valószínűségi változók függetlensége — 3.12. Diszkrét eloszlások kompozíciója — 3.13. Folytonos eloszlások kompozíciója — 3.14. Szorzat és hányados sűrűségfüggvénye — 3.15. Eloszlások keveréke	
<i>Több valószínűségi változó együttes eloszlása</i>	110
3.16. Az együttes eloszlás értelmezése — 3.17. A feltételes eloszlás és sűrűségfüggvény — 3.18. Valószínűségi változók és vektorváltozók függetlensége — 3.19. Ekvivalens valószínűségi változók — 3.20. Feladatok	
4. Valószínűségi változók jellemzői	
<i>A várható érték</i>	123
4.1. A várható érték értelmezése — 4.2. A várható érték néhány alapvető tulajdonsága — 4.3. Valószínűségi változók függvénye várható értékének meghatározása — 4.4. Összeg és szorzat várható értéke — 4.5. A feltételes várható érték	
<i>A szórás</i>	146
4.6. A szórás értelmezése — 4.7. A szórás tulajdonságai — 4.8. A MARKOV- és a CSEBISEV-egyenlőtlenség	
<i>Korreláció</i>	152
4.9. A kovariancia és a korrelációs együttható — 4.10. A kovariancia- és a korreláció-mátrix	
<i>Valószínűségi változók további jellemző adatai</i>	161
4.11. Momentumok — 4.12. A medián — 4.13. Kvantilisok, terjedelem, módusz — 4.14. Ferdeség, lapultság — 4.15. Feladatok	
5. Nevezetes eloszlástípusok	173
5.1. Általános megjegyzések — 5.2. A binomiális eloszlás — 5.3. A polinomiális eloszlás — 5.4. A hipergeometrikus eloszlás — 5.5. A polihipergeometrikus eloszlás — 5.6. A MARKOV-PÓLYA-EGGENBERGER-eloszlás — 5.7. A geometriai eloszlás — 5.8. A negatív binomiális eloszlás — 5.9. Az exponenciális eloszlás — 5.10. A gamma-eloszlás — 5.11. Különböző paraméterű exponenciális eloszlások kompozíciója — 5.12. Az egyenletes eloszlás — 5.13. Feladatok	
6. A POISSON-eloszlás	199
6.1. A POISSON-eloszlás mint a binomiális eloszlás határértéke	
<i>Véletlen eseményfolyamatok</i>	204
6.2. Véletlen eseményfolyamatok — 6.3. Véletlen eseményfolyamatok differenciálegyenletrendszerre — 6.4. A POISSON-folyamat — 6.5. Véletlen pontelhelyezkedések	
<i>A Poisson-folyamat két alkalmazása</i>	212
6.6. ERLANG képlete — 6.7. Egy sorbanállási probléma — 6.8. Feladatok	

7. A normális és az ebből származtatott eloszlások	
<i>A normális eloszlás</i>	221
7.1. Az egydimenziós normális eloszlás — 7.2. A többdimenziós normális eloszlás	
<i>A normálisból származtatott eloszlások</i>	228
7.3. A logaritmus normális eloszlás — 7.4. A χ^2 - és a χ -eloszlás — 7.5. A STUDENT- és a CAUCHY-eloszlás — 7.6. Az F -, a z - és a béta-eloszlás — 7.7. A PEARSON-család — 7.8. Feladatok	
8. A generátor- és a karakterisztikus függvény	
<i>A generátorfüggvény</i>	247
8.1. A generátorfüggvény értelmezése — 8.2. A generátorfüggvény tulajdonságai — 8.3. Példa. Források véletlenszerű használata — 8.4. Véletlen tagszámú összegek — 8.5. Alkalmazás a láncreakciók elméletére — 8.6. Láncmolekulák lebomlása — 8.7. Példa	
<i>A karakterisztikus függvény</i>	261
8.8. Komplex értékű valószínűségi változók — 8.9. A karakterisztikus függvény értelmezése — 8.10. A karakterisztikus függvény és az eloszlás kapcsolata — 8.11. A karakterisztikus függvény további tulajdonságai	
9. Határértéktételek	
<i>A nagy számok gyenge törvényei</i>	271
9.1. Bevezető megjegyzések — 9.2. Sztohasztikus konvergencia, konvergencia 1 valószínűséggel — 9.3. BERNOULLI tétele — 9.4. BERNSTEIN tétele	
<i>A nagy számok erős törvényei</i>	279
9.5. A nagy számok gyenge és erős törvényeinek kapcsolata — 9.6. A nagy számok erős törvénye relatív gyakoriságokra. BOREL tétele — 9.7. A BOREL-CANTELLI lemma — 9.8. A nagy számok erős törvénye korlátos negyedik momentumok esetén — 9.9. KOLMOGOROV tétele — 9.10. Előírt pontosságú közelítéshez szükséges kísérletszám meghatározása	
<i>A központi határeloszlástétel</i>	289
9.11. Általános megjegyzések — 9.12. A MOIVRE-LAPLACE-tétel — 9.13. A karakterisztikus függvény alkalmazása — 9.14. A LINDBERG-FELLER tétel — 9.15. A központi határeloszlástétel alkalmazása	
<i>Markov-láncok</i>	299
9.16. A MARKOV-lánc definíciója — 9.17. Átmenet-valószínűségek — 9.18. Ergodicitás. MARKOV tétele — 9.19. Megjegyzések MARKOV tételéhez — 9.20. Egy víztárolókkal kapcsolatos probléma — 9.21. Feladatok	

10. A matematikai statisztika elemei

	<i>A statisztikai sokaság</i>	317
	10.1. A statisztikai sokaság fogalma — 10.2. A statisztikai sokaság eloszlása	
	<i>A mintavétel</i>	320
	10.3. A mintavétel — 10.4. Az n -elemű minta — 10.5. A statisztika módszereiről	
	<i>A minta eloszlása</i>	324
4.	10.6. Empirikus eloszlás — 10.7. Az \bar{x} és az s^2 eloszlása normális eloszlású sokaság esetén	
	<i>Statisztikai becslések</i>	332
	10.8. Statisztikai függvény — 10.9. A maximum-likelihood módszer	
	<i>Konfidencia-intervallumok</i>	343
	10.10. A konfidencia-intervallum fogalma — 10.11. Konfidencia-intervallum a sokaság m várható értékére $N(m, \sigma)$ eloszlás és ismert σ esetén — 10.12. Konfidencia-intervallum m -re $N(m, \sigma)$ eloszlású sokaság és ismeretlen σ esetén — 10.13. Konfidencia-intervallum két normális eloszlású sokaság várható értékeinek eltérésére egyenlő, de ismeretlen szórások esetén — 10.14. Konfidencia-intervallum σ -ra $N(m, \sigma)$ eloszlás esetén — 10.15. Konfidencia-intervallum a binomiális eloszlás ismeretlen paraméterére	
	<i>Statisztikai próbák</i>	354
5.	10.16. Az u -próba — 10.17. A t -próba — 10.18. Két várható érték eltérésének vizsgálata — 10.19. Az F -próba	
	<i>A χ^2-próbák</i>	361
	10.20. Az illeszkedésvizsgálat fogalma — 10.21. Tiszta illeszkedésvizsgálat — 10.22. Becsléses illeszkedésvizsgálat — 10.23. Függetlenségvizsgálat — 10.24. Homogenitásvizsgálat	
	<i>Regressziók</i>	373
	10.25. Kétváltozós regresszió — 10.26. Többváltozós regresszió	
	<i>Mintavétel véges sokaságból</i>	389
6	10.27. Egyszerű véletlen mintavétel véges sokaságból — 10.28. Előírt pontosságú becsléshez szükséges mintanagyság meghatározása — 10.29. Feladatok	

Függelék

	1. Halmazelméleti alapfogalmak és összefüggések	401
	2. A kombinatorika elemei	405
	3. A gamma-függvény	413
	A feladatok megoldásai	428
	Ajánlott irodalom	431
	Tárgymutató	433