Problemas resueltos de Álgebra Lineal

Isaac A. García
Jaume Giné

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}\,,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}\,,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

eines 45

Problemas resueltos de Álgebra Lineal

Isaac A. García
Jaume Giné
Seminari de Sistemes Dinàmics
Universitat de Lleida

ISBN: 978-84-8409-417-3

Maquetación:
Servei de Publicacions (UdL)

Diseño cubierta:
cat & cas

EINES es una colección del Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat de Lleida.

Índice general

Prólogo

El presente libro de problemas corresponde a los temas básicos de un primer curso de introducción al Álgebra Lineal. Los autores imparten dicha asignatura en la titulación de Ingeniería Técnica Industrial aunque el libro es igualmente recomendable para estudiantes de otras titulaciones técnicas. El libro comprende los siguientes temas: Espacios vectoriales, Matrices, determinantes y sistemas lineales, Aplicaciones lineales, Diagonalización de endomorfismos, Formas bilineales y formas quadráticas de los cuales se ha añadido un resumen de teoría.

El objetivo principal es que el alumno pueda seguir paso a paso la resolución de numerosos problemas de los temas mencionados como ejemplificación de los conceptos y resultados teóricos, complementando así los realizados en clase. Se ha procurado presentar las soluciones en la forma más práctica y directa. Se adjunta también una colección de problemas propuestos.

Nos gustaría que este libro de problemas facilitase el aprendizaje de la asignatura y, agradeceríamos cualquier sugerencia o comentario que pueda mejorarlo dirigiéndose a cualquiera de las siguientes direcciones electrónicas:
`garcia@eup.udl.es`, `gine@eup.udl.es`.

Los autores, Septiembre 2003

Capítulo 1

Matrices, Determinantes y Sistemas Lineales

1.1. Resumen de teoría

Diremos que A es una *matriz* sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con n filas y m columnas si A es una tabla ordenada de escalares $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Utilizaremos la notación $A = (a_{ij})$ para designar a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

donde, el elemento a_{ij} es ordenado en la fila i columna j de la matriz A. Al conjunto de todas las matrices de n filas y m columnas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ será denotado por $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. El caso particular de el conjunto de todas las matrices *cuadradas* es aquel para el cual $n = m$ y se escribe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz cuadrada, se define su *diagonal principal* como los elementos a_{ii} con $i = 1, \ldots, n$. Además, se llama *traza* de la matriz cuadrada A a la suma de todos los elementos de su diagonal principal, es decir, $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Habitualmente se trabajará con el cuerpo de los números reales, es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Dos matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ son iguales si sus elementos coinciden. En otras palabras, $A = B$ si $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Una matriz A se dice que es *escalonada* si el subíndice de la columna del primer elemento no nulo de cada fila es mayor que el de la fila anterior.

Clasificación de matrices: Atendiendo a la disposición de los elementos nulos de una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se tiene la siguiente clasificación: Se dice que A es

- *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$;
- *triangular inferior* si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$;
- *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.
- *identidad* y es denotada por I_n, si $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$

Operaciones con matrices: En lo que sigue, se denotarán a las matrices con letras mayúsculas A, B, C, y a los escalares por letras griegas α, β.

- *Suma:* Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Entonces $C = A + B$ si $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- *Producto por escalar:* Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $\alpha\mathbb{K}$. Entonces $B = \alpha A$ si $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.
- *Producto:* Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times \ell}(\mathbb{K})$. Entonces $C = AB$ si $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times \ell}(\mathbb{K})$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$.
- *Potencia:* Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces, se define de manera inductiva $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^{n+1} = A^n A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Propiedades de las operaciones con matrices:

- *Propiedad asociativa de la suma:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- *Propiedad conmutativa de la suma:* $A + B = B + A$.
- *Propiedades distributivas del producto por escalar:* $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha_1 + \alpha_2)A = \alpha_1 A + \alpha_2 A$.
- *Propiedad asociativa del producto por escalar:* $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- *Propiedad asociativa del producto:* $(AB)C = A(BC)$.
- *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma por la izquierda:* $A(B + C) = AB + AC$.
- *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma por la derecha:* $(B + C)A = BA + CA$.

Nótese que las dos últimas propiedades son debidas a que, en general, el producto de matrices es no conmutativo. Por lo tanto, excepto casos particulares, $AB \neq BA$. En los casos excepcionales en los cuales $AB = BA$ se dice que las matrices A y B *conmutan.*

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Se define la matriz traspuesta de A, y se denota por A^t, como la matriz $A^t = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. La operación de trasposición verifica las siguientes propiedades:

- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- $(A^t)^t = A$.
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
- $(AB)^t = B^t A^t$

Una matriz cuadrada A es *simétrica* si $A^t = A$ y *antisimétrica* si $A^t = -A$. Observar que, en términos de elementos de las matrices, se tiene que: (i) $A = (a_{ij})$ es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$; (ii) $A = (a_{ij})$ es antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$. Observar que, en particular, la última expresión implica que una matriz antisimétrica tiene todos los elementos de la diagonal principal nulos.

Transformaciones elementales o de Gauss: Dada una matriz, se llaman *transformaciones elementales por filas o de Gauss* a las siguientes manipulaciones:

(i) Cambiar el orden de dos filas. Lo simbolizaremos por $f_i \leftrightarrow f_j$.

(ii) Multiplicar a una fila por un escalar no nulo. Será denotado por $f_i \to \alpha f_i$ con $\alpha \neq 0$.

(iii) Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar. Lo notaremos por $f_i \to f_i + \alpha f_j$.

Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se dice que son *equivalentes*, y lo denotaremos por $A \sim B$, si una se puede obtener a partir de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales por filas.

Se define el *rango* de una matriz como el número de filas no nulas de una matriz escalonada equivalente. Denotaremos el rango de una matriz A por $\mathrm{rang}A$.

Matriz inversa: Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es *inversible* si existe otra matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = I_n$. En el caso de que exista, dicha matriz B se llama *matriz inversa* de A y se la denota por A^{-1}.

Además, si existe la matriz inversa de A, ésta es única puesto que

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 = B_1A = I_n \\ AB_2 = B_2A = I_n \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 = B_1I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2\ .$$

Algunas propiedades de la matriz inversa son las siguientes:

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, una forma práctica de calcular A^{-1} es mediante transformaciones elementales por filas, de manera que $(A|I_n) \sim \cdots \sim (I_n|A^{-1})$.

Determinante de una matriz cuadrada: Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada de orden n. Denotaremos por $\det A$ o bien $|A|$ al *determinante* de A. $\det A \in \mathbb{K}$ y se puede definir por inducción sobre n de la forma siguiente:

- Si $n = 2$ entonces

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}a_{22} \ .$$

- Si $n \geq 3$ entonces

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} \ , \tag{1.1}$$

  para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$. En la anterior fórmula, α_{ij} se conoce como el *adjunto* del elemento a_{ij} siendo su valor $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, donde Δ_{ij} se llama el *menor complementario* del elemento a_{ij} y se define como el determinante de la matriz de orden $n-1$ resultante de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

La fórmula (1.1) es el desarrollo de $\det A$ por su columna j-ésima. Se podía haber definido también, y de manera equivalente, el desarrollo de $\det A$ por su fila i-ésima de la manera siguiente

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ij} \ ,$$

para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Veamos algunas de las propiedades de los determinantes.

- Si se multiplica una fila (o una columna) por una constante, el determinante queda multiplicado por ella.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ .$$

- Si se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia su signo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \ .$$

- Si una fila (o columna) es nula el determinante vale cero

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

- Si dos filas (o columnas) son iguales el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

- Si dos filas (o columnas) son proporcionales el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

- Si una fila es combinación lineal de las otras (o una columna es combinación lineal de las otras) el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{21} & \alpha a_{12} + \beta a_{22} & \alpha a_{13} + \beta a_{23} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

- Si a una fila (o a una columna) se le suma una combinación lineal de las otras el determinante no cambia su valor.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \alpha a_{11} + \beta a_{21} & a_{32} + \alpha a_{12} + \beta a_{22} & a_{33} + \alpha a_{13} + \beta a_{23} \end{vmatrix} .$$

- Si un determinante posee una fila (o una columna) formada por sumas, se puede descomponer en la suma de dos determinantes de la manera siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha & a_{12} + \beta \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

- $\det A = \det A^t$.
- $\det(AB) = \det A \det B$.

Determinantes, rango y matrices inversas: Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de orden n, se puede demostrar que los siguientes enunciados son equivalentes: i) $\det A \neq 0$; ii) A es inversible; iii) $\text{rang} A = n$.

Si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es inversible, otra forma alternativa de calcular su matriz inversa A^{-1} es la siguiente:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\tilde{A})^t \ ,$$

donde $\tilde{A}$ se llama la *matriz adjunta* de A y sus elementos son los adjuntos de A ordenados en filas y columnas según sus subíndices, es decir, $\tilde{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Sistemas lineales de ecuaciones: Un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se define como un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \ , \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \ , \end{array}$$

siendo los a_{ij} y b_i escalares de $\mathbb{K}$ para $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \ ,$$

se llama *matriz de coeficientes* del sistema, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^t$ se llama el *vector de incógnitas* y $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t$ el *vector de términos independientes.* El sistema lineal se escribe en forma matricial como $Ax = b$. Diremos que el vector $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)^t$ es *solución* del sistema lineal $Ax = b$ si verifica la igualdad $As = b$.

Atendiendo al número de soluciones de un sistema lineal, éste se clasifica de la manera siguiente.

- Un sistema es *incompatible* si no admite ninguna solución.
- Un sistema es *compatible* si admite alguna solución.
    - Un sistema es *compatible determinado* si admite una única solución.
    - Un sistema es *compatible indeterminado* si admite infinitas soluciones. En este caso, se define el número de *grados de libertad* del sistema lineal como el número de parámetros del cual depende el conjunto de soluciones del sistema.

Se define la *matriz ampliada* A^* asociada al sistema lineal $Ax = b$ como la matriz

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m+1}(\mathbb{K}) \ .$$

Teorema 1 (Rouché-Frobenius) *El sistema lineal $Ax = b$ de n ecuaciones y m incógnitas es compatible si y sólo si* $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^* = r$. *Además, si $r = m$ entonces el sistema es compatible determinado y si $r < m$ entonces el sistema es compatible indeterminado con $m - r$ grados de libertad.*

Un sistema lineal que tenga el vector de términos independientes nulo, es decir, $Ax = 0$, se llama sistema *homogéneo*. Es obvio que todo sistema homogéneo es compatible puesto que posee, al menos, la solución trivial $x = (0, 0, \ldots, 0)^t$.

Si A es una matriz cuadrada, es decir, el sistema lineal tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, entonces una consecuencia inmediata del Teorema de Rouché-Frobenius es que un sistema lineal homogéneo posee soluciones distintas de la trivial si y sólo si $\det A \neq 0$.

Método de eliminación de Gauss: Este método para resolver el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$ consiste en hallar, mediante transformaciones elementales por filas, una matriz escalonada equivalente a la matriz ampliada del sistema, es decir, $A^* \sim \cdots \sim B^*$, siendo B^* escalonada. Entonces, el conjunto de soluciones del sistema lineal con matriz ampliada A^* es el mismo que el del sistema lineal con matriz ampliada B^*, siendo éste último de fácil resolución por sustitución hacia atrás.

Regla de Cramer: Consideremos un sistema lineal $Ax = b$ compatible determinado con el mismo número n de ecuaciones que de incógnitas. Entonces es claro que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con $\det A \neq 0$. En este caso, la solución $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ del sistema viene dada por

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \ , \ i = 1, \ldots, n \ ,$$

donde la columna i-ésima está formada por el vector de términos independientes.

1.2. Problemas propuestos

1.2.1. Matrices

1. *Decir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:*

   (a) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2,$

   (b) $A \cdot B = A \cdot C \implies B = C, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2; A \neq 0.$

2. *Demostrar que si una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *satisface la ecuación* $aA^2+bA+cI_n=0$*, siendo* $a,b,c \in \mathbb{R}$*, con* $c \neq 0$*; entonces la matriz* A *es inversible.*

3. *Calcular el rango de la siguiente matriz en función del parámetro* a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & -5 \\ 4 & a^2 & 25 \end{pmatrix}.$$

4. *Demostrar que todas las matrices de la forma* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ *con* $a,b \in \mathbb{R}$ *conmutan entre ellas.*

5. *Encontrar* A *y* x *que verifican la ecuación* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} A$*, donde* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, con* $A \neq 0$.

6. *Resolver la ecuación matricial* $A \cdot X = B$*, siendo* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

7. *Encontrar todas las soluciones de* $A^2 = 0$ *con* $A \in \mathcal{M}_2$.

8. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n$*, demostrar que* AA^t *es una matriz simétrica.*

9. *Dado el sistema matricial*

$$\begin{cases} (X+Y) \cdot C & = & X, \\ C - Y & = & 3I_n - 2A, \end{cases}$$

aislar X *e* Y*, indicando las propiedades que se han de cumplir para poder efectuar las operaciones. Determinar* X *e* Y *en el caso particular que*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. *Sean* A *y* B *matrices cuadradas inversibles. Encontrar* X*, en función de* A *y* B*, tal que* $A \cdot B \cdot A^{-1} \cdot X \cdot B \cdot A^{-1} + A = 0$.

11. *Comprobar que si* A *i* $I - A$ *son matrices inversibles, entonces se verifica que* $A \cdot (I-A)^{-1} = (A^{-1} - I)^{-1}$.

12. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *tales que* $A^k = 0$*. Demostrar que la matriz* $I_n - A$ *es inversible y que* $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

13. *Dada la matriz cuadrada* A*, diremos que* A *es involutiva si* $A^2 = I$ *y que es idempotente si* $A^2 = A$.

a) *Sea A una matriz involutiva. Definimos $B = \frac{1}{2}(I + A)$. Demostrar que B es idempotente.*

b) *Sean A y B dos matrices cuadradas tales que $A = A \cdot B$ y $B = B \cdot A$. Demostrar que A y B son idempotentes.*

14. *Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $A + A^2 + A^3 + \cdots A^n$. Demostrar el resultado por inducción.*

15. *Calcular el rango de las siguientes matrices:*

$$(a) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix},$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

16. *Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^2. Encontrar a y b tales que $A^2 + aA + bI = 0$. Encontrar la matriz A^{-1}.*

17. *Sea A una matriz cuadrada que satisface la ecuación $A^3 - 3A^2 + 2A + I = 0$. Probar que A tiene inversa y calcularla en función de A.*

18. *Encontrar las matrices inversas de las matrices siguientes:*

$$(a) \begin{pmatrix} 17 & -15 & -2 \\ 7 & -7 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (b) \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (d) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2.2. Determinantes

1. *Calcular los siguientes determinantes:*

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \qquad (b)\ \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad (d)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. *Calcular los siguientes determinantes:*

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix},$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}, \qquad (d)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

3. *Resolver las siguientes ecuaciones:*

$$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 4, \qquad (b)\ \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ x & a & a & x \end{vmatrix} = 0,$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} 1+x & x & x & x \\ x & 1+x & x & x \\ x & x & 1+x & x \\ x & x & x & 1+x \end{vmatrix} = 0, \qquad (d)\ \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Probar que si a es una raíz cúbica de la unidad, es decir, $a^3 = 1$, entonces*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. *Demostrar, mediante las propiedades de los determinates que*

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

6. *Probar que el determinante* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ *es múltiplo de* 11.

7. *Demostrar, sin calcular los determinantes, que*

$$\begin{vmatrix} 1/x & x & x^2 \\ 1/y & y & y^2 \\ 1/z & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz/x & 1 & x \\ xz/y & 1 & y \\ xy/z & 1 & z \end{vmatrix},$$

para $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

8. *Demostrar la siguiente igualdad para el llamado determinante de Vandermonde*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

9. *Calcular los siguientes determinantes utilizando propiedades de los determinantes:*

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}, \qquad (b) \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix},$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}, \qquad (d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

10. *Si* $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *y* $|A| = 2$, *determinar* $|3A|$ *y* $|5A^{-1}|$.

11. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tal que* $A^2 = -I_n$. *Demostrar que* A *es inversible, que* n *es par y que* $|A| = \pm 1$.

12. *Calcular, utilizando determinantes, las matrices inversas de las siguientes matrices*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix},$$

encontrar los valores de t para los cuales existe matriz inversa A^{-1}. Calcular A^{-1} en el caso $t = 2$.

1.2.3. Sistemas lineales

1. *Resolver los siguientes sistemas lineales:*

$$(a)\qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x - 3y + 2z & = & 6; \\ 2x + y - 5z & = & -4; \\ 2x - 13y + 13z & = & 28; \end{array} \right.$$

$$(b)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + 3z + u - 3v & = & 2; \\ 3x - 2y + z - u - 2v & = & 4; \\ 4x + 5y - z - 3u - v & = & 6; \\ 5x - 2y + 2z + 2u + 4v & = & -3. \end{array} \right.$$

2. *Utilizando la regla de Cramer, discutir y resolver los siguientes sistemas lineales:*

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3; \\ x - y + z & = & 2; \\ 2x + 4y + 2z & = & 5; \end{array} \right. \qquad (b)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 4; \\ x - y + 3z & = & 3; \\ 8x + y + 7z & = & 11. \end{array} \right.$$

3. *Utilizando el método de Gauss, discutir y resolver los siguientes sistemas lineales, según los valores de los parámetros que aparecen:*

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - ay & = & 1; \\ -x + 2y - az & = & 1; \\ -y + 2z & = & 1; \end{array} \right. \qquad (b)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y & = & 2a; \\ x + y & = & 5; \\ 2ax + 6y & = & a + 3; \end{array} \right.$$

$$(c)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + az & = & a^2; \\ x + ay + z & = & a; \\ ax + y + z & = & 1; \end{array} \right. \qquad (d)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + z & = & 1; \\ x + aby + z & = & b; \\ x + by + az & = & 1. \end{array} \right.$$

4. *Utilizando determinantes resolver el sistema lineal según los valores del parámetro a*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-4y-3z+3t &=& a;\\ 3x+5y+2t &=& 5;\\ 7y-6z+7t &=& 13. \end{array}\right.$$

5. *Estudiar para qué valores de a, b y c el sistema lineal admite como mínimo una solución*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z &=& a;\\ x+2y+z &=& b;\\ 3x+y-2z &=& c. \end{array}\right.$$

6. *Determinar los valores de a y b que verifican que el sistema lineal homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 0;\\ 2x+5y-8z &=& 0;\\ ax+by+3z &=& 0;\\ ax+y+bz &=& 0. \end{array}\right.$$

7. *Encontrar, si es posible, un sistema lineal que posea como únicas soluciones* $s_1=(1,1)$ *y* $s_2=(-2,1)$.

8. *Discutir los sistemas de ecuaciones lineales siguientes según los valores de los parámetros* $a,b\in\mathbb{R}$. *Resolverlos cuando sea posible.*

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+bz &=& 1;\\ x+ay+z &=& b;\\ bx+y+az &=& 1;\\ x+by+z &=& a; \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& b;\\ x+y+bz &=& 0;\\ y+az &=& 1. \end{array}\right.$$

1.3. Problemas resueltos

1. *Sea* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Probar que el determinante de una matriz antisimétrica* ($A^t=-A$) *de orden n impar es nulo.*

Solución. Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, por las propiedades de los determinantes se tiene que $\det(-A)=(-1)^n\det A$. Como n es impar se verifica $(-1)^n=-1$, de manera que

$$\det(-A)=-\det A\ . \tag{1.2}$$

Por otra parte, como la matriz A es antisimétrica se verifica $-A=A^t$. Tomando determinantes $\det(-A)=\det(A^t)=\det A$, donde el último paso es una propiedad de los determinantes. Finalmente, entre la ecuación anterior y la ecuación (1.2) se obtiene $-\det A=\det A$ de lo que concluimos que $\det A=0$.

2. *Discutir en función del parámetro a el sistema de ecuaciones lineales siguiente*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+z &=& 1\\ 2x-ay-z &=& 0\\ ax-y+(a+1)z &=& a \end{array}\right.$$

Solución. Denotaremos por A a la matriz de coeficientes del sistema y por A^* la matriz ampliada. Utilizando el método de eliminación Gaussiana para la matriz ampliada A^* del sistema lineal de ecuaciones, obtendremos mediante transformaciones elementales una matriz equivalente escalonada.

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & -a & -1 & 0\\ a & -1 & a+1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 4-a & -3 & -2\\ 0 & 2a-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\\ &\sim^* \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 4-a & -3 & -2\\ 0 & 0 & 5a+1 & 4a-2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denotando por f_i a la fila i-ésima, las transformaciones elementales realizadas en cada paso han sido:

(i) $f_2 \to f_2 - 2f_1$, $f_3 \to f_3 - af_1$.

(ii) $f_3 \to (4-a)f_3 - (2a-1)f_1$. Notar que esta transformación $(*)$ es elemental sólo para $a \neq 4$, de manera que el caso $a = 4$ lo estudiaremos a parte.

Ahora procedemos, mediante el Teorema de Rouche-Frobenius, a la discusión del sistema en función de los valores del parámetro $a \neq 4$.

(1) Si $a \neq -1/5$ se tiene que $\text{rang}A = \text{rang}A^* = 3$ y por lo tanto el sistema es compatible y determinado.

(2) Si $a - 1/5$ se tiene que $\text{rang}A = 2 \neq \text{rang}A^* = 3$ y por lo tanto el sistema es incompatible.

Finalmente, estudiamos el caso $a = 4$ para el cual la matriz A^* es equivalente a

$$A^* \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & -2\\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

donde en el último paso se han permutado la fila 2 y la 3. Se concluye que $\text{rang}A = \text{rang}A^* = 3$ de manera que el sistema es compatible y determinado.

En resumen, si $a \neq -1/5$ el sistema es compatible y determinado. Para $a - 1/5$ se tiene que el sistema es incompatible.

Otra forma de calcular los rangos de la matriz A y A^* es mediante determinantes. En este caso se tiene

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -a & -1 \\ a & -1 & a+1 \end{vmatrix} = 5a+1 \ ,$$

de manera que si $a \neq -1/5$ entonces $\det A \neq 0$ y por lo tanto $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A^* = 3$ y el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -1/5$ podemos obtener una submatriz de A cuadrada y de orden 2 con determinante no nulo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1/5 \end{vmatrix} = \frac{21}{5} \neq 0 \ ,$$

de manera que $\mathrm{rang}A = 2$. Además, para el valor $a = -1/5$, podemos obtener una submatriz de A^* cuadrada y de orden 3 con determinante no nulo. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1/5 & -1 & 0 \\ -1 & 1-1/5 & -1/5 \end{vmatrix} = -\frac{6}{5} \neq 0 \ ,$$

de manera que $\mathrm{rang}A^* = 3$. Concluimos que el sistema lineal es incompatible para $a = -1/5$.

3. *Probar, sin calcular los determinantes, la siguiente igualdad*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} \ ,$$

donde a, b, $c \neq 0$.

Solución.

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} .$$

4. *Calcular A^{51} donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.*

Solución. Puesto que

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \ ,$$

es fácil comprobar que

$$A^n = \begin{cases} I_2 & \text{si } n \text{ es par} \\ A & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

5. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = p \neq 0$. Sea $k \in \mathbb{R}$. Calcular $\det(A^n)$, $\det(kA)$, $\det([A^{-1}]^n)$ en función de p y k.*

Solución. Debido a las propiedades de los determinantes se verifica

$$\begin{aligned} \det(A^n) &= \det(A \cdots A) = \det(A) \cdots \det(A) = [\det(A)]^n = p^n \ . \\ \det(kA) &= k^n \ \det(A) = k^n p \ . \\ \det([A^{-1}]^n) &= \det(A^{-1} \cdots A^{-1}) = \det(A^{-1}) \cdots \det(A^{-1}) = \frac{1}{p} \cdots \frac{1}{p} = p^{-n} \ . \end{aligned}$$

6. *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resolverlo para $a = 0$.*

$$\begin{aligned} (2a+2)x + 3y + az &= a+4 \\ (4a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z &= 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z &= a-1 \end{aligned}$$

Solución. Llamemos A a la matriz de coeficientes del sistema y A^* a la matriz ampliada. Realicemos en primer lugar el cálculo del determinante de la matriz A.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ 5a-4 & a+1 & 3a-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2 & 3 & a \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 \\ a-3 & 0 & a-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+2 & 3 & a \\ 2a & a+1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3) \begin{vmatrix} a+2 & 3 \\ 2a & a+1 \end{vmatrix} \\ &= (a-3)(a-2)(a-1) \ , \end{aligned}$$

donde en el primer paso hemos realizado la transformación elemental por filas $f_3 \to f_3 - f_2$ y en el segundo paso la transformación elemental por columnas $c_1 \to c_1 - c_3$.

Utilizando el Teorema de Rouché-Frobenius se obtiene

(1) Si $a \neq 1, 2, 3$ se tiene que $\text{rang} A = \text{rang} A^* = 3$ y por lo tanto el sistema es compatible y determinado.

(2) Si $a = 1, 2, 3$ se tiene que $\text{rang} A < 3$ y hay que estudiar el rango de A^* en cada caso.

En el caso $a = 1$, utilizando el método de eliminación Gaussiana para la matriz ampliada A^* del sistema lineal de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

donde las transformaciones elementales por filas realizadas secuencialmente han sido primero intecambiar f_1 y f_3 y posteriormente $f_2 \to f_2 - 3f_1$, $f_3 \to f_3 - 4f_1$. De este cálculo se desprende que $\text{rang}A = \text{rang}A^* = 2$ de manera que el sistema es compatible e indeterminado.

En el caso $a = 2$, utilizando también el método de eliminación Gaussiana, se obtiene

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

donde las transformaciones elementales por filas realizadas han sido intercambiar f_1 y f_2 y $f_3 \to f_2 - f_3$ en el primer paso y $f_2 \to 7f_2 - 6f_1$ en el último paso. Se concluye que $\text{rang}A = 2 \neq \text{rang}A^* = 3$ de manera que el sistema es incompatible.

Finalmente, en el caso $a = 3$, utilizando otra vez el método de eliminación Gaussiana, se obtiene

$$A^* = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 11 & 4 & 5 & 8 \\ 11 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 11 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donde las transformaciones elementales por filas efectuadas han sido $f_3 \to f_2 - f_3$ en el primer paso y $f_2 \to 8f_2 - 11f_1$ en el segundo. En definitiva se concluye que $\text{rang}A = 2 \neq \text{rang}A^* = 3$ de manera que el sistema es incompatible.

En resumen, si $a \neq 1, 2, 3$ el sistema es compatible y determinado. Para $a = 1$ el sistema es compatible e indeterminado y para $a = 2, 3$ se tiene que el sistema es incompatible.

Por el estudio efectuado anteriormente, en el caso $a = 0$ el sistema es compatible determinado y por lo tanto podemos aplicar el método de Cramer para resolver el sistema lineal de ecuaciones. De este modo se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = 3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{7}{2}.$$

7. *Sea A una matriz $n \times n$ verificando $A^2 + A + I_n = 0$, donde I_n es la matriz identidad de orden n.*

   (i) *Probar que A es invertible.*

   (ii) *Demostrar que $A^3 = I_n$.*

   (iii) *Expresar A^n en función de A e I_n.*

Solución. **(i)** De la definición de matriz inversa se tiene $I_n = AA^{-1}$. La expresión $A^2 + A + I_n = 0$ se puede escribir como $A^2 = -A - I_n = -A - AA^{-1} = A(-I_n - A^{-1})$. De esta última igualdad se deduce que $A = -I_n - A^{-1}$ de la cual podemos despejar $A^{-1} = -I_n - A$.

(ii) Multiplicando por A la igualdad $A^2 + A + I_n = 0$, se obtiene $A^3 + A^2 + A = 0$ o de forma equivalente $A^3 = -A - A^2$. Remplazando en esta última igualdad el valor de $A^2 = -A - I_n$, se obtiene $A^3 = I_n$.

(iii) Teniendo en cuenta que $A^3 = I_n$, se puede afirmar que $A^{3m} = I_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $A^{3m+1} = A$ y $A^{3m+2} = A^2 = -A - I_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$. En definitiva

$$A^k = \left\{ \begin{array}{rcl} I_n & \text{si} & k = 3m \ , \\ A & \text{si} & k = 3m+1 \ , \\ -A - I_n & \text{si} & k = 3m+2 \ . \end{array} \right.$$

8. *Justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:*

   (a) *El sistema* $\left\{ \begin{array}{lcl} ax + y + z & = & b^2, \\ a^2y + z & = & 1, \end{array} \right.$ *tiene infinitas soluciones $\forall a, b \in \mathbb{R}$.*

   (b) *Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas puede ser incompatible.*

Solución. **(a)** La matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a^2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b^2 \\ 0 & a^2 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

tienen igual rango, es decir $\text{rang}A = \text{rang}A^* = 2$ para cualquier a y b reales y además el rango es menor que el número de incógnitas 3, por lo tanto aplicando el teorema de Rouche-Frobenius se concluye que el sistema lineal es compatible indeterminado $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ y en consecuencia admite infinitas soluciones.

(b) Un sistema lineal homogéneo admite siempre la solución trivial (todas las incógnitas nulas) y por lo tanto siempre es compatible.

9. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada de orden n con elementos reales tal que $A^2 = -I_n$, siendo I_n la matriz identidad de orden n. Demostrar que A es inversible, que n es un número par y que* $\det A = \pm 1$.

Solución. De la relación $A^2 = -I_n$ se tiene $\det(A^2) = \det(-I_n)$, es decir, $(\det A)^2 = (-1)^n$, donde n es el orden de la matriz I_n y por tanto el orden de la matriz A. Como $(\det A)^2$ es un número no negativo, entonces n tiene que ser par y nos queda $(\det A)^2 = 1$, de donde $\det A = \pm 1$. Como el determinante de la matriz A es no nulo la matriz A es invertible.

10. **(a)** *Sean A y B matrices cuadradas inversibles. Encontrar X (en función de A y B) tal que verifica $ABA^{-1}XBA^{-1} + A = 0$.*

(b) *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Encontrar, si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \beta A + \alpha I = 0$. Deducir el valor de A^{-1}.*

Solución. **(a)** Utilizando las propiedades del álgebra de matrices, la ecuación $ABA^{-1}XBA^{-1} + A = 0$ se puede desarrollar de la forma

$$\begin{aligned} ABA^{-1}XBA^{-1} &= -A \\ BA^{-1}XBA^{-1} &= -I \\ A^{-1}XBA^{-1} &= -B^{-1} \\ XBA^{-1} &= -AB^{-1} \\ XB &= -AB^{-1}A \\ X &= -AB^{-1}AB^{-1} = -(AB^{-1})^2 \ . \end{aligned}$$

En definitiva, $X = -(AB^{-1})^2$.

(b) La expresión matricial de la igualdad $A^2 + \beta A + \alpha I = 0$ es

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & -2\beta \\ -3\beta & 4\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Identificando los elementos de igual fila y columna en la ecuación anterior obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} 7 + \beta + \alpha &= 0 \ , \\ -10 - 2\beta &= 0 \ , \\ -15 - 3\beta &= 0 \ , \\ 22 + 4\beta + \alpha &= 0 \ . \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que este sistema es compatible determinado y su única solución es $\alpha = -2$ y $\beta = -5$.

Existe otro método para resolver el problema planteado basado en el Teorema de Cayley-Hamilton. Em concreto, el polinomio característico asociado a la matriz A viene dado por

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \ .$$

Aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton se tiene $Q_A(A) = 0$, es decir $A^2 - 5A - 2I = 0$ con lo cual se ha vuelto a provar el mismo resultado.

Para calcular el valor de A^{-1}, partimos de $A^2 - 5A - 2I = 0$ y multiplicamos dicha ecuación por A^{-1}, de lo cual se obtiene $A - 5I - 2A^{-1} = 0$. Finalmente, despejando de esta igualdad concluimos que

$$A^{-1} = (A - 5I)/2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

11. **(i)** *Sin calcular los determinantes, demostrar la identidad*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} .$$

(ii) *Demostrar que, si al menos una de las dos matrices cuadradas del mismo orden A, B es no singular, entonces las matrices AB y BA son semejantes.*

Solución. **(i)** Supondremos que $abc \neq 0$ puesto que en caso contrario la identidad es trivial. Multiplicando en el determinante de la izquierda la primera fila por a, la segunda por b y la tercera por c y dividiendo todo el determinante por abc se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} ,$$

donde en el segundo paso hemos sacado el factor común abc de la tercera columna a multiplicar al determinante y en el último hemos permutado 2 columnas.

(ii) Recordemos que las matrices AB y BA son semejantes si existe una matriz P no singular tal que $BA = P^{-1}AP$.

Supongamos que A es no singular. Entonces se tiene $BA = IBA$, siendo I la matriz identidad. De aquí se deduce que $BA = A^{-1}ABA$ y por lo tanto AB y BA son semejantes siendo $P = A$.

12. *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resolverlo para a = 0.*

$$\begin{aligned} (1-a)x + (1+2a)y + 2(a+1)z &= a \\ ax + ay &= 2(a+1) \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z &= a^2 - 2a + 9 \end{aligned}$$

Solución. Sea A la matriz de coeficientes del sistema lineal del enunciado y A^* la matriz ampliada. Calculemos el siguiente determinante

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1-a & 1+2a & 2(a+1) \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 3a & 2(a+1) \\ a & 0 & 0 \\ 2 & a-1 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= -a \begin{vmatrix} 3a & 2(a+1) \\ a-1 & a-1 \end{vmatrix} = -a(a-1) \begin{vmatrix} 3a & 2(a+1) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -a(a-1)(a-2) \ , \end{aligned}$$

donde en el primer paso se ha restado a la columna 2 la columna 1 para posteriormente desarrollar el determinante por la fila 2 y en el tercer paso se ha sacado factor común de la fila 2. Puesto que si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se tiene que $\det A \neq 0$ y por lo tanto $\mathrm{rang} A = 3$, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius se concluye que el sistema es compatible determinado. Veamos que ocurre para el resto de valores del parámetro a.

Si $a = 0$ entonces, realizando transformaciones elementales, la matriz A^* es equivalente a

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

donde en el segundo paso se han permutado la fila 2 y 3 y en el último paso se ha realizado la transformación elemental $f_2 \to f_2 - 2f_1$. En definitiva la matriz A^* tiene rango 3. Sin embargo, la matriz A tiene rango 2 y por lo tanto, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible si $a = 0$.

Si $a = 1$ entonces realizamos transformaciones elementales a la matriz A^* con el objetivo de escalonarla

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

Se tiene pues que el rango de A^* y de A es 2, de manera que, aplicando de nuevo el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado si $a = 1$.

Finalmente, si $a = 2$ entonces la matriz A^* es equivalente a

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 12 & 12 & 10 \\ 0 & 13 & 13 & 13 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 12 & 12 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 12 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Este cálculo muestra que el rango de A^* vale 3 y el de A vale 2, de manera que, por el Teorema de Rouché-Frobenius se tiene que el sistema es incompatible si $a = 2$.

En definitiva, la discusión del sistema es la siguiente:

$$\text{rang} A = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad a \neq 0, 1, 2 \ , \\ 2 & \text{si} \quad a = 0, 1, 2 \ . \end{cases}$$

$$\text{rang} A^* = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad a \neq 0, 1, 2 \ , \\ 3 & \text{si} \quad a = 0, 2 \ , \\ 2 & \text{si} \quad a = 1 \ . \end{cases}$$

Por lo tanto el sistema es compatible determinado si $a \neq 0, 1, 2$, es compatible indeterminado si $a = 1$ y es incompatible si $a = 0, 2$. En consecuencia no tiene ninguna solución si $a = 0$.

13. *Discutir, según los valores de los parámetros reales a y b, el siguiente sistema lineal*

$$\begin{cases} ax + by + 2z & = & 1, \\ ax + (2b-1)y + z & = & 1, \\ ax + by + (b+3)z & = & 2b - 1. \end{cases}$$

Solución. Sea A la matriz de coeficientes del sistema y A^* su matriz ampliada. Se tiene pues que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 1 \\ a & b & b+3 \end{pmatrix} ,$$

siendo su determinante $\det A = a(b^2 - 1)$. Por lo tanto, si $a(b^2 - 1) \neq 0$ entonces $\text{rang} A = \text{rang} A^* = 3$ y, por el Teorema de Rouche-Frobenius, el sistema lineal es compatible y determinado. Estudiemos el resto de valores de los parámetros a y b por separado.

- Si $a = 0$ entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & 2b-1 & 1 & 1 \\ 0 & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix} .$$

Sea B la matriz cuadrada formada con las tres últimas columnas de la anterior matriz A^*. Es fácil ver que $\det B = -5(b-1)^2$. Por lo tanto, si $b \neq 1$, se tiene que rang$A = 2 \neq$ rang$A^* = 3$ y, por el Teorema de Rouche-Frobenius, el sistema lineal es incompatible. Finalmente, si $b = 1$ se obtiene

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto rang$A =$ rang$A^* = 2$ y, por el Teorema de Rouche-Frobenius, el sistema lineal es compatible indeterminado.

- Si $b = 1$ y $a \neq 0$ entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto rang$A =$ rang$A^* = 2$ y, por el Teorema de Rouche-Frobenius, el sistema lineal es compatible indeterminado.

- Si $b = -1$ y $a \neq 0$ entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ a & -3 & 1 & 1 \\ a & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

por lo tanto rang$A = 2 \neq$ rang$A^* = 3$ y, por el Teorema de Rouche-Frobenius, el sistema lineal es incompatible.

En resumen se tiene: (1) si $b = -1$ el sistema es incompatible. (2) Si $b = 1$ el sistema es compatible indeterminado. (3) Si $b \neq \pm 1$ y $a \neq 0$, el sistema es compatible determinado. (4) Si Si $b \neq \pm 1$ y $a = 0$, el sistema es incompatible.

14. *Demostrar, sin calcular los determinantes, que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & a^5 \\ 1 & a^3 & a^6 \\ a & a^4 & a^7 \end{vmatrix}, \quad \forall\ a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{R}.$$

Solución. En el primer determinante, sumando la segunda fila a la tercera y sacando el factor común $a + b + c$ del determinante, se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall\ a,\ b \text{ y } c \in \mathbb{R},$$

puesto que es un determinante con dos filas iguales. En el segundo determinante, sacando el factor común a^2 de la segunda columna y sacando el factor común a^5 de la tercera columna, nos queda

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & a^5 \\ 1 & a^3 & a^6 \\ a & a^4 & a^7 \end{vmatrix} = a^2 a^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ a & a^2 & a^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}\ ,$$

puesto que es un determinante con dos columnas iguales. Por tanto el valor de los dos determinantes es el mismo.

15. *Discutir y resolver en los casos en que se pueda el siguiente sistema lineal de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x - 2y + z - t &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 2 \\ -x + 3y - z + 4t &= -1 \end{aligned}$$

Solución. Utilizando el algoritmo de eliminación Gaussiana y denotando por A y A^* a la matriz del sistema y matriz ampliada respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde las transformaciones elementales por filas realizadas han sido $f_2 \to f_2 - 2f_1$ y $f_3 \to f_3 + f_1$ en el primer paso y $f_3 \to 5f_3 - f_2$ en el segundo paso. De aquí se deduce que $\text{rang}A = \text{rang}A^* = 3$ y por lo tanto, por el Teorema de Rouche-Frobenius, el sistema lineal de ecuaciones es compatible indeterminado siendo además 1 el número de grados de libertad que posee. Tomando t como la variable independiente, es fácil ver que las soluciones del sistema son

$$x = 1 - 18t\ ,\ y = -3t\ ,\ z = 13t\ .$$

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.1. Resumen de teoría

Sea $(E, +)$ un grupo conmutativo y $(\mathbb{K}, +, .)$ un cuerpo. Diremos que E es un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* si se tiene definida una operación externa $\mathbb{K} \times E \to E$ tal que $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifica (i) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$; (ii) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$; (iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$; (iv) $1x = x$ siendo 1 el elemento neutro de la segunda operación del cuerpo $\mathbb{K}$. NOTACIÓN: Los elementos de E se llaman *vectores* y los de $\mathbb{K}$ *escalares.*

Combinación Lineal: Sean $v_i \in E$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. Una *combinación lineal* de dichos vectores es cualquier vector de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in E$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores v_i con $i = 1, 2, \ldots, n$, se denota por $< v_1, v_2, \ldots, v_n >$.

Subespacio Vectorial: Un subconjunto $S \subset E$ es un *subespacio vectorial* si verifica: (i) $0_E \in S$, siendo 0_E el elemento neutro de E; (ii) $\forall x \in S$, $-x \in S$; (iii) $\forall x, y \in S$, $x + y \in S$; (iv) $\forall x \in S$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x \in S$.

Proposición 1 *Un subconjunto $S \subset E$ con $S \neq \emptyset$ es un subespacio vectorial si y sólo si $\forall x, y \in S$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifica que $\alpha x + \beta y \in S$.*

Proposición 2 *Sea $F = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$. Entonces se verifica lo siguiente: (i) $< F >$ es un subespacio vectorial (llamado subespacio engendrado por F); (ii) $F \subset< F >$; (iii) $< F >$ es el subconjunto más pequeño que verifica (i) y (ii).*

Independencia Lineal: Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ es *linealmente independiente* si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_E \Rightarrow \alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. En caso contrario se llama *linealmente dependiente.*

Conjunto Generador: Se dice que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ es un *conjunto generador* de E si $\forall w \in E$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ con $i = 1, \ldots, n$ tal que $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$.

Base: Un espacio vectorial que admita un conjunto generador formado por un número finito de vectores se dice que es un *espacio vectorial finitamente generado*. Dichos espacios vectoriales tienen al menos un conjunto de vectores linealmente independientes y generadores llamado *base*. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de E, entonces $\forall w \in E$ se tiene que $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ únicos y se escribe $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$ para indicar que las α_i son las *componentes* de w en la base $\mathcal{B}$. Además, se verifica que todas las bases de un espacio vectorial E tienen el mismo número n de elementos, definiendo en este caso la dimensión de E como n y denotándolo por $\dim E = n$.

Teorema 2 *Sea $F = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset E$ y $\dim E = n$. Entonces F es linealmente independiente si y sólo si es generador.*

Proposición 3 *Si E es de dimensión finita y S es un subespacio de E entonces: i) $\dim S \leq \dim E$; ii) $\dim S = \dim E$ implica $S = E$.*

Cambio de Base: Sean $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dos bases de E. Entonces $\forall w \in E$ se tiene $w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}_1} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{B}_2}$. Si la relación entre los vectores de las dos bases es $u_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

son las *euaciones del cambio de base*. La matriz cuadrada $M_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = (a_{ij})$ se llama *matriz de cambio de base*. Dichas matrices son inversibles y se verifica $M^{-1}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1}$.

Operaciones con Subespacios: Sean S y T dos subespacios vectoriales de E. $S \cap T$ siempre es subespacio de E. $S \cup T$ no es, en general, subespacio de E. Se define el *subespacio suma* $S + T =< S \cup T >= \{u \in E \mid u = v + w$ siendo $v \in S, w \in T\}$.

Teorema 3 (Grassman) *Si S y T son subespacios de un espacio de dimensión finita, entonces $\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$.*

Diremos que los subespacios S y T del espacio E forman *suma directa* y lo denotaremos por $S \oplus T$ cuando $S \cap T = \{0_E\}$. Además S y T se llaman *complementarios* cuando $S \oplus T = E$.

2.2. Problemas propuestos

2.2.1. Espacios y subespacios vectoriales

1. *Encontrar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del* $\mathbb{R}^n$ *correspondiente*

   a) $\mathbb{R}^3 - \{(1,0,1)\}$;
   b) $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid y = x^2\}$;
   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$;
   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$;
   e) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$;
   f) $\{(x,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y = 0, x - y = 0\}$;
   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2xy + 6x = z\}$;
   h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2y - z = \sqrt{5}z\}$.

2. *El conjunto* $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *tiene una estructura natural de espacio vectorial. Encontrarla y verificar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de* E.

   a) $\{f \in E,\ f(1) = 2f(0)\}$;
   b) $\{f \in E,\ f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   c) $\{f \in E,\ f(-x) = 3f(x) + 2\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   d) $\{f \in E,\ f \text{ es derivable en } x = 0\}$;
   e) $\{f \in E,\ f(0) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

3. *Encontrar qué subconjuntos del espacio vectorial* $E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ *son linealmente independientes*

   a) $1 + x$, $3x + x^2$, $x^2 - 1$;
   b) 0, $2x - 1$, $2x + 1$;
   c) 1, $\sqrt{3}x + x^2$, $2 - x$;
   d) 1, $2x + x^2$, $2 - x$;
   e) $\sin x$, $\cos x$, 1;
   f) $\sin 2x$, $\sin x$, $\sin 3x$;
   g) e^x, e^{x+3}, 1.

4. *Probar que* $\mathbb{C}$ *tiene una estructura natural como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y como* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial. Encontrar las bases de* $\mathbb{C}$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial y como* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial. ¿Contradice lo anterior el hecho de que todas las bases de un espacio vectorial tengan el mismo número de elementos? Justificar la respuesta.*

5. *Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales*

   a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z = x\}$;
   b) $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 4\}$;
   c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = \sqrt{2}x\}$;
   d) $E_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

2.2.2. Dependencia e independencia lineal

1. *Considerar los vectores* $(1, 1, 0, a)$, $(3, -1, b, -1)$ *y* $(-3, 5, a, -4)$ *del espacio vectorial* $\mathbb{R}^4$. *Determinar* a *y* b *de forma que estos vectores sean linealmente dependientes.*

2. *Encontrar* $a \in \mathbb{C}$ *de manera que el vector* $(1, 5, a)$ *pertenezca al subespacio de* $\mathbb{C}^3$ *generado por* $(3, i, -1)$, $(i - 1, 2, 0)$ *y* $(0, 7, -i)$.

3. *Si* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *son vectores linealmente independientes de un cierto espacio vectorial, probar que* $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$ *y* $\vec{u} + \vec{w}$ *son también linealmente independientes.*

4. *Expresar* $(1, 1, 1)$ *como combinación lineal de* $(1, -1, 1)$, $(0, 0, 1)$ *y* $(1, 1, 0)$. *¿Se puede expresar de dos formas distintas? Dar un ejemplo de un vector de* $\mathbb{R}^3$ *que se pueda expresar de dos formas distintas como combinación lineal de un conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^3$. *¿Qué podemos decir de este conjunto de vectores?*

2.2.3. Bases, dimensión y coordenadas

1. *Calcular el rango del conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^4$

   $$\{(1, -1, 0, 2),\ (2, 3, -1, 4),\ (-2, 1, 0, 3),\ (2, -6, 1, -3)\}$$

   y dar una base del subespacio que generan.

2. *Considerar los conjuntos de vectores siguientes*

   $$\begin{aligned} A &= \{(1, 2, 3),\ (1, 0, -1),\ (2, -3, 5)\} \subset \mathbb{R}^3, \\ B &= \{(0, 2, -1),\ (4, 3, -2),\ (4, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3, \\ C &= \{(1, 2, 1, 3),\ (2, 1, 4, 3),\ (1, 3, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^4, \\ D &= \{(1, 2, -1, 1),\ (3, -1, 2, 1),\ (2, -3, -3, 0),\ (4, 1, -5, 2)\} \subset \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

   a) *Determinar si son o no linealmente dependientes y dar, en caso de que lo sean, la relación de dependencia.*

   b) *Determinar la dimensión y dar una base del subespacio generado por cada uno de los conjuntos.*

3. *Considerar los siguientes vectores* $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (1,1,0)$, $\vec{w} = (1,-1,0)$, $\vec{z} = (0,0,2)$. *¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?*

   a) $< \vec{v}, \vec{w} > = < \vec{u}, \vec{z} >$.

   b) *Las coordenadas de* $\vec{u}$ *en la base* $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ *son* $(1, 0, \frac{1}{12})$.

   c) *Los vectors* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ *son un sistema generador de* $\mathbb{R}^3$.

   d) *Las coordenadas de* $\vec{u}$ *en la base* $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ *son* $(1, 0, 2)$.

4. *Sean* $F_1 =< (2,0,3), (0,1,2) >$ *y* $F_2 =< (1,0,1) >$.

   a) *Calcular* $\dim F_1$, $\dim F_2$ y una base de los subespacios $F_1 \cap F_2$ *y* $F_1 + F_2$.

   b) *Comprobar la igualdad* $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, \;\; y = 0\}$.

   c) *Encontrar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio* F_1.

5. *Considerar los subespacios vectoriales* $F_1 =< (1,0,1,-1), (2,1,0,3) >$ *y* $F_2 =< (1,0,0,0), (1,0,-1,2), (3,0,2,1) >$.

   a) *Calcular* $\dim F_1$, $\dim F_2$ y una base de los subespacios $F_1 \cap F_2$ *y* $F_1 + F_2$.

   b) *Dar una base de* F_1 *y* F_2.

   c) *Comprobar si se verifica que* $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$.

6. *Considerar los subespacios de* $\mathbb{R}^3$ *dados por* $U =< (1,1,3), \; (-1,2,3) >$ *y* $V =< (2,1,2), \; (2,-1,-2) >$. *Comprobar que la suma* $U + V$ *no es directa y encontrar una base de* $U \cap V$.

7. *Sean* F *y* G *los subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^4$ *definidos por*

   $$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, \; 3y + 2z + t = 0, \; 2x - y - t = 0\},$$
   $$G = \{(0,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}.$$

   Calcular las dimensiones de F *y* G*, así como, unas bases de estos subespacios. Demostrar que* $\mathbb{R}^4$ *es suma directa de* F *y* G.

8. *Sea* $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que dos en una variable* x *con coeficientes reales, donde tenemos definida la suma y la multiplicación por un escalar de la manera habitual.*

   a) *Demostrar que* $\mathbb{R}_2[x]$*, con estas operaciones, es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

   b) *Comprobar que los polinomios* $x^2 + 1, x + 1, x - 1$ *forman una base de* $\mathbb{R}_2[x]$ *y expresar las componentes del polinomio* $3x^2 + 6x - 5$ *en dicha base.*

   c) *¿Existe una base más simple?*

9. *Sea* $\mathbb{R}_3[x] = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *el* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial dado por los polinomios de grado menor o igual que tres en una variable* x *con coeficientes reales. Consideremos los siguientes subespacios vectoriales* $F_1 =< 1 + 3x + x^2, 2x - 1 >$ *y* $F_2 =< x^3 + x^2, 5x + 3x^2 + 2x^3 >$.

    a) *Calcular* $\dim F_1$, $\dim F_2$, $F_1 \cap F_2$ *y* $F_1 + F_2$.

    b) *Ampliar una base de* F_1 *a una base de* $\mathbb{R}_3[x]$.

10. *Dar un ejemplo de dos subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^5$ *tales que* $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^5$ *y* $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$. *¿Se cumple en este caso que* $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^5$*?*

11. *Calcular la dimensión del subespacio de* $\mathbb{R}^4$ *dado por* $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 3z, y = 4t\}$. *Construir una base de dicho subespacio vectorial* E *que contenga el vector* $(0, -3, 1, \frac{1}{2})$.

12. *Sea* $E = M_2(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de las matrices* 2×2 *con coeficientes reales.*

    a) *Demostrar que* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *son una base de* E.

    b) *Demostrar que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \mid x + 2y - t + 2z = 0 \right\}$, y que $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \mid y = -z,\ x = t \right\}$ *son subespacios vectoriales.*

    c) *Encontrar unas bases de* F, G, $F + G$ y $F \cap G$.

2.2.4. Matriz de cambio de base

1. *Demostrar que los vectores* $(1, 0, -1), (1, 1, 0)$ *y* $(1, 1, 1)$ *son base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontrar la matriz de cambio de base de la canónica a la base anterior. Utilizarla para calcular las componentes de los vectores* $(1, -2, 3)$ *y* $(0, 4, 2)$ *en la nueva base.*

2. *Demostrar que los vectores* $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ *y* $(1, 1, 1)$ *son base de* $\mathbb{R}^3$. *Encontrar la matriz de cambio de base de la canónica a la base anterior y la matriz de cambio de base de la anterior a la base canónica. Utilizarlas para calcular las componentes del vector* $(-1, -2, 7)$ *en la nueva base y las componentes del vector* $(0, 0, 1)$ *en la base canónica.*

3. *Supongamos fijada una base de* $\mathbb{R}^2$ $\{e_1, e_2\}$ *y consideremos las siguientes bases* $\{u_1, u_2\}$ *y* $\{v_1, v_2\}$ *donde* $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = -e_1 + 3e_2$ *y* $v_1 = 3e_1 + 4e_2$, $v_2 = -2e_1 - 3e_2$. *Determinar los vectores de* $\mathbb{R}^2$ *tales que:*

    a) *Las coordenadas en la base inicial coinciden con las coordenadas en la base* $\{u_1, u_2\}$.

    b) *Las coordenadas en la base inicial coinciden con las coordenades en la base* $\{v_1, v_2\}$.

c) *Las coordenadas en la base* $\{v_1, v_2\}$ *coinciden con las coordenadas en la base* $\{u_1, u_2\}$.

2.2.5. Operaciones con subespacios

1. *Sean* S *y* T *dos subespacios vectoriales de un espacio, vectorial* E *de dimensión finita. Demostrar que* $S \cap T = S + T$ *si y solo si* $S = T$.

2. *En* $\mathbb{R}^2$ *se considera el subespacio* $E =< (3,1) >$. *Encontrar dos subespacios suplementarios distintos, es decir,* $F_1 \neq F_2$ *tales que* $E \oplus F_1 = \mathbb{R}^2$ *y* $E \oplus F_2 = \mathbb{R}^2$. *Hacer lo mismo para* $E =< (1,-1,2),\ (-1,3,2) >$, *subespacio de* $\mathbb{R}^3$.

3. *Demostrar que el conjunto* $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 0,\ y = t\}$ *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$. *Encontrar su dimensión y una base. Sea* $T =< (3,1,1,0), (1,1,0,0), (1,-3,2,0) >$. *Obtener la dimensión y una base de los subespacios* $S \cap T$ *y* $S + T$. *Demostrar que* $S \cup T$ *no es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$.

4. Sean F y G los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$:

   $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$ y $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\}$.

   a) Consideremos los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $H_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A(F) \subset F,\ A(G) \subset G\}$ y $H_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A(F) \subset G,\ A(G) \subset F\}$. Probar que H_1 y H_2 son subespacios vectoriales. Dar las dimensiones y una base de los subespacios vectoriales H_1 y H_2.

   b) Probar que se verifica la igualdad $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_2$. Comprobar si se cumple la fórmula de Grassman.

2.3. Problemas resueltos

1. *Decir, justificando la respuesta, si el subconjunto* $S \subset \mathbb{R}^4$ *definido de la forma*

   $$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + 3z = 5\}\ ,$$

   es subespacio vectorial.

   Solución. Notemos que el elemento neutro de $(\mathbb{R}^4, +)$, es decir el vector $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$ no pertenece al conjunto S. Por lo tanto S no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

2. *Estudiar la dependencia o independencia lineal de los siguientes vectores* $\{(1,-2,0,3), (2,-1,0,1), (0,2,1,-1), (5,-2,1,4)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

Solución. Realizando una combinación lineal de los cuatro vectores e igualandola al vector nulo de $\mathbb{R}^4$ se tiene

$$\lambda_1(1,-2,0,3)+\lambda_2(2,-1,0,1)+\lambda_3(0,2,1,-1)+\lambda_4(5,-2,1,4) = (0,0,0,0)\,.$$

La anterior combinación lineal da lugar al siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_4 \\ 0 &= -2\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 \\ 0 &= \lambda_3 + \lambda_4 \\ 0 &= 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 \end{aligned}$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0\,,$$

por ser el anterior sistema homogéneo concluimos que es compatible indeterminado y por lo tanto además de la solución trivial $\lambda_i = 0,\ i = 1,2,3,4$ admite infinitas soluciones. Concluimos pues que el conjunto de vectores del enunciado es linealmente dependiente.

3. *Considerar los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:*

$$F =< (1,0,2,1),(\alpha,\alpha,1,1) > \ \ y\ G =< (0,1,2,2),(1,2,-1,1) > .$$

Determinar los valores de α tales que verifican que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$. Calcular $dimF$, $dimG$, $F \cap G$, $F + G$ para esos valores de α. Encontrar las ecuaciones que deben verificar los vectores que pertenecen al subespacio F.

Solución. Primero, observemos que si $F =< (1,0,2,1),(\alpha,\alpha,1,1) >$ entonces automáticamente $\dim F = 2$ puesto que los dos vectores que forman el sistema generador de F nunca son proporcionales y por lo tanto son linealmente independientes $\forall\alpha$ formando una base. Como $G =< (0,1,2,2),(1,2,-1,1) >$, repitiendo el mismo argumento se tiene que $\dim G = 2$.

Por la definición del subespacio suma se sabe que

$$F + G =< (1,0,2,1),(\alpha,\alpha,1,1),(0,1,2,2),(1,2,-1,1) > ,$$

de manera que, para obtener una base y de esta forma conocer $\dim F+G$, podemos simplificar el sistema generador mediante las siguientes transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1+3\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3-5\alpha \end{pmatrix} .$$

Se tiene pues que el subespacio suma $F+G$ está engendrado por los siguientes vectores

$$F+G =< (1,2,-1,1),(0,1,2,2),(0,0,7,4),(0,0,0,3-5\alpha) > \ .$$

Si $\alpha \neq 3/5$, el anterior sistema generador está formado por cuatro vectores no nulos con las componentes escalonadas. En consecuencia dicho conjunto es linealmente independiente y por lo tanto forma una base de $F+G$. En concreto se tiene que $\dim F+G = 4$. Como $F+G$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ cuya dimensión coincide con la dimensión del propio espacio vectorial se tiene que $F+G=\mathbb{R}^4$.

Aplicando el Teorema de las dimensiones de Grassman se tiene $\dim F\cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G = 2+2-4 = 0$ de lo que se deduce que $F\cap G = \{(0,0,0,0)\}$. Como consecuencia se tiene que $F\oplus G = \mathbb{R}^4$.

Nota 1: el cálculo que se realiza en este apartado no se pide en el enunciado y sólo se coloca por completitud del ejercicio. Si $\alpha = 3/5$ entonces una base del subespacio $F+G$ es

$$\{(1,2,-1,1),(0,1,2,2),(0,0,7,4)\} \ ,$$

y por lo tanto $\dim F+G = 3$.

En este caso $\dim F\cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G = 2+2-3 = 1$. Vamos a hallar una base de $F\cap G$. Para cualquier vector $v \in F\cap G$ se tiene que $v\in F$ y $v\in G$ por lo tanto existen escalares reales λ_i con $i=1,2,3,4$ tales que

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1(1,0,2,1)+\lambda_2(\alpha,\alpha,1,1) = (\lambda_1+\alpha\lambda_2, \alpha\lambda_2, 2\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1+\lambda_2) \ , \\ v &= \lambda_3(0,1,2,2)+\lambda_4(1,2,-1,1) = (\lambda_4, \lambda_3+2\lambda_4, 2\lambda_3-\lambda_4, 2\lambda_3+\lambda_4) \ . \end{aligned}$$

Igualando las componentes del vector v se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1+\alpha\lambda_2 &= \lambda_4 \ , \\ \alpha\lambda_2 &= \lambda_3+2\lambda_4 \ , \\ 2\lambda_1+\lambda_2 &= 2\lambda_3-\lambda_4 \ , \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 2\lambda_3+\lambda_4 \ . \end{aligned}$$

La información que se ha de obtener de este sistema es una relación entre λ_1 y λ_2 o bien entre λ_3 y λ_4. Una forma de proceder puede ser la siguiente:

se elimina λ_4 de la primera ecuación, de forma que se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_3 + 2\lambda_1 + \alpha\lambda_2 \ , \\ \lambda_1 &= 2\lambda_3 - (\alpha+1)\lambda_2 \ , \\ 0 &= 2\lambda_3 + (\alpha+1)\lambda_2 \ . \end{aligned}$$

Finalmente, eliminando λ_3 de las dos últimas ecuaciones, se tiene la relación deseada $\lambda_1 = -(\alpha+2)\lambda_2$. Entonces

$$v = -(\alpha+2)\lambda_2(1,0,2,1) + \lambda_2(\alpha,\alpha,1,1) = \lambda_2(-2,\alpha,-2\alpha-3,-\alpha-1) \ ,$$

de lo que se concluye que $F \cap G =< (-2,\alpha,-2\alpha-3,-\alpha-1) >$.

Nota 2. Otra forma de proceder en este ejercicio es la siguiente. Los valores de α para los cuales $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ serán en particular los que verifiquen $\dim F + G = 4$, de manera que el conjunto formado por la unión de los vectores que forman base de F y de G ha de ser linealmente independiente y por lo tanto el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Calculando el anterior determinante es fácil ver que se anula si y sólo si $\alpha = 3/5$. Luego se procede como se ha hecho anteriormente.

Para hallar las ecuaciones que deben verificar los vectores $(x,y,z,t) \in F$ en primer lugar los escribimos como combinación lineal de la base de F, es decir $(x,y,z,t) = \lambda_1(1,0,2,1) + \lambda_2(\alpha,\alpha,1,1)$. De aquí se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 + \alpha\lambda_2 \ , \\ y &= \alpha\lambda_2 \ , \\ z &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \ , \\ t &= \lambda_1 + \lambda_2 \ . \end{aligned}$$

De este sistema lineal se han de eliminar λ_1 y λ_2 de manera que se obtengan dos relaciones independientes entre las variables x, y, z y t. Si despejamos λ_2 de la última ecuación y substituimos en las restantes ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \alpha t + \lambda_1(1-\alpha) \ , \\ y &= (t-\lambda_1)\alpha \ , \\ z &= t + \lambda_1 \ . \end{aligned}$$

Despejando λ_2 de la última ecuación y substituyendo en las otras ecuaciones se tiene

$$x = \alpha t + (1-\alpha)(z-t) \ , \quad y = \alpha(2t-z) \ .$$

Finalmente se tiene que

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = \alpha t + (1 - \alpha)(z - t), y = \alpha(2t - z)\} \ .$$

4. *Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$: $F =< (3,1,3,2), (5,3,2,3) >$ y $G =< (1,3,-5,0), (7,5,1,4) >$, comprobar que $F = G$. ¿Existen dos subespacios vectoriales F_1 y F_2 de $\mathbb{R}^4$ tales que la $dimF_1 = 3$, la $dimF_2 = 2$ y $F_1 \cap F_2 = \{0\}$?*

Solución. Notemos que F y G son subespacios vectoriales del mismo espacio vectorial tales que tienen igual dimensión $\dim F = \dim G = 2$. Entonces si se demuestra, por ejemplo, que $F \subset G$ en realidad se ha demostrado que $F = G$. Una forma de demostrar que $F \subset G$ es demostrar que los vectores de la base de F $\{(3,1,3,2), (5,3,2,3)\}$ pertenecen al subespacio G. En este caso existirán unos únicos escalares $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1,2,3,4$, tales que

$$\begin{aligned} (3,1,3,2) &= \alpha_1(1,3,-5,0) + \alpha_2(7,5,1,4) \ , \\ (5,3,2,3) &= \alpha_3(1,3,-5,0) + \alpha_4(7,5,1,4) \ . \end{aligned}$$

El problema finalizará cuando demostremos que los dos sistemas lineales a los que dan lugar las anteriores ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3 & = & \alpha_1 + 7\alpha_2 \\ 1 & = & 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ 3 & = & -5\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2 & = & 4\alpha_2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} 5 & = & \alpha_3 + 7\alpha_4 \\ 3 & = & 3\alpha_3 + 5\alpha_4 \\ 2 & = & -5\alpha_3 + \alpha_4 \\ 3 & = & 4\alpha_4 \end{array} \right.$$

son compatibles y determinados. Como la matriz de coeficientes de ambos sistemas es la misma y viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \\ -5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} ,$$

es fácil ver que su rango es 2. Además, también es fácil comprobar que el rango de las matrices ampliadas de cada sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

también tienen rango 2. Entonces, aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius, se concluye que los dos sistemas lineales son compatibles y determinados de manera que $F = G$.

Otra forma de proceder es la siguiente. Puesto que $\dim F = \dim G = 2$, si se demuestra que $\dim F + G = 2$ entonces se tiene $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G = 2$ y por lo tanto $F = G$. Para ver que $\dim F + G = 2$ basta con demostrar que la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} ,$$

tiene rango 2.

Por lo que respecta a la segunda pregunta, la respuesta es no. Esto es debido a que $F_1 + F_2$ también sería un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ y por lo tanto $\dim F_1 + F_2 \leq 4$. Sin embargo, si asumimos ciertas las hipótesis del enunciado y aplicamos el Teorema de las dimensiones de Grassman se llega a la siguiente contradicción

$$\dim F_1 + F_2 = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2 = 3 + 2 - 0 = 5 > 4 .$$

5. *Considerar los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$: $F =< (1,0,1) >$ y $G =< (1,1,0),(1,0,-1) >$.*

   (a) *Averiguar si F y G son complementarios.*

   (b) *Encontrar las ecuaciones implícitas del subespacio G.*

Solución. **(a)** Obviamente $\dim F = 1$. Además, como los dos vectores que generan el subespacio G no son proporcionales entonces son linealmente independientes y forman base de G. Se tiene pues que $\dim G = 2$.

Los subespacios vectoriales F y G serán complementarios si y sólo si verifican $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. Esta relación será cierta si se cumple $F + G = \mathbb{R}^3$ y además $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Se tiene que $F + G =< (1,0,1),(1,1,0),(1,0,-1) >$ por definición de subespacio suma. Además los tres vectores que generan $F + G$ son linealmente independientes puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 ,$$

de manera que dichos vectores son una base de $F + G$. Se concluye que $\dim(F + G) = 3$ y por lo tanto $F + G = \mathbb{R}^3$.

Finalmente, aplicando la fórmula de Grassman

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 1 + 2 - 3 = 0 ,$$

por lo tanto $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

(b) Consideremos un vector cualquiera $v = (x,y,z) \in G$. Entonces dicho vector se podrá escribir de forma única como una combinación lineal de los vectores de la base de G, es decir $(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,-1)$. Desarrollando esta igualdad se obtiene el sistema lineal de ecuaciones

$$x = \alpha + \beta \ , \quad y = \alpha \ , \quad z = -\beta \ .$$

Eliminando α y β del anterior sistema se obtiene $x = y - z$ que es la relación que han de verificar las componentes de los vectores del subespacio G. En definitiva

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y - z\} \ .$$

Otra forma análoga de obtener la ecuación que define al subespacio G es la siguiente. Como los vectores $(x,y,z), (1,1,0), (1,0,-1)$ pertenecen a G y además dim$G = 2$ entonces seguro que dichos vectores son linealmente dependientes y por lo tanto el determinante formado con sus componentes ha de ser nulo. En concreto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & z \end{vmatrix} = -x + y - z = 0 \ ,$$

de manera que $x = y - z$.

6. *Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable de grado menor o igual que 2. Definimos el siguiente subconjunto $\mathcal{B} = \{1 + x - x^2, 1 - x^2, 1 + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$.*

   (a) *Demostrar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.*

   (b) *Obtener las componentes del polinomio $1 + 2x + 3x^2$ en la base $\mathcal{B}$.*

   (c) *Encontrar la matriz de cambio de base entre la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base $\mathcal{B}$.*

Solución. **(a)** Sea $\mathcal{BC} = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$. Entonces el subconjunto $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$, siendo

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + x - x^2 = (1,1,-1)_{\mathcal{BC}} \ , \\ p_2 &= 1 - x^2 = (1,0,-1)_{\mathcal{BC}} \ , \\ p_3 &= 1 + x^2 = (1,0,1)_{\mathcal{BC}} \ . \end{aligned}$$

Como el determinante formado con las componentes de estos vectore es no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ ,$$

se concluye que el subconjunto $\mathcal{B}$ está formado por vectores linealmente independientes. Finalmente, como $\dim\mathbb{R}_2[x] = 3$, seguro que $\mathcal{B}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}_2[x]$ y por lo tanto forma una base.

Otra forma alternativa de demostrar que los polinomios de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes es la siguiente. Realizando una combinación lineal de dichos polinomios e igualándola a cero se obtiene $\alpha(1 + x + x^2) + \beta(1 - x^2) + \gamma(1 + x^2) = 0$. Reagrupando según potencias de x se tiene $[\alpha + \beta + \gamma] + \alpha x + [\alpha - \beta + \gamma]x^2 = 0$ de lo que se deduce que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \ , \quad \alpha = 0 \ , \quad \alpha - \beta + \gamma = 0 \ .$$

Como este sistema lineal es homogéneo y además el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es no nulo entonces la única solución del sistema es la trivial, es decir $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Como todos los coeficientes de la combinación lineal realizada son nulos se concluye que los anteriores polinomios son linealmente independientes.

(b-c) Colocando las componentes de p_1, p_2 y p_3 en columnas se obtiene la matriz de cambio de base entre la base $\mathcal{B}$ y la base canónica $\mathcal{BC}$

$$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

La inversa de dicha matriz será la matriz de cambio de base entre la base canónica $\mathcal{BC}$ y la base $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{BC}\to\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Utilizando la matriz $M_{\mathcal{BC}\to\mathcal{B}}$ podemos calcular las componentes del polinomio $p = 1 + 2x + 3x^2 = (1, 2, 3)_{\mathcal{BC}}$ en la base $\mathcal{B}$ de la forma siguiente.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

por lo tanto $p = 1 + 2x + 3x^2 = (2, -3, 2)_{\mathcal{B}}$.

Otra forma de obtener las componentes de p en la base $\mathcal{B}$ es la siguiente. Sea $p = (\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$. Entonces se tiene que $p = 1 + 2x + 3x^2 = \alpha[1 + x - x^2] + \beta[1 - x^2] + \gamma[1 + x^2]$. Igualando los coeficientes de la misma potencia de x en la anterior identidad se obtiene el sistema lineal

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \ , \quad \alpha = 2 \ , \quad -\alpha - \beta + \gamma = 3 \ ,$$

cuya solución es $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 2)$.

7. *Considerar los siguientes subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$F = \{(a, 2a, a+b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\} \quad y \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y = 0\}.$$

(a) *Hallar una base de* $F \cup G$ *y* $F + G$*.*

(b) *Determinar un espacio complementario de* F*.*

Solución. **(a)** Notemos que los vectores $v \in F$ son de la forma

$$v = (a, 2a, a+b) = a(1, 2, 1) + b(0, 0, 1) \ ,$$

de manera que un sistema generador de F es $F =< (1, 2, 1), (0, 0, 1) >$, siendo $\dim F = 2$ puesto que los vectores que lo generan son linealmente independientes. Por otra parte, es obvio que $G =< (0, 0, 1) >$ y $\dim G = 1$. Como el subespacio suma $F + G$ está generado por la unión de las bases de F y de G se tiene que

$$F + G =< (1, 2, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 1) >=< (1, 2, 1), (0, 0, 1) >= F \ .$$

Por otra parte, como $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 2+1-2 = 1$, entonces $F \cap G = G$.

(b) Sea W un subespacio suplementario de F. Entonces se ha de verificar la siguiente suma directa $F \oplus W = \mathbb{R}^3$, es decir, $F + W = \mathbb{R}^3$ y $F \cap W = \emptyset$. Con estas condiciones se tiene que $\dim W = \dim F \oplus W - \dim F = 3 - 2 = 1$ y por lo tanto una base de W vendrá dada por un vector $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $w \notin F$. Dicho de otra forma, el conjunto $\{(1, 2, 1), (0, 0, 1), (a, b, c)\}$ ha de ser linealmente independiente. Un ejemplo puede ser $(a, b, c) = (1, 0, 0)$. En definitiva $W =< (1, 0, 0) >$.

8. *Determinar si* W *es o no subespacio de* $\mathbb{R}^3$*, donde* W *consiste en aquellos vectores* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *para los que i)* $a = 2b+1$*, ii)* $a < b$*, iii)* $a(b+c) = 0$*.*

Solución. Para que $W \subset \mathbb{R}^3$ sea subespacio vectorial se debe verificar que $\alpha x + \beta y \in W$ para todo $x, y \in W$ y para cualquier escalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ninguno de los subconjuntos W dados en el enunciado son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Veámos para cada uno de los casos:

i) Sea $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a = 2b+1\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(2b+1, b, c) + \beta(2b'+1, b', c') \\ &= (2[\alpha b + \beta b'] + \alpha + \beta, \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c') \notin W. \end{aligned}$$

Notemos que la anterior combinación lineal pertenece a W sólo en el caso en que $\alpha+\beta=1$ pero no para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, de manera que W no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

ii) Sea $W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ :\ a<b\}$. Sean $x=(a,b,c)$, $y=(a',b',c')$ dos vectores cualesquiera de W, es decir, verificando $a<b$ y $a'<b'$. Realizando la combinación lineal

$$\alpha x+\beta y=\alpha(a,b,c)+\beta(a',b',c')=(\alpha a+\beta a',\alpha b+\beta b',\alpha c+\beta c')\notin W\ .$$

Observar que, aunque $a<b$ y $a'<b'$, en general no se cumple que $\alpha a+\beta a'<\alpha b+\beta b'$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Por ejemplo $a=1<b=2$ y $a'=3<b'=4$ pero tomando $\alpha=1$, $\beta=-2$ se tiene $\alpha a+\beta a'=-5>\alpha b+\beta b'=-6$. En resumen, concluimos que W no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Nota: Una forma muy sencilla de ver en los casos **i)** y **ii)** que W no es subespacio vectorial es comprobar que el vector nulo $(0,0,0)\notin W$.

iii) Sea $W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\ :\ a(b+c)=0\}$. Sean $x=(a,b,c)$, $y=(a',b',c')$ una pareja arbitraria de vectores pertenecientes a W. Entonces se verifica $a(b+c)=a'(b'+c')=0$. Realizando la combinación lineal

$$\alpha x+\beta y=\alpha(a,b,c)+\beta(a',b',c')=(\alpha a+\beta a',\alpha b+\beta b',\alpha c+\beta c')\notin W\ .$$

La razón es la siguiente: para que $\alpha x+\beta y\in W$ se tendría que anular para cualquier $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ la expresión $(\alpha a+\beta a')[(\alpha b+\beta b')+(\alpha c+\beta c')]$. Sin embargo, reagrupando esta epresión se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha^2[a(b+c)]+\beta^2[a'(b'+c')]+\alpha\beta[a(b'+c')+a'(b+c)]\\=\alpha\beta[a(b'+c')+a'(b+c)]\neq 0\end{aligned}$$

en general. Para ver la desigualdad, basta con tomar $\alpha\beta\neq 0$, $a=b'+c'=0$ y $a'(b+c)\neq 0$. Se tiene en efecto que W no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

9. *Sean $A_i\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $i=1,2,3$ las matrices siguientes*

$$A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}-2&2\\a&-a\end{pmatrix}.$$

(a) *Hallar los valores del parámetro real a de manera que las matrices anteriores sean linealmente independientes.*

(b) *Para el caso particular $a=2$, considerar los subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definidos de la forma $F=<A_1,A_2>$ y $G=<A_3,I_2>$, siendo I_2 la matriz identidad. Encontrar una base de $F\cap G$ y $F+G$.*

Solución. **(a)** Para ver si las matrices A_i, con $i = 1, 2, 3$ son linealmente independientes, realizamos una combinación lineal arbitraria de dichas matrices y la igualamos a la matriz cuadrada nula de segundo orden, es decir $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_i = O$. Finalmente, impondremos que la solución de esta ecuación implique que todos los escalares α_i, con $i = 1, 2, 3$ sean nulos de manera que las matrices serán linealmente independientes. Los cálculos a efectuar son los siguientes.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \lambda_i A_i &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 - a\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De la anterior igualdad de matrices se deduce el siguiente sistema lineal y homogéneo de ecuaciones para las incógnitas λ_i

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - a\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

que, escrito en notación matricial, adopta la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de ecuaciones, por ser homogéneo, admite siempre la solución trivial $\lambda_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Pero para que únicamente admita dicha solución es necesario que sea compatible y determinado. Por el teorema de Rouche-Frobenius esta condición se puede expresar como que el rango de la matriz del sistema coincida con el número de incógnitas y por lo tanto valga 3. El problema pues se ha reducido a hallar los valores del parámetro a que hagan que el rango de la matriz del sistema anterior sea 3. Realizando transformaciones elementales por filas, que dejan invariante el rango, en la matriz del sistema se tiene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

de manera que su rango es 2 si $a \neq 2$ y vale 3 si $a = 2$. En definitiva, las matrices A_i, con $i = 1, 2, 3$ son linalmente independientes si y sólo si $a \neq 2$.

(b) Obviamente dim$F$ = dim$G = 2$. Por otra parte, se sabe que el subespacio vectorial $F+G =< A_1, A_2, A_3, I >$. Pero para el valor del parámetro $a = 2$, por el apartado anterior, es conocido que A_i, con $i = 1, 2, 3$ son linalmente dependientes. Entonces $F + G =< A_1, A_2, I >$. Para calcular una base de $F + G$ hemos de estudiar la dependencia o independencia lineal de las matrices A_1, A_2 y I. Para averiguarlo realizamos el cálculo siguiente.

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 I &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando elemento a elemento las dos últimas matrices se tiene el siguiente sistema lineal y homogéneo de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz del sistema es 2 y por lo tanto menor que el número de incógnitas 3. Entonces, por el teorema de Rouche-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones diferentes de la solución trivial. En conclusión las matrices A_1, A_2 y I son linealmente dependientes y podemos decir que $F + G =< A_1, A_2 >= F$. Además, como $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 2 + 2 - 2 = 2$, podemos concluir que $F \cap G = F = G$.

10. *Justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:*

    (a) *Existen subespacios vectoriales S y T de $\mathbb{R}^4$ tales que* dim$S$=*2*, dim$T$=*3 y* $S \cap T = 0$.

    (b) *El subconjunto $S_2 \subset \mathbb{R}_2[x]$ dado por $S_2 = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mid a = 0, b \neq 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.*

Solución. **(a)** Puesto que $S + T$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ se tendrá que $\dim(S + T) \leq \dim\mathbb{R}^4 = 4$, lo cual está en clara contradicción con que $\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2 + 3 - 0 = 5$. Concluimos que no pueden existir tales subespacios.

(b) S_2 no puede ser un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$ puesto que el elemento neutro polinomio nulo no pertenece a S_2.

11. *Sean F_1 y F_2 los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:*

$$F_1 = \{(a, 2a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \ , \quad F_2 = \{(c, d, 2d) \mid c, d \in \mathbb{R}\} \ .$$

(a) *Demostrar que F_1 y F_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.*

(b) *Calcular las dimensiones y bases de los subespacios vectoriales $F_1 \cap F_2$ y $F_1 + F_2$.*

Solución. (a) Para que $F_i \subset \mathbb{R}^3$, con $i = 1, 2$, sean subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ se debe verificar que $\alpha x + \beta y \in F_i$ para todo $x, y \in F_i$ y para cualquier escalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Veámoslo para cada uno de los casos:

- Sean $x = (a, 2a, b)$ e $y = (a', 2a', b')$ dos vectores cualesquiera de F_1. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(a, 2a, b) + \beta(a', 2a', b') \\ &= (\alpha a + \beta a', 2[\alpha a + \beta a'], \alpha b + \beta b') \in F_1 \ , \end{aligned}$$

  puesto que su segunda componente es el doble que la primera.

- Sean $x = (c, d, 2d)$ e $y = (c', d', 2d')$ dos vectores cualesquiera de F_2. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(c, d, 2d) + \beta(c', d', 2d') \\ &= (\alpha c + \beta c', \alpha d + \beta d', 2[\alpha d + \beta d']) \in F_2 \ , \end{aligned}$$

  puesto que su tercera componente es el doble que la segunda.

(b) En primer lugar calcularemos una base para los subespacios vectoriales F_1 y F_2.

- Sea $x \in F_1$. Entonces $x = (a, 2a, b) = a(1, 2, 0) + b(0, 0, 1)$ de manera que $F_1 =< (1, 2, 0), (0, 0, 1) >$. Además, como los vectores que generan F_1 son linealmente independientes por no ser proporcionales forman en realidad una base de F_1. Se tiene pues que $\dim F_1 = 2$.
- Sea $x \in F_2$, es decir, $x = (c, d, 2d) = c(1, 0, 0) + d(0, 1, 2)$. Entonces $F_2 =< (1, 0, 0), (0, 1, 2) >$. Además, los vectores que generan F_2 son linealmente independientes y por lo tanto forman una base de F_2. Concluimos que $\dim F_2 = 2$.

Puesto que el subespacio vectorial suma $F_1 + F_2$ está engendrado por la unión de una base de F_1 y una de F_2, se tiene que

$$F_1 + F_2 =< (1, 2, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 2) > \ .$$

Veamos cuantos vectores generadores de $F_1 + F_2$ son linealmente independientes. Una forma de verlo es colocándolos en las filas de una matriz y realizando transformaciones elementales for filas con el objetivo de escalonarla. De esta forma se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

y por lo tanto $\dim(F_1 + F_2) = 3$. Como $F_1 + F_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y coinciden en su dimensión se concluye que en realidad son el mismo, es decir $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$.

Calculemos a continuación una base del subespacio vectorial $F_1 \cap F_2$. Sea $x \in F_1 \cap F_2$, es decir, $x = (a, 2a, b) \in F_1$ y además $x = (c, d, 2d) \in F_2$. Igualando las componentes del vector x se tiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$a = c \ , \quad 2a = d \ , \quad b = 2d \ ,$$

de donde se deduce, entre las dos primeras ecuaciones, que $d = 2c$. De esta forma $x = (c, 2c, 4c) = c(1, 2, 4)$ y por lo tanto

$$F_1 \cap F_2 =< (1, 2, 4) > ,$$

siendo $\dim(F_1 \cap F_2) = 1$. Notemos que, a modo de comprobación final, se verifica $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 + F_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

12. *El vector* $v \in \mathbb{R}^3$ *tiene componentes* $(1, 2, 3)$ *en la base* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. *Encontrar las coordenadas de* v *en la base* $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *sabiendo que* $u_1 = 3v_1 + 2v_2 - v_3$, $u_2 = 4v_1 + v_2 + v_3$, $u_3 = 2v_1 - v_2 + v_3$.

Solución. Una forma directa de tratar el problema consiste en hallar los valores a, b, c tales que $v_1 + 2v_2 + 3v_3 = au_1 + bu_2 + cu_3$, es decir,

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 = a(3v_1 + 2v_2 - v_3) + b(4v_1 + v_2 + v_3) + c(2v_1 - v_2 + v_3).$$

De la igualdad anterior se obtiene el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3a & + & 4b & + & 2c & = & 1 \\ 2a & + & b & - & c & = & 2 \\ -a & + & b & + & c & = & 3 \ . \end{array} \right.$$

Este sistema es compatible determinado ya que el determinante de la matriz del sistema es no nulo puesto que

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \ .$$

Además, su solución es $a = -5/2$, $b = 15/4$, $c = -13/4$, de manera que las componentes de v en la base B' son $v = (-5/2, 15/4, -13/4)$.

Otra forma de abordar el problema es mediante las ecuaciones del cambio de base. La matriz del cambio de base de la base B' a la base B, según los datos del problema, es

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

de manera que las componentes del vector v en la base B' son

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 15/4 \\ -14/4 \end{pmatrix} .$$

13. *Sea F el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ engendrado por los vectores $u_1 = (2,1,0)$, $u_2 = (-1,0,1)$, $u_3 = (4,1,-2)$. Escribir la forma general de un vector de F. Sea $G = \{(0, a+b, -b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Probar que G es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y encontrar una base de G. Estudiar si la suma $F + G$ es directa. Estudiar $F \cap G$ y determinar una base del mismo.*

Solución. En primer lugar se observa que el conjunto de vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ es linealmente dependiente puesto que

$$\det\{u_1, u_2, u_3\} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Se puede ver fácilmente que $u_3 = u_1 - 2u_2$. Consecuentemente $F =< u_1, u_2 >$. Dado que $\{u_1, u_2\}$ es un sistema linealmente independiente ya que los vectores u_1 y u_2 no son proporcionales, se tiene que $\{u_1, u_2\}$ es una base de F. Por tanto los vectores de F serán combinación lineal de u_1 y u_2, es decir,

$$v \in F \Longleftrightarrow v = au_1 + bu_2 = (2a - b, a, b) \ , \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Entonces $F = \{(2a - b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Para que $G \subset \mathbb{R}^3$ sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ se debe verificar que $\alpha x + \beta y \in G$ para todo $x, y \in G$ y para

cualquier escalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $x = (0, a+b, -b)$ e $y = (0, a'+b', -b')$ dos vectores cualesquiera de G. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(0, a+b, -b) + \beta(0, a'+b', -b') \\ &= (0, \alpha(a+b) + \beta(a'+b'), -\alpha b - \beta b') \in G \ , \end{aligned}$$

puesto que la primera componente es nula. Como $(0, a+b, -b) = a(0,1,0) + b(0,-1,1)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que una base de G es $\{(0,1,0), (0,-1,1)\}$. La suma $F+G$ no puede ser directa, ya que $\dim F = \dim G = 2$ y $\dim(F+G) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$, es decir, $\dim(F \cap G) \geq 1$. Calcularemos a continuación una base del subespacio vectorial $F \cap G$. Sea $x \in F \cap G$, es decir, $x = (2a - b, a, b) \in F$ y además $x = (0, c+d, -d) \in G$. Igualando las componentes del vector x se tiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$2a - b = 0 \ , \quad a = c + d \ , \quad b = -d \ ,$$

de donde se deduce, de la primera ecuación, que $b = 2a$. De esta forma $x = (0, a, 2a) = a(0,1,2)$ y por lo tanto $F \cap G =< (0,1,2) >$, de manera que una base de $F \cap G$ es $\{(0,1,2)\}$, siendo $\dim(F \cap G) = 1$.

14. *Averiguar los valores del parámetro a para los cuales el vector $(1,5,a)$ pertenece al subespacio vectorial $F =< (3,1,-1), (0,7,-1), (-1,2,0) >$.*

Solución. Observemos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

de manera que $\dim F = 2$ y una base de F es $\{(3,1,-1), (0,7,-1)\}$.

Imponiendo que el vector $(1,5,a)$ pertenece al subespacio vectorial F se tiene que han de existir dos únicas constantes reales α y β tal que $(1,5,a) = \alpha(3,1,-1) + \beta(0,7,-1)$. De igualar las componentes de ambos vectores se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 &=& 3\alpha \ , \\ 5 &=& \alpha + 7\beta \ , \\ a &=& -\alpha - \beta \ . \end{array} \right.$$

Este sistema es compatible y determinado si y sólo si la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada tiene rango 2, es decir cuando

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \\ a & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

que reduce a $21(1+a) = 0$ y cuya solución es $a = -1$.

15. *Consideremos los subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^4$

$$F =< (1,-1,1,0),(0,1,-1,1),(1,0,0,-1) > \ ,$$

$$G =< (1,0,0,0),(1,-2,2,0),(0,1,-1,1) > \ .$$

¿ Es cierto que $F = G$ *? Razonar la respuesta.*

Solución. En primer lugar veamos cual es la dimensión de los subespacios vectoriales F y G.

- Realizando transformaciones elementales por filas a la matriz formada con los vectores generadores de F en filas se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  donde las transformaciones elementales ha sido $f_3 \to f_3 - f_1$ y $f_3 \to f_3 - f_2$. Como el rango de dicha matriz es 3 se concluye que $\dim F = 3$.

- Realizando transformaciones elementales por filas a la matriz formada con los vectores generadores de G en filas se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  donde las transformaciones elementales ha sido $f_2 \to f_2 - f_1$ en el primer paso y $f_3 \to 2f_3 + f_2$. Como el rango de esta matriz es 3 se tiene que $\dim G = 3$.

Una vez se sabe que $\dim F = \dim G$, para demostrar que $F = G$ basta con ver que $F \subset G$. En caso contrario, es decir, si $F \not\subset G$ entonces $F \neq G$.

Para cualquier $v \in F$ se tiene $v = \alpha_1(1,-1,1,0) + \alpha_2(0,1,-1,1) + \alpha_3(1,0,0,-1) = (\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3)$. De forma análoga, cualquier vector perteneciente al subespacio G ha de ser de la forma $\beta_1(1,0,0,0) + \beta_2(1,-2,2,0) + \beta_3(0,1,-1,1) = (\beta_1 + \beta_2, -2\beta_2 + \beta_3, 2\beta_2 - \beta_3, \beta_3)$. Impongamos que $v \in G$ y veamos si es compatible $\forall v \in F$. Impondremos pues que se verifique

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_3 & = & \beta_1 + \beta_2 \ , \\ -\alpha_1 + \alpha_2 & = & -2\beta_2 + \beta_3 \ , \\ \alpha_1 - \alpha_2 & = & 2\beta_2 - \beta_3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & = & \beta_3 \ . \end{array} \right.$$

De este sistema lineal se pueden despejar las β_i en función de las α_i para $i = 1, 2, 3$. En concreto se tiene $\beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_2+3\alpha_3)$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}(-2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ y $\beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$. Por lo tanto dicho sistema lineal es compatible y determinado para las incógnitas β_1, β_2, β_3 y en consecuencia todo vector de F pertenece a G. Así $F \subset G$ y por lo dicho anteriormente $F = G$.

El problema puede ser resuelto de otra forma. El método se basa en demostrar que los los sistemas generadores de F y de G son en realidad el mismo mediante transformaciones elementales. En concreto, formaremos una matriz con las componentes de los vectores generadores de F en filas y realizaremos transformaciones elementales por filas hasta conseguir las componentes de los vectores generadores de G. Veámoslo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde las transformaciones elementales ha sido (i) $f_2 \to f_2 + f_3$; (ii) $f_2 \to f_2/2$; (iii) $f_3 \to 3f_2 - f_1 - 2f_3$.

Otra forma de resolver el problema es demostrando que $\dim F = \dim G = 3$ y que $\dim(F+G) = 3$ lo que implica que $\dim(F \cap G) = 3$ y por tanto que $F = G$.

16. *Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con elementos reales. Definimos los subconjutos S y A de las matrices simétricas y antisimétricas como*

$$S = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\} \ , \ A = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\} \ .$$

(i) *Demostrar que S y A son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

(ii) *Calcular la dimensión y una base de S y de A.*

(iii) *Demostrar que $S \oplus A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solución. **(i)** Puesto que $S \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es un subconjunto no vacío, para demostrar que S es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ hemos de ver que $\forall B, C \in S$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que $\alpha B + \beta C \in S$. De forma análoga, para demostrar que A es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es suficiente con demostrar que $\forall D, E \in A$ y $\forall \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ se verifica $\gamma D + \lambda E \in A$. Veámoslo por separado.

- Sean $B, C \in S$ con elementos $B = (b_{ij}$ y $C = (c_{ij})$ para $i, j = 1, \ldots, n$ verificando $b_{ij} = b_{ji}$ y $c_{ij} = c_{ji}$. Entonces, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que la matriz $F = \alpha B + \beta C$ tiene sus elementos de la forma $F = (f_{ij})$ donde $f_{ij} = \alpha b_{ij} + \beta c_{ij}$. Puesto que se verifica $f_{ij} = f_{ji}$ se tiene que $F \in S$ y se conluye que S es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Sean $D, E \in A$ con elementos $D = (d_{ij}$ y $E = (e_{ij})$ para $i, j = 1, \ldots, n$ verificando $d_{ij} = -d_{ji}$ y $e_{ij} = -e_{ji}$. Entonces, $\forall \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ se verifica que la matriz $G = \gamma D + \lambda E$ tiene sus elementos de la forma $G = (g_{ij})$ donde $g_{ij} = \gamma d_{ij} + \lambda e_{ij}$. Puesto que se verifica $g_{ij} = -g_{ji}$ se tiene que $G \in A$ y se conluye que A es subespacio vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Para calcular una base de S basta con observar que cualquier matriz $B \in S$ con elementos $B = (b_{ij})$ verifica $b_{ij} = b_{ji}$ y por lo tanto sus elementos simétrios respecto de la diagonal principal son todos iguales. Entonces podemos realizar la descomposición

$$B = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \bar{B}_{ii} + \sum_{j>i} b_{ij} \bar{B}_{ij} \ ,$$

siendo

$$\bar{B}_{ii} = (\bar{b}_{jk}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ \begin{cases} \bar{b}_{jk} = 0 & \text{si} \quad j \neq k \ , \\ \bar{b}_{jj} = 0 & \text{si} \quad j \neq i \ , \\ \bar{b}_{jj} = 1 & \text{si} \quad j = i \ , \end{cases}$$

y

$$\bar{B}_{ij} = (\bar{b}_{k\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ \begin{cases} \bar{b}_{k\ell} = 0 & \text{si} \quad i \neq k \ , \ j \neq \ell \ , \\ \bar{b}_{k\ell} = \bar{b}_{\ell k} = 1 & \text{si} \quad i = k \ , j = \ell \ . \end{cases}$$

Es obvio que

$$S =< \bar{B}_{11}, \bar{B}_{22}, \ldots, \bar{B}_{nn}, \bar{B}_{12}, \bar{B}_{13}, \ldots, \bar{B}_{1n}, \bar{B}_{23}, \ldots, \bar{B}_{2n}, \ldots, \bar{B}_{n-1,n} > \ ,$$

y que además este conjunto generador es linealmente independiente ya que son matrices con todos sus elementos nulos excepto alguno no nulo que están siempre colocados en filas y columnas diferentes.

Para hallar la dimensión de S basta con contar el número de matrices que contiene una base suya, es decir

$$\dim S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

A continuación calcularemos una base y la dimensión del subespacio A de foma totalmente análoga. Observar que cualquier matriz $D \in A$ con elementos $D = (d_{ij})$ verifica $d_{ij} = -d_{ji}$ y por lo tanto sus elementos simétrios respecto de la diagonal principal son cambiados de signo mientras que los de la diagonal principal son todos nulos. Entonces podemos realizar la descomposición

$$D = \sum_{j>i} d_{ij} \bar{D}_{ij} \ ,$$

$$\bar{D}_{ij} = (\bar{d}_{k\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , \ \begin{cases} \bar{d}_{k\ell} = 0 & \text{si} \quad i \neq k \ , \ j \neq \ell \ , \\ \bar{d}_{k\ell} = -\bar{d}_{\ell k} = 1 & \text{si} \quad i = k \ , j = \ell \ . \end{cases}$$

Es obvio que

$$A =< \bar{D}_{12}, \bar{D}_{13}, \ldots, \bar{D}_{1n}, \bar{D}_{23}, \ldots, \bar{D}_{2n}, \ldots, \bar{D}_{n-1,n} > \ ,$$

y que además este conjunto generador es linealmente independiente ya que son matrices con todos sus elementos nulos excepto alguno no nulo que están siempre colocados en filas y columnas diferentes.

Para hallar la dimensión de A contaremos el número de matrices que contiene una base suya, es decir

$$\dim A = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} \ .$$

(iii) Es fácil ver que $S \cap A = O$ siendo O el elemento neutro respeto de la suma para el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, es decir, O es una matriz cuadrada de orden n con todos sus elementos nulos. Por lo tanto $\dim(S \cap A) = 0$ y se concluye que $S \oplus A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En realidad, existe una descomposición trivial para cualquier matriz $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ como la suma de una matiz simétrica y una antisimetŕica de la forma

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^t) + \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^t) \ .$$

17. *(a) Probar que el conjunto* $\mathcal{B} = \{(-1,2,0),(0,0,3),(0,-2,1)\}$ *es base de* $\mathbb{R}^3$*. Sea* $v = (1,2,3)_{\mathcal{B}}$ *las componentes del vector* v *en la base* $\mathcal{B}$*. Encontrar las componentes de* v *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*.*

    (b) Encontrar $a \in \mathbb{R}$ *de manera que el vector* $(1,5,a)$ *sea combinación lineal de los vectores* $\{(3,1,-1),(-1,2,0),(0,7,-1)\}$*.*

Solución. **(a)** Puesto que $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, cualquier trio de vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independiente será una base de $\mathbb{R}^3$. En concreto

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ ,$$

por lo tanto los vectores del conjunto $\mathcal{B}$ son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^3$. En realidad no es necesario realizar ningún cálculo para ver que los vectores de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes puesto que son vectores cuyas componentes están escalonadas.

Sea $\mathcal{BC} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Puesto que

$$(-1,2,0) = -e_1 + 2e_2 \ , \ (0,0,3) = 3e_3 \ , \ (0,-2,1) = -2e_2 + e_3 \ ,$$

la matriz P de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{BC}$ es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$Pv = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} ,$$

de manera que, por las propiedades de la matriz P, las componentes de v en la base canónica $\mathcal{BC}$ son $v = (-1, -4, 9)$.

(b) El vector $(1, 5, a)$ será combinación lineal de los vectores

$$\{(3, 1, -1), (-1, 2, 0), (0, 7, -1)\}$$

si y sólo si existen tres escalares reales α, β y γ tal que

$$(1, 5, a) = \alpha(3, 1, -1) + \beta(-1, 2, 0) + \gamma(0, 7, -1) .$$

Igualando componente a componente los vectores de la anterior ecuación se obtiene el siguiente sistema lineal para α, β y γ

$$\begin{aligned} 1 &= 3\alpha - \beta , \\ 5 &= \alpha + 2\beta + 7\gamma , \\ a &= -\alpha - \gamma . \end{aligned}$$

El valor de a que nos piden será el que haga que este sistema lineal sea compatible. Despejando β de la primera ecuación y sustituyéndola en el resto de ecuaciones se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \gamma , \\ -a &= \alpha + \gamma , \end{aligned}$$

que sólo es compatible si $a = -1$.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente. Primero observamos que los vectores $\{(3, 1, -1), (-1, 2, 0), (0, 7, -1)\}$ son linealmente dependientes puesto que el determinante de sus componentes se anula. Entonces el subespacio vectorial

$$F =< (3, 1, -1), (-1, 2, 0), (0, 7, -1) >=< (3, 1, -1), (-1, 2, 0) > .$$

Puesto que se busca el valor de a para el cual $(1, 5, a) \in F$, una forma de obtenerlo es imponer que los vectores $\{(3, 1, -1), (-1, 2, 0), (1, 5, a)\}$ sean

linealmente dependientes. Para ello basta con imponer que se anule el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

de donde se deduce el valor $a = -1$.

18. *Determinar si son subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^3$ *los siguientes subconjuntos* $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + z = x\}$, $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + 4\}$ *y* $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sqrt{2}\ y\}$.

Solución. Un subconjunto $E_i \subset \mathbb{R}^3$ no vacío es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ si para todo $u, v \in E_i$ y para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica $\alpha u + \beta v \in E_i$. En particular el vector $(0, 0, 0) \in E_i$ y $u + v \in E_i$. Estudiemos cada uno de los conjuntos E_i con $i = 1, 2, 3$, por separado.

i) Para cualquier $u, v \in E_1$ se verifica $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$, con $xy + z = x$ y $x'y' + z' = x'$. Entonces $u + v = (x + x', y + y', z + z')$ con $(x + x')(y + y') + z + z' = (xy + z) + (x'y' + z') + (xy' + x'y) = x + x' + (xy' + x'y) \neq x + x'$. Concluimos que $u + v \notin E_1$ y por lo tanto E_1 no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

ii) Nótese que el vector $(0, 0, 0) \notin E_2$. Por lo tanto E_2 no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

iii) Para cualquier $u, v \in E_3$ se verifica $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$, con $x = \sqrt{2}y$ y $x' = \sqrt{2}y'$. Entonces, para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene $\alpha u + \beta v = \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$. Además $\alpha x + \beta x' = \alpha\sqrt{2}y + \beta\sqrt{2}y' = \sqrt{2}(\alpha y + \beta y')$ de manera que $\alpha u + \beta v \in E_3$ y en consecuencia E_3 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

19. *Sean* F *y* G *los subespacios vectoriales de* $\mathbb{R}^4$ *definidos por:*

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0, 3y + 2z + t = 0, 2x - y - t = 0\}, \\ G &= \{(0, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}. \end{aligned}$$

Calcular las dimensiones de F *y* G*, así como, unas bases de estos subespacios. ¿Es* $\mathbb{R}^4$ *suma directa de* F *y* G*?*

Solución. El sistema de las ecuaciones lineales que definen F viene dado por

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \ , \\ 3y + 2z + t &= 0 \ , \\ 2x - y - t &= 0 \ . \end{aligned}$$

Simplificando mediante transformaciones su matriz asociada obtenemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Por tanto, las ecuaciones que definen el subespacio vectorial F no son linealmente independientes, entonces F esta definido sólamente por dos ecuaciones. Si definimos $s_1 := x + y + z = 0$, $s_2 := 3y + 2z + t = 0$ y $s_3 := 2x - y - t = 0$, tomando por ejemplo s_1 y s_3, y aislando de z de s_1 y t de s_3 se obtiene que $F = \{(x, y, -x - y, 2x - y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} =< (1, 0, -1, 2), (0, 1, -1, -1) >$. Entonces $\dim F = 2$. Teniendo en cuenta la ecuación que define el subespacio vectorial G tenemos que $G = \{(0, y, z, -y - z) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z \in \mathbb{R}\} = < (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) >$. Y se tiene también que $\dim G = 2$.

Por la definición del subespacio suma se sabe que

$$F + G =< (1, 0, -1, 2), (0, 1, -1, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1) > ,$$

de manera que, para obtener una base y de esta forma conocer $\dim(F+G)$, podemos simplificar el sistema generador mediante las siguientes transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Se tiene pues que el subespacio suma $F + G$ está engendrado por cuatro vectores no nulos con las componentes escalonadas, ver las filas de la anterior matriz. En consecuencia dicho conjunto es linealmente independiente y por lo tanto forma una base de $F + G$. En concreto se tiene que $\dim(F + G) = 4$. Como $F + G$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ cuya dimensión coincide con la dimensión del propio espacio vectorial se tiene que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Aplicando el Teorema de las dimensiones de Grassman se tiene $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G) = 2 + 2 - 4 = 0$ de lo que se deduce que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$. Como consecuencia se tiene que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Otra forma de proceder en este ejercicio es la siguiente. Como para que $\mathbb{R}^4$ sea suma directa de $F + G$ tiene que ocurrir que $F + G = \mathbb{R}^4$ entonces el conjunto formado por la unión de los vectores que forman base de F y de G ha de ser linealmente independiente y por lo tanto el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Luego se procede como se ha hecho anteriormente utilizando el Teorema de Grassman.

NOTA: Otra forma de proceder para resolver el problema anterior consiste en hallar directamente $F \cap G$. Para cualquier vector $v \in F \cap G$ se tiene que $v \in F$ y $v \in G$, por lo tanto existen escalares reales λ_i con $i = 1, 2, 3, 4$ tales que

$$v = \lambda_1(1, 0, -1, 2) + \lambda_2(0, 1, -1, -1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2) \ ,$$

$$v = \lambda_3(0, 1, 0, -1) + \lambda_4(0, 0, 1, -1) = (0, \lambda_3, \lambda_4, -\lambda_3 - \lambda_4) \ .$$

Igualando las componentes del vector v se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \ , \\ \lambda_2 &= \lambda_3 \ , \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &= \lambda_4 \ , \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 &= -\lambda_3 - \lambda_4 \ . \end{aligned}$$

La información que se ha de obtener de este sistema es una relación entre λ_1 y λ_2 o bien entre λ_3 y λ_4. Una forma de proceder puede ser la siguiente: se sustituye el valor de λ_2 de la segunda ecuación en las restantes, de forma que se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \ , \\ -\lambda_1 - \lambda_3 &= \lambda_4 \ , \\ 2\lambda_1 &= -\lambda_4 \ . \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones se tiene $\lambda_4 = 0$ y sustituyendo ese valor en la tercera ecuación se obtiene $\lambda_1 = 0$. Finalmente, sustituyendo estos valores en las ecuaciones iniciales obtenemos $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. De lo que se concluye que $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

20. *Sean F_1 y F_2 los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:*

$$F_1 =< (1, 0, -1, 2), (1, 1, 1, -1), (1, -2, -5, 8) > \ ,$$

$$F_2 = \{(x, y, z, t) \mid x - 2y - 3z = 0, \ y + 2z - t = 0\} \ .$$

(a) *Calcular las dimensiones y bases de los subespacios vectoriales $F_1 \cap F_2$ y $F_1 + F_2$.*

(b) *Hallar, si es posible, un subespacio que sea a la vez complementario de F_1 y de F_2.*

Solución. **(a)** Para hallar una base de F_1 tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde una base de F_1 es $F_1 =< (1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, -3) >$ y $\dim F_1 = 2$. Por otro lado, aislando x e y de las restriciones que definen F_2 se tiene que $F_2 = \{(2t - z, t - 2z, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t,\ z \in \mathbb{R}\}$. Por tanto una base de F_2 es $F_2 =< (-1, -2, 1, 0), (2, 1, 0, 1) >$ y $\dim F_2 = 2$.

Como $F_1 + F_2$ es el subespacio generado por la unión de una base de F_1 y otra de F_2, simplificando dicho sistema generador mediante transformaciones elementales por filas, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $F_1 + F_2 =< (1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, -3), (0, 0, 4, -4) >$ y $\dim(F_1 + F_2) = 3$. En este caso $\dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 + F_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Para hallar una base de $F_1 \cap F_2$, recordemos que para cualquier vector $v \in F_1 \cap F_2$ se tiene que $v \in F_1$ y $v \in F_2$, por tanto existen escalares reales α_i con $i = 1, 2, 3, 4$ tales que

$$v = \alpha_1(1, 0, -1, 2) + \alpha_2(0, 1, 2, -3) = (\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 - 3\alpha_2),$$

$$v = \alpha_3(-1, -2, 1, 0) + \alpha_4(2, 1, 0, 1) = (-\alpha_3 + 2\alpha_4, -2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3, \alpha_4).$$

Igualando las componentes del vector v obtenemos el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_3 + 2\alpha_4, \\ \alpha_2 &= -2\alpha_3 + \alpha_4, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= \alpha_3, \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 &= \alpha_4. \end{aligned}$$

Substituyendo el valor de α_3 de la tercera ecuación y el valor de α_4 de la cuarta ecuación en la primera ecuación del sistema se obtiene $\alpha_1 = 2\alpha_2$ y por tanto

$$v = 2\alpha_2(1, 0, -1, 2) + \alpha_2(0, 1, 2, -3) = \alpha_2(2, 1, 0, 1),$$

de lo que se concluye que $F_1 \cap F_2 =< (2, 1, 0, 1) >$.

(b) Observemos que la base de F_1 $\{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, -3)\}$ hallada anteriormente ya está escalonada. Escalonemos también la base $\{(-1, -2, 1, 0), (2, 1, 0, 1)\}$ de F_2 mediante transformaciones elementales por filas, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, $\{(-1,-2,1,0),(0,-3,2,1)\}$ es una base escalonada de F_2. En definitiva, se pueden extender las dos bases escalonadas de F_1 y F_2 con los vectores $e_3 = (0,0,1,0)$ y $e_4 = (0,0,0,1)$ para formar una base de $\mathbb{R}^4$. Por tanto el subespacio que sea a la vez complementario de F_1 y de F_2 es $F =< (0,0,1,0),(0,0,0,1) >$.

21. *Sea $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 3 con elementos reales. Demostrar que el conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\} ,$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Encontrar su dimensión y una base.

Solución. Es obvio que el conjunto $\mathcal{A} \neq \emptyset$, por lo tanto, para demostrar que $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ basta con probar que para cualquier pareja de matrices $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ y cualquier pareja de escalares reales $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ se verifica $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 \in \mathcal{A}$. Veamos que realmente es cierto. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ entonces

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1+c_1 & a_1-c_1 \\ a_1-b_1-c_1 & a_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_1+c_1 & a_1+b_1-c_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix} , \\ B_2 &= \begin{pmatrix} a_2+b_2 & a_2-b_2+c_2 & a_2-c_2 \\ a_2-b_2-c_2 & a_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_2+c_2 & a_2+b_2-c_2 & a_2-b_2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

siendo $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$. En definitiva

$$\begin{aligned} \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 &= \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1+c_1 & a_1-c_1 \\ a_1-b_1-c_1 & a_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_1+c_1 & a_1+b_1-c_1 & a_1-b_1 \end{pmatrix} + \\ & \alpha_2 \begin{pmatrix} a_2+b_2 & a_2-b_2+c_2 & a_2-c_2 \\ a_2-b_2-c_2 & a_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_2+c_2 & a_2+b_2-c_2 & a_2-b_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{A} , \end{aligned}$$

donde $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$, $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ y $c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$.

Sea B una matriz cualquiera del subespacio vectorial $\mathcal{A}$, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix} .$$

Para hallar una base del subespacio vectorial $\mathcal{A}$, en primer lugar, obtendremos un sistema generador de $\mathcal{A}$. Ello se consigue notando que

$$B = a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\mathcal{A} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Finalmente, veamos que el anterior conjunto generador de $\mathcal{A}$ es linealmente independiente y por lo tanto forma una base de $\mathcal{A}$. Como es habitual realizamos una combinación lineal de los vectores del conjunto generador y lo igualamos al elemento neutro del espacio vectorial (en nuestro caso la matriz cuadrada nula de orden 3), es decir,

$$a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

De la igualdad anterior se obtiene el sistema lineal homogéneo

$$a+b = a-b+c = a-c = a-b-c = a = a+b+c = a+c = a+b-c = a-b = 0\,,$$

cuya única solución es la trivial $a = b = c = 0$. Por lo tanto el conjunto generador de $\mathcal{A}$ forma en realidad una base de $\mathcal{A}$, teniéndose $\dim\mathcal{A} = 3$.

22. *Demostrar que si* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *es una base de un espacio vectorial* E*, entonces*

$$\left\{ v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, \sum_{k=1}^{n} v_k \right\} ,$$

también es base de E*.*

Solución. Puesto que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial E, entonces $\dim E = n$. Por lo tanto, para demostrar que el conjunto de n vectores

$$\left\{ v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, \sum_{k=1}^{n} v_k \right\} , \tag{2.1}$$

también es base de E, basta con probar que sus vectores son linealmente independientes. Con este objetivo realizamos una combinación lineal de dichos vectores y la igualamos al elemento neutro 0_E de E, es decir,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \alpha_3(v_1 + v_2 + v_3) + \cdots + \alpha_n \sum_{k=1}^{n} v_k = 0_E.$$

Sacando en esta ecuación factor común de los vectores v_i para $i = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right) v_1 + \left(\sum_{k=2}^{n} \alpha_k\right) v_2 + \left(\sum_{k=3}^{n} \alpha_k\right) v_3 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_E \ .$$

Esta última ecuación es una combinación lineal de los vectores de la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de E igualada a 0_E. Puesto que dichos vectores son linealmente independientes, se desprende que todos los coeficientes de la anterior combinación lineal han de anularse y por lo tanto

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ , \\
0 &= \sum_{k=2}^{n} \alpha_k \ , \\
0 &= \sum_{k=3}^{n} \alpha_k \ , \\
&\vdots \\
0 &= \alpha_{n-1} + \alpha_n \ , \\
0 &= \alpha_n \ .
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema lineal comenzando por la última ecuación, después penúltima, etc... se ve que su solución es la trivial $\alpha_k = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ y por lo tanto el conjunto (2.1) es linealmente independiente, siendo además una base de E.

Capítulo 3

Aplicaciones Lineales

3.1. Resumen de teoría

Sean E y F dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : E \to F$ una aplicación. Diremos que f es *lineal* y lo denotaremos por $f \in \mathcal{L}(E, F)$ cuando $\forall u, v \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se verifique (i) $f(u + v) = f(u) + f(v)$; (ii) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$. Las aplicaciones lineales se clasifican en: (i) *monomorfismo* si f es inyectiva; (ii) *epimorfismo* si f es exhaustiva; (iii) *isomorfismo* si f es biyectiva; (iv) *endomorfismo* si $E = F$ y se denota por $f \in \mathrm{End}(E)$; (v) *automorfismo* si $E = F$ y f es isomorfismo.

Proposición 4 *Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces: (i) $f(0_E) = 0_F$; (ii) $f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i)$; (iii) Si H es subespacio de E entonces $f(H)$ es subespacio de F; (iv) Si G es subespacio de F entonces $f^{-1}(G)$ es subespacio de E.*

Núcleo e Imagen: Se define el *núcleo* de f como $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(0_F) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}$ y la *imagen* de f de la forma $\mathrm{Im} f = f(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E \text{ tal que } f(u) = v\}$. Por la Proposición 4 se tiene que $\mathrm{Ker} f$ es subespacio vectorial de E e $\mathrm{Im} f$ es subespacio vectorial de F.

Teorema 4 *Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces: (i) f es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; (ii) f es exhaustiva si y sólo si $\mathrm{Im} f = F$.*

Proposición 5 *Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E. Entonces: (i) $\mathrm{Im} f =< f(v_1), \ldots, f(v_n) >$; (ii) f es isomorfismo si y sólo si $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es base de F.*

Se define el *rango* de f como $\mathrm{rang} f = \dim \mathrm{Im} f$.

Teorema 5 *Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Entonces* $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

Matriz de una Aplicación Lineal: Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$ con $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de E y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de F relacionadas mediante f por $f(e_j) =$

$\sum_{i=1}^m a_{ij}v_i$ para $j = 1, \ldots, n$. Para todo $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in E$ se tiene $f(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i v_i \in F$. Entonces

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

donde la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la llamada *matriz asociada a f en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.*

Cambio de base en una Aplicación Lineal: Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de E y $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ bases de F. Sean $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}$ las matrices de cambio de base. Entonces $A' = \mathcal{M}^{-1}_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}} A \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$, siendo A y A' las matrices asociadas a f en las bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ respectivamente.

Matriz de la Composición: Sean $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Sean A y B las matrices asociadas a f y g respectivamente en unas bases fijadas. Entonces BA es la matriz asociada a la aplicación lineal $g \circ f$ en dichas bases.

Determinante de un Endomofismo: Sea $f \in \mathrm{End}(E)$. Si A y B son las matrices asociadas a f en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente entonces $B = M^{-1}_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} A M_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1}$. Se dice entonces que A y B son *semejantes* y además se verifica $\det A = \det B$.

3.2. Problemas propuestos

3.2.1. Aplicación lineal

1. *¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales?*

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad f(x, y) = (x - y, 2x + 1, y - 3, 1);$
   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y) = (x + y, y, 0);$
   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = (2y - x, x);$
   d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (xy, z - y, y + x).$

2. *¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales?*

   a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y, x);$
   b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x^2 - y^2, z, 0);$
   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad f(x, y, z) = (x + y - 2z, 0, x - 2z, y);$
   d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$
   e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z) = \sqrt{2}x + y - 2\pi z.$

3. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación lineal tal que* $f(1,1) = 3$ *y* $f(1,0) = 4$. *¿Cuánto vale* $f(2,1)$ *y* $f(x,y)$*?*

4. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una aplicación tal que* $f(3) = -4$. *Obtener la expresión de* $f(x)$. *¿Es un isomorfismo?*

5. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x,y,z) = (x+y+z, 2z-x, 2y+3z)$. *Probar que* f *es un isomorfismo y calcular su inverso* f^{-1}.

6. *Determinar los valores de* a *para los cuales el siguiente endomorfismo de* $\mathbb{R}^4$ *es un automorfismo:*

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+at, x+y+az+t, x+ay+z+t, ax+y+z+t).$$

7. *Demostrar que si* f *es un monomorfismo y* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes entonces* $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ *es también un conjunto de vectores linealmente independientes.*

3.2.2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal

1. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una aplicación tal que* $f(x,y,z) = (0,x,y)$

   a) *Demostrar que* f *es aplicación lineal.*

   b) *Encontrar* $\mathrm{Ker} f$ *e* $\mathrm{Im} f$, *así como sus dimensiones y bases respectivas.*

   c) *Encontrar* $f^2 = f \circ f$ *y* $f^3 = f \circ f \circ f$.

   d) *Encontrar* $\mathrm{Ker} f^2$, $\mathrm{Ker} f^3$, $\mathrm{Im} f^2$ *e* $\mathrm{Im} f^3$. ¿Qué relación existe entre ellos?

2. *Encontrar el valor de* $a \in \mathbb{R}$ *tal que la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *definida por* $f(x,y,z) = (ax+y+z, x+ay+z, x+y+az)$, *tenga el núcleo de dimensión máxima. Calcular también una base del núcleo de* f *para este valor de* a.

3. *Sea* $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ *un endomorfismo tal que* $T(1-2x+3x^2) = 5+2x$, $T(2+x-x^2) = 1-x^2$ *y* $T(5-x^2) = 3+2x+2x^2$.

   a) *Probar que estas tres imágenes determinan* T.

   b) *Calcular* $\mathrm{Ker} T$ *e* $\mathrm{Im} T$, *así como sus dimensiones y bases respectivas.*

   c) *Calcular* $T^{-1}(U)$, *siendo* $U = \{a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid b = c,\ a = 0\}$.

   d) *Encontrar todas las antiimágenes del polinomio* $5/2 - 3x - 10x^2$.

4. *Sea la aplicación de* $\mathbb{R}^3$ *en* $\mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$. *Probar que* f *es lineal. Calcular* $\mathrm{Ker} f$ *y* $\mathrm{Im} f$. *Probar que se verifica la igualdad* $(f^2 - I) \circ (f - 3I) = 0$.

5. *Se considera el subespacio* $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y,\ x + y = z\}$. *Determinar una base de* V. *Determinar también una base de* $\mathbb{R}^3$, $\{u_1, u_2, u_3\}$, *tal que* $\{u_1\}$ *sea base de* V. *Encontrar una aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *tal que* $\mathrm{Ker}f = V$.

6. *Sea* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$ *y sea* f *un endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $\mathrm{Ker}f$ *está generado por* $e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_1 + e_2) = 3e_3$ *y* $e_1 - e_2 \in f^{-1}(2e_1)$. *Calcular una base de la imagen de* f.

7. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal tal que los vectores* $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ *son invariantes respecto de* f *y el vector* $(0, 1, 1)$ *genera el núcleo. Encontrar las ecuaciones implícitas de* $\mathrm{Im}f$. *Si* S *es un subespacio engendrado por los vectores* $(0, 2, 4)$, $(4, -2, -5)$, *¿és* $S = \mathrm{Im}f$*?*

3.2.3. Matriz de una aplicación lineal

1. *Sea* f *el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *definido por* $f(2, 1, 0) = (4, 2, 2)$, $f(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$ *y* $f(2, 0, 1) = (0, 4, 2)$. *Encontrar la matriz de* f *en la base canónica y estudiar el núcleo y la imagen.*

2. *Sea* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$ *y* f *un endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $f(e_1) = e_1 + e_2$, $f(e_3) = e_1$ *y* $\mathrm{Ker}f = < e_1 + e_2 >$.

   a) *Hallar la matriz de* f *en la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$.

   b) *Calcular* $f(4e_1 - e_2 + 3e_3)$.

   c) *Estudiar el núcleo y la imagen de* f, f^2 *y* f^3.

   d) *¿Se verifica que* $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$?

3. *Construir un endomorfismo de* $\mathbb{R}^4$ *tal que* $f^2 = f$, $\mathrm{Ker}f = < e_1, e_2 >$ *e* $\mathrm{Im}f = < e_3, e_4 >$, *donde* $e_1 = (1, 3, 0, 0)$, $e_2 = (3, -1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 3)$ *y* $e_4 = (0, 0, 3, -1)$. *Calcular la matriz asociada a* f *en la base canónica.*

4. *Sea* $\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$. *De las aplicaciones siguientes estudiar cuales son lineales y, en caso de serlo, escribir las matrices asociadas en las bases canónicas* $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ *de* $\mathbb{R}_n[x]$ *y estudiar sus núcleos y sus imágenes.*

   a) $\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) & \longrightarrow & p'(x). \end{array}$

   b) $\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ p(x) & \longrightarrow & (x+1)p'(x). \end{array}$

   c) $\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p(x) & \longrightarrow & p(2). \end{array}$

   d) $\begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[x] \\ p(x) & \longrightarrow & \textit{resto de dividir } p(x) \textit{ entre } x^2+1. \end{array}$

5. *Considerar los endomorfismos de* $\mathbb{R}^3$ *de la forma* $f_r(x, y, z) = (2x + y + 2z,\ x + y,\ x + 2y + rz)$. *Encontrar el valor de* r *para el cual el rango de* f_r *sea mínimo. Para este valor de* r*:*

    a) *Estudiar el núcleo y la imagen de* f_r.

    b) *¿Existe algun valor* t *tal que* $(3, 2, t) \in \mathrm{Ker} f_r$?

    c) *Encontrar la antiimagen del vector* $(1, 2, 1)$.

6. *Sea* f *un endomorfismo de un espacio vectorial tal que* $f^2 + f + I = 0$. *Demostrar que* f *es un automorfismo y calcular su inverso.*

7. *Dada una base* $\{e_1, e_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *se define el endomorfismo* f *de forma que* $f(e_1) = e_1 + e_2$ *y* $f(e_2) = 2e_1 + 3e_2$. *Obtener la aplicación inversa, dar la expresión general del endomorfismo y su matriz asociada a la base* $\{e_1, e_2\}$.

8. *Dado el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *que tiene por matriz asociada*

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

    demostrar que para cualquier valor de λ *la dimensión de su imagen es dos. Encontrar el núcleo y la imagen para* $\lambda = -2$.

9. *Considerar el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *definido por* $f(x, y, z) = ((m - 2)x + 2y - z,\ 2x + my + 2z,\ 2mx + 2(m + 1)y + (m + 1)z)$. *Demostrar que la dimensión del núcleo es cero excepto para valores particulares de* m. *Para estos valores dar las dimensiones y las bases del núcleo y de la imagen.*

3.2.4. Composición de aplicaciones lineales

1. *Sean* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *y* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *aplicaciones tales que* $f(x, y, z) = (x + y + z, 0)$ *y* $g(x, y) = (x, y, x + y, x - y)$.

    a) *Probar que son lineales y estudiar sus núcleos y sus imágenes.*

    b) *Encontrar la matriz de* $g \circ f$ *en las bases canónicas y estudiar su núcleo y su imagen.*

    c) *Encontrar la imagen de* $(1, 2, 3)$ *dada por* $g \circ f$.

3.2.5. Cambios de base

1. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal definida por* $f(1, 2) = (2, 1, 3)$ *y* $f(2, 3) = (1, 0, 2)$.

    a) *Encontrar la matriz de* f *en la base* $\{(3, 5),\ (1, 1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

b) *Encontrar la matriz de f en la base $\{(3,5),\ (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y la base $\{(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $f(x,y,z) = (2x+y, y-z)$. Encontrar la matriz asociada en:*

   a) *Las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$.*

   b) *La base $\{(1,1,1),\ (0,2,1),\ (0,-2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{(2,1),\ (1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

   c) *Calcular* $\mathrm{Ker}f$ *y la* $\mathrm{Im}f$, *así como las dimensiones y bases respectivas.*

3. *Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene por matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Encontrar la matriz de f en la base $\{(1,0,0),\ (0,2,0),\ (-1,-1,1)\}$.

4. *Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene por matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) *Encontrar la matriz de f en la base $\{(1,0,0),\ (1,-1,1),\ (2,0,1)\}$. Llamemos B a dicha matriz.*

   b) *Comprobar que $A^n = A$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ¿Es cierto también que $B^n = B$ $\forall n \in \mathbb{N}$?*

   c) *Dado un endomorfismo g diremos que es idempotente si satisface $g^2 = g$. De forma análoga diremos que una matriz M es idempotente si $M^2 = M$. Comprobar que g es idempotente si y sólo si su matriz asociada en cualquier base lo es.*

   d) *Calcular el determinante de A y B. Si M es una matriz idempotente, entonces ¿qué valores puede tomar su determinante?*

   e) *Probar que A es idempotente si y sólo si $I - A$ es idempotente.*

   f) *Probar que si g es idempotente, entonces $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}g + \mathrm{Im}g$.*

5. *Dada una base $\{u,v,w\}$ de $\mathbb{R}^3$, definimos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $f(u) = v$, $f(v) = w$ y $f(w) = 0$.*

   a) *Encontrar la matriz de f en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, siendo $e_1 = u$, $e_2 = u + v$ y $e_3 = u + v + w$.*

   b) *Encontrar* $\mathrm{Ker}f$ *e* $\mathrm{Im}f$, *dando la dimensión y una base.*

   c) *Calcular el menor número natural p tal que $f^p = 0$.*

6. *El conjunto* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *con* $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (2, 1, -1)$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$ *y el conjunto* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *con* $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1, 0)$ *es una base de* $\mathbb{R}^4$. *Se define la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *dada por* $f(u_1) = v_1 - v_4$, $f(u_2) = v_1 + v_2 + v_3$, $f(u_3) = v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4$. *Encontrar la matriz de* f *en las bases dadas y en las bases canónicas.*

7. *Sean* V *y* W *dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{R}$, *donde* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *es una base de* V *y* $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ *es una base de* W. *La aplicación lineal* f *se define por* $f(a_1 + 2a_2 - 3a_3) = b_1 + 3b_2 - 7b_3 - 2b_4$, $f(2a_1 + a_3) = b_2 + 2b_3$, $f(4a_1 + a_2) = b_1 + 5b_2 - 3b_3 - 2b_4$.

   a) *Comprobar que los vectores sobre los que tenemos definida la aplicación* f *son base de* V.

   b) *Encontrar la matriz de* f *en las bases* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *y* $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

   c) *Encontrar el núcleo y la imagen de* f, *dando la dimensión y una base.*

8. *Sea* $\mathbb{R}_3[x] = \{ax^3+bx^2+cx+d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que tres en una variable* x *con coeficientes reales.*

   a) *Demostrar que el conjunto de polinomios* $\{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ *es una base de* $\mathbb{R}_3[x]$.

   b) *Encontrar la matriz de cambio de base de esta base a la canónica, es decir, a la base* $\{1, x, x^2, x^3\}$.

   c) *Encontrar la expresión del polinomio* $2 - x^2 + x^3$ *en la nueva base.*

   d) *Sea* $V = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid (1-x)p'' + 2p' = 0\}$. *Demostrar que es un subespacio de* $\mathbb{R}_3[x]$, *encontrar su dimensión y una base.*

   e) *Comprobar que* $1 \in V$ *y que* $(1-x)^3 \in V$. *Encontrar una base del espacio complementario de* V.

9. *Sea* $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *la aplicación lineal definida por*

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}.$$

   a) *Encontrar la matriz de* f *en la base canónica de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) *Encontrar* $\mathrm{Ker} f$ *e* $\mathrm{Im} f$, *dando la dimensión y una base.*

   c) *Demostrar que* $f^2 = 2f$. *Deducir una expresión para* f^p, $\forall p \in \mathbb{N}$.

3.3. Problemas resueltos

1. *Sea* $\mathbb{R}_3[x]$ *el espacio vectorial de los polinomios en una variable de grado menor o igual que 3. Definimos* $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ *de la siguiente forma* $f(p(x)) = p(x) - xp'(x)$. *Demostrar que* f *es una aplicación lineal y*

calcular la imagen del polinomio $q(x) = 2x^3 - x^2 - 5$*. Calcular la matriz asociada a* f *en la base canónica de* $\mathbb{R}_3[x]$*.*

Solución. Para ver que $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_3[x])$ se han de probar las dos propiedades de linealidad siguientes.

(i) Para cualquier pareja de polinomios $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(p(x)+q(x)) &= [p(x)+q(x)] - x[p(x)+q(x)]' = [p(x)+q(x)] \\ -x[p'(x)+q'(x)] &= [p(x)-xp'(x)] + [q(x)-xq'(x)] = f(p(x)) + f(q(x)) \ . \end{aligned}$$

(ii) Para cualquier polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ y para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} f(\lambda p(x)) &= [\lambda p(x)] - x[\lambda p(x)]' = [\lambda p(x)] - x[\lambda p'(x)] \\ &= \lambda[p(x) - xp'(x)] = \lambda f(p(x)) \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación f es lineal. Calculemos ahora la imagen del polinomio $q(x) = 2x^3 - x^2 - 5$ dada por la aplicación f.

$$f(q(x)) = q(x) - xq'(x) = 2x^3 - x^2 - 5 - x[6x^2 - 2x] = -4x^3 + x^2 - 5 \ .$$

La base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ es $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$, de manera que para calcular la matriz A asociada a f en en la base $\mathcal{B}$ se realizan los cálculos siguientes.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - x[1]' = 1 - 0x = 1 \ , \\ f(x) &= x - x[x]' = x - x = 0 \ , \\ f(x^2) &= x^2 - x[x^2]' = x^2 - 2x^2 = -x^2 \ , \\ f(x^3) &= x^3 - x[x^3]' = x^3 - 3x^3 = -2x^3 \ . \end{aligned}$$

De esta forma se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Otra forma de obtener la imagen del polinomio $q(x) = 2x^3 - x^2 - 5$ es la siguiente. Las componentes de $q(x)$ en la base $\mathcal{B}$ son $q = (-5, 0, -1, 2)_{\mathcal{B}}$. Entonces

$$f(q(x)) = Aq = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} ,$$

de manera que $f(q(x)) = (-5, 0, -1, 2) = (-5, 0, 1, 4)_{\mathcal{B}} = -5 + x^2 - 4x^3$.

2. *Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que en la base $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ posee como matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿La imagen del vector $e_1 + e_2$ por la aplicación lineal es el vector $3e_1 + 3e_2$? Dar las bases y dimensiones del núcleo y de la imagen.

Solución. Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$. Como la matriz A asociada a f en la base $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

de las columnas de esta matriz se deduce que

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2) &= (e_1 + e_2) + 2(e_1 - e_2) = 3e_1 - e_2 \ , \\ f(e_1 - e_2) &= 2(e_1 + e_2) + (e_1 - e_2) = 3e_1 + e_2 \ . \end{aligned}$$

De la primera ecuación en la anterior expresión se comprueba que $f(e_1 + e_2) = 3e_1 - e_2 \neq 3e_1 + 3e_2$. Por lo tanto la respuesta a la primera pregunta es que no.

Calculemos una base para $\mathrm{Ker} f$ mirado como subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. $(x, y) \in \mathrm{Ker} f$ si y sólo si $f(x, y) = (0, 0)$. Tomando las componentes del vector (x, y) en la base $\mathcal{B}$, la condición anterior se expresa en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema lineal y homogéneo sólo admite la solución trivial $(x, y) = (0, 0)$ puesto que $\det A = 3 \neq 0$. Entonces el único vector de $\mathbb{R}^2$ que pertenece a $\mathrm{Ker} f$ es el $(0, 0)$ y por lo tanto $\mathrm{Ker} f = 0$, siendo $\dim \mathrm{Ker} f = 0$.

Finalmente, como $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Ker} f = 2 - 0 = 2$ y además $\mathrm{Im} f$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ se tiene que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2$.

3. *Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido de la forma $f(x, y) = (x + (a - 1)y, 2x + (a - 2)y)$ siendo a un parámetro real.*

   (a) *Determinar el valor del parámetro a de manera que f sea biyectiva.*

   (b) *Se define el subespacio vectorial invariante por f de la forma $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x, y)\}$. Hallar una base de W según los valores del parámetro a.*

Solución. **(a)** La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ será biyectiva si y sólo si f es inyectiva, es decir $\mathrm{Ker}f = \{(0,0)\}$, y además es exhaustiva y por lo tanto $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$.

En primer lugar vamos a ver para que valores del parámetro a se tiene $\mathrm{Ker}f = \{(0,0)\}$. Para cualquier vector $(x,y) \in \mathrm{Ker}f$ se tiene que $f(x,y) = (0,0)$. A partir de la definición de f la anterior igualdad se expresa en forma de sistema lineal homogéneo como

$$x + (a-1)y = 0 \ , \quad 2x + (a-2)y = 0 \ .$$

Este sistema para las incógnitas (x,y) admitirá como única solución la solución trivial $(x,y) = (0,0)$ si y sólo si el determinante de la matriz de sus coeficientes es no nulo. Calculando dicho determinante se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 2 & a-2 \end{vmatrix} = -a \ ,$$

de manera que si $a \neq 0$ entonces $(x,y) = (0,0)$ y por lo tanto $\mathrm{Ker}f = \{(0,0)\}$ con lo cual f es inyectiva. Finalmente, para $a \neq 0$

$$\dim \mathrm{Im}f = \dim\mathbb{R}^2 - \dim \ker f = 2 - 0 = 2 \ ,$$

por lo tanto $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$ y en consecuencia f es exhaustiva. Se concluye que si $a \neq 0$ entonces f es biyectiva.

(b) Como $f(x,y) = (x+(a-1)y, 2x+(a-2)y)$ y $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (x,y)\}$ las componentes (x,y) de los vectores pertenecientes a W deben verificar $x + (a-1)y = x$, $2x + (a-2)y = y$ o equivalentemente

$$(a-1)y = 0 \ , \quad 2x + (a-3)y = 0 \ .$$

El determinante de los coeficientes de este sistema lineal homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 0 & a-1 \\ 2 & a-3 \end{vmatrix} = 2(1-a) \ ,$$

de manera que

- Si $a \neq 1$ entonces $x = y = 0$ y por lo tanto $W = \{(0,0)\}$.
- Si $a = 1$ se tiene $x = y$ de manera que $W =< (1,1) >$.

4. *La matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en una base $\{u_1, u_2, u_3\}$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Calcular la matriz de f en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ dada por $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = 2u_2$ y $v_3 = u_2 + u_3$.

Solución. Consideramos las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}\ ,\quad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}\ ,$$

siendo $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = 2u_2$ y $v_3 = u_2 + u_3$. Entonces, la matriz de cambio de base entre la base $\mathcal{B}'$ y la base $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Además la matriz del cambio de base inverso es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Finalmente, la matriz asociada a la aplicación lineal f en la base $\mathcal{B}'$ es

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

5. *Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en una variable de grado menor o igual que 2. Definimos la aplicación $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ de la forma $f(p(x)) = p(x+5) + p(x)$, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.*

   (a) *Probar que f es endomorfismo.*

   (b) *Hallar la matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$.*

   (c) *Probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+x+1\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Hallar la matriz de f en dicha base.*

Solución. **(a)** Como $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, el espacio de partida y de llegada es el mismo, de manera que para ver que f es endomorfismo basta con demostrar que es una aplicación lineal. En concreto se ha de ver que para todo $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica $f(p(x) + q(x)) = f(p(x)) + f(q(x))$ y $f(\lambda p(x)) = \lambda f(p(x))$. Para verlo, basta con aplicar las

propiedades de la suma y el producto por escalar de los polinomios de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}
f(p(x)+q(x)) &= (p+q)(x+5)+(p+q)(x) \\
&= p(x+5)+q(x+5)+p(x)+q(x) \\
&= p(x+5)+p(x)+q(x+5)+q(x) = f(p(x))+f(q(x)) \ , \\
f(\lambda p(x)) &= (\lambda p)(x+5)+(\lambda p)(x) = \lambda p(x+5)+\lambda p(x) \\
&= \lambda[p(x+5)+p(x)] = \lambda f(p(x)) \ .
\end{aligned}$$

(b) Para hallar la matriz A asociada a f en la base canónica $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ basta con calcular la imagen dada por f de sus elementos, es decir

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1+1=2 \ , \\
f(x) &= (x+5)+x = 2x+5 \ , \\
f(x^2) &= (x+5)^2+x^2 = 2x^2+10x+25 \ .
\end{aligned}$$

De esta forma se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

(c) Para demostrar que el conjunto $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, como está compuesto por 3 polinomios y $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, basta con demostrar que los polinomios de $\mathcal{B}$ son linealmente independientes. Esto se puede ver de dos formas diferentes:

- Realizamos una combinación lineal de los polinomios pertenecientes al conjunto $\mathcal{B}$ y la igualamos a cero. La combinación lineal $\alpha 1+\beta(x+1)+\gamma(x^2+x+1)=0$ puede reescribirse agrupando las potencias de x de la forma $(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)x+\gamma x^2=0$ Como esta identidad se ha de verificar para todo x, la única posibilidad es que todos los coeficientes del polinomio se anulen, es decir

  $$\alpha+\beta+\gamma=0 \ , \ \beta+\gamma=0 \ , \ \gamma=0 \ .$$

  La única solución de este sistema lineal homogéneo es la trivial $\alpha=\beta=\gamma=0$, de manera que los polinomios del conjunto $\mathcal{B}$ son linealmente independientes.

- Las componentes en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios del conjunto $\mathcal{B}$ son $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y son linealmente independientes debido a que el determinante formado con dichos vectores es diferente de cero, es decir,

  $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ .$$

Sean A y B las matrices asociadas a f en las bases canónica y $\mathcal{B}$ respectivamente y sea P la matriz del cambio de base entre la base $\mathcal{B}$ y la base canónica. La relación existente entre dichas matrices es $B = P^{-1}AP$. La matriz A se conoce del apartado (b) del problema. La matriz P viene dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

de manera que su inversa es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente, la matriz B viene dada por el siguiente producto de matrices

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 20 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

6. *Se considera la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *cuya matriz en las bases canónicas respectivas es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

(a) *Hallar* $\mathrm{Ker} f$ *y* $\mathrm{Im} f$.

(b) *Calcular la matriz asociada a* f *en la bases* $\{(1,2,-1),(1,3,1),(1,1,1)\}$ *y* $\{(2,-1),(1,1)\}$.

Solución. (a) El núcleo de la aplicación lineal f se define como $\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; f(x,y,z) = (0,0)\}$. De esta forma, las componentes (x,y,z) de los vectores de $\mathrm{Ker} f$ deben satisfacer el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dicho sistema es compatible indeterminado, siendo su solución $x = z/2$, $y = -3z/2$. De esta forma, los vectores de $\mathrm{Ker} f$ son

$$(x,y,z) = \left(\frac{z}{2}, -\frac{3}{2}z, z\right) = \frac{z}{2}(1,-3,2) ,$$

o de forma equivalente Ker$f =< (1,-3,2) >$.

El cálculo de Imf se puede realizar de dos formas diferentes. La primera más conceptual y rápida y la segunda más mecánica y lenta.

- En primer lugar calculamos cual es la dimensión del subespacio vectorial Imf.

$$\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker} f = 3 - 1 = 2 \ .$$

  Finalmente, puesto que Imf es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ y dim Im$f = \dim\mathbb{R}^2$ se concluye que Im$f = \mathbb{R}^2$.

- Imf es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ engendrado por la imagen dada por la aplicación f de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir

$$\mathrm{Im} f =< f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) > \ .$$

  Realizando los cálculos pertinentes se tiene

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \\ f(0,1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \\ f(0,0,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

  de manera que

$$\mathrm{Im} f =< (1,1),(1,-1),(1,-2) >=< (1,1),(1,-1) >= \mathbb{R}^2 \ .$$

(b) Consideremos las siguientes bases $\mathcal{B}_3^c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}_3' = \{(1,2,-1),(1,3,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Además, en $\mathbb{R}^2$, definimos las bases $\mathcal{B}_2^c = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{B}_2' = \{(2,-1),(1,1)\}$. Por otra parte, sea P la matriz de cambio de base entre las bases $\mathcal{B}_3'$ y $\mathcal{B}_3^c$ y Q la matriz de cambio de base entre las bases $\mathcal{B}_2'$ y $\mathcal{B}_2^c$. Se tiene en definitiva

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Puesto que se conoce la matriz A asociada a f en las bases canónicas $\mathcal{B}_3^c$ y $\mathcal{B}_2^c$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} ,$$

la matriz B asociada a f en las bases $\mathcal{B}_3'$ y $\mathcal{B}_2'$ viene dada por

$$\begin{aligned} B &= Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

7. *Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que verifica $f(v) = (-1, 10, -1)$, $f(u) = (-1, 4, 2)$ y $f(w) = (2, 1, -1)$ donde $v = (1, 2, 1)$, $u = (-1, 2, 0)$ y $w = (1, -1, 0)$. Hallar la matriz del endomorfismo f en la base canónica. Encontrarla también en la base $\{u, v, w\}$.*

Solución. Sean $\mathcal{BC}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $\{v, u, w\}$. Además, definimos las matriz A asociadas al endomorfismo f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{BC}$ en el espacio de partida y de llegada respectívamente. Como $f(v) = (-1, 10, -1)$, $f(u) = (-1, 4, 2)$ y $f(w) = (2, 1, -1)$ se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Las matrices que se han de hallar son B y C que están asociadas al endomorfismo f en las bases $\mathcal{BC}$ y $\mathcal{B}$ respectívamente. Para su cálculo utilizaremos que

$$B = AM^{-1} \ , \quad C = M^{-1}A \ ,$$

siendo M la matriz de cambio de base entre la base $\mathcal{B}$ y la base $\mathcal{BC}$. Como $v = (1, 2, 1)$, $u = (-1, 2, 0)$ y $w = (1, -1, 0)$, se tiene

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Calculando la matriz inversa de M se obtiene

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} .$$

Finalmente

$$B = AM^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} C &= M^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 10 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 12 & -3 & 6 \\ 12 & -6 & 9 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

8. *Se considera el endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en la base canónica es*

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Calcular la expresión explícita de $f(x, y, z, t)$.*

(b) *Probar que $f^2 = 2f$.*

(c) *Hallar* $\mathrm{Ker} f$ *y probar que* $\mathrm{Im} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ f(x, y, z, t) = 2(x, y, z, t)\}$.

Solución. **(a)** La expresión explícita de $f(x, y, z, t)$ viene dada por

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2z - 2t \\ -5x - 2z + 4t \\ -3x - z + 3t \\ x + z + t \end{pmatrix} ,$$

es decir, $f(x, y, z, t) = (4x + 2z - 2t, -5x - 2z + 4t, -3x - z + 3t, x + z + t)$.

(b) Puede hacerse de dos maneras distintas. La primera es directamente con la expresión explícita de $f(x, y, z, t)$ y la definición de composición.

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z,t) &= f(f(x,y,z,t)) \\ &= f(4x + 2z - 2t, -5x - 2z + 4t, -3x - z + 3t, x + z + t) \\ &= (8x + 4z - 4t, -10x - 4z + 8t, -6 - 2z + 6t, 2x + 2z + 2t) \\ &= 2f(x,y,z,t) \ . \end{aligned}$$

La segunda forma de resolver el problema es utilizando la expresión matricial de f como sigue

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z,t) &= (f \circ f)(x,y,z,t) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & -4 \\ -10 & 0 & -4 & 8 \\ -6 & 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+4z-4t \\ -10x-4z+8t \\ -6x-2z+6t \\ 2x+2z+2t \end{pmatrix} \\
&= 2f(x,y,z,t) \ .
\end{aligned}
$$

(c) El núcleo de la aplicación lineal f se define como $\mathrm{Ker}f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ f(x,y,z,t) = (0,0,0,0)\}$. De esta forma, las componentes (x,y,z,t) de los vectores de $\mathrm{Ker}f$ deben satisfacer el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$
\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .
$$

Dicho sistema es compatible indeterminado, siendo su solución $x = 2t$ y $z = -3t$. De esta forma, los vectores de $\mathrm{Ker}f$ son

$$
(x,y,z,t) = (2t, y, -3t, t) = t(2,0,-3,1) + y(0,1,0,0) \ ,
$$

o de forma equivalente $\mathrm{Ker}f =< (2,0,-3,1)(0,1,0,0) >$.

En primer lugar calculamos cual es la dimensión del subespacio vectorial $\mathrm{Im}f$.

$$
\dim \mathrm{Im}f = \dim\mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Ker}f = 4 - 2 = 2 \ .
$$

Como $\mathrm{Im}f$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ engendrado por la imagen dada por la aplicación f de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}f &= < f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) > \\
&= < (4,-5,-3,1), (0,0,0,0), (2,-2,-1,1), (-2,4,3,1) > \ ,
\end{aligned}
$$

donde el último paso proviene de las columnas de la matriz asociada al endomorfismo.

Definimos el conjunto $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ f(x,y,z,t) = 2(x,y,z,t)\}$. Hemos de probar que $\mathrm{Im}f = B$. Para ello, procedemos en dos pasos: (i) Ver que $\mathrm{Im}f \subset B$; (ii) Ver que $\dim \mathrm{Im}f = \dim B$. Notemos que B no es más que el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ para el endomorfismo f.

(i) Para demostrar que $\mathrm{Im}f \subset B$, basta con demostrar que todos los vectores de una base de Im pertenecen a B. En efecto, puesto que

$$
f(2,-2,-1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$f(-2,4,3,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(ii) Para demostrar que $\dim B = \dim \operatorname{Im} f = 2$ vamos a calcular una base de B. Los vectores $(x, y, z, t) \in B$ verifican

$$f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x + 2z - 2t \\ -5x - 2z + 4t \\ -3x - z + 3t \\ x + z + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2t \end{pmatrix} .$$

Por tanto, identificando las componentes de los dos últimos vectores se tiene que $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+z-t = 0, -5x-2y-2z+4t = 0\}$, es decir, $B = \{(2z - 2y, y, z, 3z - 2y) : z, y \in \mathbb{R}\} =< (2, 0, 1, 3), (-2, 1, 0, -2) >$ y por lo tanto $\dim B = 2$.

9. *Encontrar la matriz asociada en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifica:*

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_1 - v_2 \ , \\ \text{Ker } f &= \langle v_2 - v_3 \rangle \ , \\ v_1 + v_2 + v_3 &\in f^{-1}(v_1) \end{aligned}$$

Solución. Para hallar la matriz asociada a f en la base B basta con calcular la imagen dada por f de cada uno de los vectores que forman la base B, es decir, encontrar $f(v_1), f(v_2)$ y $f(v_3)$. Si Ker $f = \langle v_2 - v_3 \rangle$ entonces $f(v_2 - v_3) = 0$ y por la linealidad de f tenemos $f(v_2) - f(v_3) = 0$. Por otro lado $v_1 + v_2 + v_3 \in f^{-1}(v_1)$ implica que $f(v_1 + v_2 + v_3) = v_1$ y,

por la linealidad de f, se tiene $f(v_1)+f(v_2)+f(v_3)=v_1$. En definitiva se obtiene el siguiente sistema lineal para las incógnitas $f(v_1)$, $f(v_2)$ y $f(v_3)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(v_2)-f(v_3) & = & 0\ , \\ f(v_1)+f(v_2)+f(v_3) & = & v_1\ , \\ f(v_1) & = & v_1-v_2\ , \end{array}\right.$$

cuya solución es $f(v_1)=v_1-v_2$, $f(v_2)=f(v_3)=v_2/2$. Por lo tanto la matriz asociada a f en la base B es

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

10. *Sea $P_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios en la variable x a coeficientes reales de grado menor o igual que* 3*. Se define L como la aplicación de $P_3[x]$ en $P_3[x]$ tal que*

$$L(p(x))=x^2\frac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\frac{dp}{dx}(x)+2p(x)$$

(i) *Probar que L es lineal.*

(ii) *Encontrar la matriz de L en la base $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$.*

(iii) *Determinar el* Ker L.

Solución. **(i)** Para demostrar que L es lineal se ha de ver que para todo $p(x),q(x)\in P_3[x]$ y para todo $\lambda\in\mathbb{R}$, se verifica $L(p(x)+q(x))=L(p(x))+L(q(x))$ y $L(\lambda p(x))=\lambda L(p(x))$. Teniendo en cuenta las propiedades de la derivada.

$$\begin{array}{rcl} L(p(x)+q(x)) & = & x^2\dfrac{d^2(p+q)}{dx^2}(x)-2x\dfrac{d(p+q)}{dx}(x)+2(p+q)(x) \\ & = & x^2\dfrac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\dfrac{dp}{dx}(x)+2p(x) \\ & & +x^2\dfrac{d^2q}{dx^2}(x)-2x\dfrac{dq}{dx}(x)+2q(x) \\ & = & L(p(x))+L(q(x)). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L(\lambda p(x)) & = & x^2\dfrac{d^2(\lambda\ p)}{dx^2}(x)-2x\dfrac{d(\lambda\ p)}{dx}(x)+2(\lambda\ p)(x) \\ & = & \lambda\left[x^2\dfrac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\dfrac{dp}{dx}(x)+2p(x)\right]=\lambda L(p(x)). \end{array}$$

(ii) Para hallar la matriz de L en la base $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ de $P_3[x]$ basta con calcular la imagen dada por L de cada uno de los elementos de la base.

$$\begin{aligned} L(1) &= 2, \\ L(x) &= -2x + 2x = 0, \\ L(x^2) &= x^2(2) - 2x(2x) + 2x^2 = 0, \\ L(x^3) &= x^2(6x) - 2x(3x^2) + 2x^3 = 2x^3. \end{aligned}$$

De esta forma se tiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(iii) El núcleo de la aplicación lineal L se define como

$$\text{Ker } L = \{p(x) \in P_3[x] : L(p(x)) = 0\} .$$

Por lo tanto, según el apartado anterior, el polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \text{Ker } L$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solución de este sistema lineal homogéneo es $a = d = 0$, de manera que los polinomios que pertenecen al subespacio vectorial Ker L son de la forma $p(x) = bx + cx^2$. En otras palabras Ker $L =< x, x^2 >$, siendo su dimensión dim Ker $L = 2$.

11. *Justificar si la siguiente afirmación es cierta o falsa:*

    Se puede construir un aplicación lineal exhaustiva de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^4$.

    Solución. Si f fuera exhaustiva se tendría que $\text{Im} f = \mathbb{R}^4$, lo cual está en contradicción con que se deba verificar $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$, ya que entonces se tendría que el núcleo de f tiene dimensión negativa lo cual es imposible.

12. *Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Consideremos un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ que verifique las siguientes tres condiciones:* Ker $f =< e_1 + e_2 - e_3 >$, *$f(e_1 + e_2) = 3e_3$ y además $e_1 - e_2 \in f^{-1}(2e_1)$. Calcular una base del*

subespacio vectorial Im f*.*

Solución. Puesto que Ker $f =< e_1 + e_2 - e_3 >$, a partir de la definición de núcleo de una aplicación lineal, se tiene que $f(e_1 + e_2 - e_3) = 0$. Por otra parte, si $e_1 - e_2 \in f^{-1}(2e_1)$, a partir de la definición de antiimagen, se verifica $f(e_1 - e_2) = 2e_1$. En definitiva, teniendo en cuenta la otra relación del enunciado, se tiene

$$f(e_1 + e_2 - e_3) = 0 \ , \ f(e_1 + e_2) = 3e_3 \ , f(e_1 - e_2) = 2e_1 \ .$$

Notemos que las anteriores relaciones nos definen de manera única el subespacio vectorial Im f siempre y cuando el conjunto $\{e_1+e_2-e_3, e_1+e_2, e_1-e_2\}$ sea una base de $\mathbb{R}^3$. Esto será cierto si y sólo si dicho conjunto de vectores es linealmente independiente. Veamos a continuación que el conjunto de vectores $\{e_1 + e_2 - e_3, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ es linealmente independiente mostrando que el determinante cuyas columnas están formadas por las componentes de dichos vectores en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ es diferente de cero, es decir

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ .$$

Entonces, como $\{e_1+e_2-e_3, e_1+e_2, e_1-e_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, se concluye que

$$\text{Im } f =< f(e_1+e_2-e_3), f(e_1+e_2), f(e_1-e_2) >=< 0, 3e_3, 2e_1 >=< e_1, e_3 > \ .$$

En definitiva, $\{e_1, e_3\}$ es una base de Im f.

13. *Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por $f(2,1,0) = (4,2,2)$, $f(0,1,1) = (0,1,1)$ y $f(2,0,1) = (0,4,2)$. Encontrar la matriz de f en la base canónica y estudiar el núcleo y la imagen.*

Solución. Sean $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (2,0,1)$. En primer lugar notemos que el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente puesto que

$$\det\{v_1, v_2, v_3\} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \ .$$

Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Por otra parte, como $f(v_1) = (4,2,2)$, $f(v_2) = (0,1,1)$ y $f(v_3) = (0,4,2)$ se tiene que la matriz asociada al endomorfismo f en la base $\mathcal{B}$ del espacio de partida y la base canónica $\mathcal{BC}$ de $\mathbb{R}^3$ en el espacio de llegada es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

Además, la matriz del cambio de base entre la base $\mathcal{B}$ y la base $\mathcal{BC}$ es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Por el cambio de base en un endomorfismo, se tiene que la matriz B asociada al endomorfismo f en la base canónica $\mathcal{BC}$ tanto en partida como en llegada es

$$\begin{aligned} B &= AP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5/4 & -1/2 & 3/2 \\ 3/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que respecta al subespacio vectorial $\mathrm{Im} f$, como $\det B = -2 \neq 0$ o bien de forma equivalente $\det A \neq 0$, se tiene que el rango de B es 3 (y también el de A) y por lo tanto $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rangB} = 3$. En otras palabras $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Finalmente $\dim \mathrm{Ker} f = 3 -\ \dim \mathrm{Im} f = 3 - 3 = 0$, es decir el núcleo de f es el subespacio vectorial trivial que sólo contiene al elemento neutro $\mathrm{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

14. *Dada una base $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$, definimos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(u) = v$, $f(v) = w$, $f(w) = 0$. Encontrar la matriz asociada a f en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, siendo $e_1 = u$, $e_2 = u+v$, $e_3 = u+v+w$. Encontrar el* $\mathrm{Ker} f$ *y* $\mathrm{Im} f$*, dando la dimensión y una base. Calcular el menor número natural p tal que $f^p = 0$.*

Solución. Sean $B_1 = \{u, v, w\}$ y $B_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y llamemos A a la matriz de f asociada a la base B_1 y $\bar{A}$ a la matriz de f asociada a la base B_2. Por la linealidad de la aplicación, se tiene que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(u) = v = e_2 - e_2 \\ f(e_2) &= f(u+v) = v + w = e_3 - e_1 \\ f(e_3) &= f(u+v+w) = v + w = e_3 - e_1 \ . \end{aligned}$$

Por tanto la matriz de f en la base B_2 es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Otra forma de resolver el problema consiste en utilizar la teoría del cambio de base en un endomorfismo. La matriz de cambio de base que pasa de la base B_2 a la base B_1 es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que la matriz asociada a f en la base B_1 es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se puede obtener la matriz $\bar{A}$ asociada a f en la base B_2 realizando el calculo siguiente

$$\begin{aligned} \bar{A} = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Utilizando la matriz asociada a f en la base B_1, se tiene que para calcular el Ker$f$ hay que resolver el sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $x = y = 0$. Esto implica que

$$e \in \text{Ker} f \iff e = 0u + 0v + kw = (0, 0, k)\ ,\ k \in \mathbb{R}.$$

de lo que se deduce $\text{Ker} f = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid e = kw, k \in \mathbb{R}\} =< w >$, siendo $\dim \text{Ker} f = 1$.

Por otro lado, es fácil ver que $\text{Im} f =< v, w >$ y por tanto que $\dim \text{Im} f = 2$. Si procedemos al cálculo de las primeras potencias de la matriz asociada a f en la base B_1 tenemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se verifica

$$f^n(x, y, z) = (f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f)(x, y, z) = (0, 0, 0) \quad \forall n \geq 3\ .$$

Se concluye pues que $p = 3$.

15. *Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido de la forma $f(x,y,z) = (ax+y+z, x+ay+z, x+y+az)$. Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de manera que f tenga un núcleo de dimensión máxima. Calcular además para ese valor de a una base de* $\mathrm{Ker} f$.

Solución. En primer lugar calculamos la matriz A asociada a f en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Puesto que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (a,1,1) \ , \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,a,1) \ , \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (1,1,a) \ , \end{aligned}$$

se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} .$$

Por otra parte se sabe que $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Im} f = 3 - \mathrm{rang} A$. De esta ecuación se ve que $\dim \mathrm{Ker} f$ es máxima cuando $\mathrm{rang} A$ sea mínima. El problema pues se ha reducido a calcular el valor del parámetro a que minimize $\mathrm{rang} A$. Como

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2) \ ,$$

se tiene que si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces $\det A \neq 0$ y por lo tanto $\mathrm{rang} A = 3$. Si $a = -2$ entonces existen determinantes menores 2×2 no nulos y en consecuencia $\mathrm{rang} A = 2$. Finalmente, si $a = 1$ es obvio que $\mathrm{rang} A = 1$.

Otra forma de calcular el rango de A es mediante transformaciones elementales

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\mathrm{rang} A = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad a \neq 1, a \neq -2 \\ 2 & \text{si} \quad a = -2 \\ 1 & \text{si} \quad a = 1 \end{cases}$$

Se tiene en definitiva que si $a = 1$ entonces $\mathrm{rang} A$ es mínimo y $\dim \mathrm{Ker} f$ es máxima.

Calculemos a continuación una base de Ker$f$ cuando $a = 1$.

Sea $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}f$, es decir, $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ o bien en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solución del sistema lineal es $z = -x - y$ y por lo tanto los vectores de Ker$f$ son de la forma $(x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$. En definitiva se tiene $\mathrm{Ker}f =< (1, 0, -1), (0, 1, -1) >$ siendo $\dim \mathrm{Ker}f = 2$.

16. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal que verifica que $f(1, 1) = 3$ y $f(1, 0) = 4$. Encontrar el valor de $f(2, 1)$ y $f(x, y)$.*

Solución. Sean $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, 0)$. Como v_1 y v_2 no son proporcionales se tiene que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Puesto que $f(v_1) = 3$ y $f(v_2) = 4$, la matriz A asociada a f en la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ y en la base canónica de $\mathbb{R}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Sea P la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es decir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Definamos B como la matriz asociada a f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$. Entonces, por la teoría del cambio de base en una aplicación lineal, se tiene

$$B = AP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

Sea (x, y) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ cuyas componentes están en la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$f(x, y) = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y \end{pmatrix} .$$

En definitiva $f(x, y) = 4x - y$. En particular $f(2, 1) = 7$.

Existe una forma alternativa y más corta de resolver el problema que consiste en utilizar las propiedades de una aplicación lineal. En concreto

$$f(2, 1) = f((1, 1) + (1, 0)) = f(1, 1) + f(1, 0) = 3 + 4 = 7 .$$

Además, como $f(0, 1) = f((1, 1) - (1, 0)) = f(1, 1) - f(1, 0) = 3 - 4 = -1$ se tiene que

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + (1, 0)) = xf(1, 0) + yf(0, 1) = 4x - y .$$

17. *Considerar los endomorfismos de* $\mathbb{R}^3$ *de la forma* $f_r(x,y,z) = (2x+y+2z, x+y, x+2y+rz)$*. Encontrar el valor del parámetro* r *para el cual el rango de* f_r *sea mínimo. Para ese valor del parámentro* r*:*

    (a) Hallar $\mathrm{Ker}f$ *y* $\mathrm{Im}f$*.*

    (b) ¿Existe algún t *tal que* $(3,2,t) \in \mathrm{Ker}f$*?*

    (c) Encontrar la antiimagen del vector $(1,2,1)$*.*

Solución. En primer lugar calculamos la matriz A asociada a f en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Puesto que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (2,1,1)\ , \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,1,2)\ , \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (2,0,r)\ , \end{aligned}$$

se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & r \end{pmatrix} .$$

Puesto que $\mathrm{rang}f_r = \mathrm{rang}A$, para calcular el valor del parámetro r que minimize $\mathrm{rang}A$, calculamos

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & r \end{vmatrix} = r+2\ .$$

De donde se tiene que si $r \neq -2$ entonces $\det A \neq 0$ y por lo tanto $\mathrm{rang}A = 3$ y si $r = -2$ entonces existen determinantes menores 2×2 no nulos y en consecuencia $\mathrm{rang}A = 2$. Por tanto el rango mínimo se obtiene para $r = -2$.

(a) Calculemos a continuación el $\mathrm{Ker}f$ y una base del $\mathrm{Ker}f$ cuando $r = -2$.

Sea $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}f$, es decir, $f(x,y,z) = (0,0,0)$ o bien en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solución del sistema lineal es $y = -x$ y $z = -x/2$ y por lo tanto los vectores de $\mathrm{Ker}f$ son de la forma $(x, -x, -x/2) = x(1,-1,-1/2)$. En definitiva se tiene $\mathrm{Ker}f = <(1,-1,-1/2)>$ siendo $\dim \mathrm{Ker}f = 1$.

Para hallar $\mathrm{Im}f$ debemos encontrar la relación que verifica un vector arbitrario (a,b,c) que pertenezca a la imagen de f, es decir, $f(x,y,z) =$

(a, b, c), se tiene pues que

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= a\ , \\ x + y &= b\ , \\ x + 2y - 2z &= c\ . \end{aligned}$$

De la segunda ecuación aislamos $x = b - y$ y sustituimos esta relación en las otras ecuaciones, obteniendo

$$\begin{aligned} 2b - y + 2z &= a\ , \\ b + y - 2z &= c\ . \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos las condición $3b = a + c$. De donde $\mathrm{Im}f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + c - 3b = 0\} = \{(3b - c, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$. Por tanto $\mathrm{Im}f =< (3, 1, 0), (-1, 0, 1) >$ y dim $\mathrm{Im}f = 2$.

Otra forma de calcular $\mathrm{Im}f$ es teniendo en cuenta que el rang$A = 2$ para $r = -2$ y por tanto se tiene que dim $\mathrm{Im}f = 2$. Además una base de $\mathrm{Im}f$ es, por ejemplo, la imagen de los dos primeros vectores de la base canónica, es decir $\mathrm{Im}f =< (2, 1, 1), (1, 1, 2) >$.

(b) Puede comprobarse fácilmente que el vector $(3, 2, t)$ no pertenece a $\mathrm{Ker}f$ ya que no es proporcional para ningún $t \in \mathbb{R}$ al vector generador de $\mathrm{Ker}f$ que es el vector $(1, -1, -1/2)$.

(c) Para hallar la antiimagen de vector $(1, 2, 1)$ hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 1\ , \\ x + y &= 2\ , \\ x + 2y - 2z &= 1\ . \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se obtiene $x = 2 - y$ cuya sustitución en las otras ecuaciones nos da

$$\begin{aligned} 4 - y + 2z &= 1\ , \\ 2 + y - 2z &= 1\ . \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones puede uno ver que este sistema es incompatible y por tanto el vector $(1, 2, 1)$ no tiene antiimagen.

Otra forma de ver que el vector $v = (1, 2, 1)$ no tiene antiimagen es ver que este vector $v \notin \mathrm{Im}f$. Como hemos visto anteriormente un vector arbitrario (a, b, c) pertenece a $\mathrm{Im}f$ si y sólo si $a + c - 3b = 0$. Es fácil ver que dicha

relación no es verificada por el vector $(1,2,1)$.

NOTA: Observar que en este caso no puede utilizase que la antiimagen del vector es $A^{-1}v$, donde $v=(1,2,1)$, puesto que no existe la matriz A^{-1} ya que el rangf_{-2} no es máximo y f no es biyectiva.

18. *Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y)=(x-y,-y,-x+y)$ y $g(x,y,z)=(x+z,y)$. Encontrar las matrices de $f\circ g$ y $g\circ f$ en las bases canónicas.*

Solución. Puede procederse de dos formas distintas. La primera es directamente con las expresiones explícitas de f y g obtenidas a partir de la definición de composición.

$$(f\circ g)(x,y,z)=f(g(x,y,z))=f(x+z,y)=(x+z-y,-y,-x-z+y)\ ,$$

$$(g\circ f)(x,y)=g(f(x,y))=g(x-y,-y,x+y)=(0,-y)\ .$$

Las imágenes dadas por dichas aplicaciones de los vectores de la base canónica son

$$\begin{array}{rcl}(f\circ g)(1,0,0)&=&(1,0,-1),\\(f\circ g)(0,1,0)&=&(-1,-1,1),\\(f\circ g)(0,0,1)&=&(1,0,-1),\end{array}\qquad\begin{array}{rcl}(g\circ f)(1,0)&=&(0,0),\\(g\circ f)(0,1)&=&(0,-1),\end{array}$$

de manera que las matrices de las aplicaciones $f\circ g$ y $g\circ f$ en las bases canónicas son

$$M_{f\circ g}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix},\qquad M_{g\circ f}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

La segunda forma de resolver el problema es utilizando la expresión matricial de las aplicaciones f y g en las bases canónicas

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x,y,z)&=f(g(x,y,z))=\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.\\(g\circ f)(x,y)&=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

19. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *el endomorfismo definido por*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, y + z, -x + y + 2z).$$

(a) *Encontrar la matriz de* f *en la base canónica y estudiar el núcleo y la imagen.*

(b) *Hallar* $f^{-1}(2, 1, 1)$.

(c) *¿Es un subespacio vectorial la imagen del conjunto de vectores que poseen* $x = 0$*? En caso afirmativo, hallar una base de dicho espacio.*

(d) *Si* S *es un subespacio complementario de* $\mathrm{Im}\, f$*, ¿quién es* $f^{-1}(S)$*?*

Solución. **(a)** Dado que la imagen por la aplicación lineal f de los vectores de base canónica son

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (1,0,-1), \\ f(0,1,0) & = & (2,1,1), \\ f(0,0,1) & = & (1,1,2), \end{array}$$

la matriz A asociada a f en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El núcleo de la aplicación lineal f se define como $\mathrm{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$. Por lo tanto, las componentes de los vectores de $\mathrm{Ker} f$ deben satisfacer el siguiente sistema lineal homogéneo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de dicho sistema es $x = z$ e $y = -z$. De esta forma, el núcleo de f es $\mathrm{Ker} f = \{(z, -z, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in \mathbb{R}\} =< (1, -1, 1) >$ de donde la $\mathrm{dimKer} f = 1$. Por tanto, la dimensión del subespacio vectorial $\mathrm{Im} f$ es $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\mathrm{Ker} f) = 3 - 1 = 2$. Como $\mathrm{Im} f$ es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ engendrado por la imagen dada por f de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se obtiene que

$$\mathrm{Im} f =< (1, 0, -1), (2, 1, 1), (1, 1, 2) > .$$

Mediante transformaciones elementales puede verse que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto Im$f =< (1,0,-1),(0,1,3) >$.

(b) Para encontrar los vectores $(x,y,z) \in f^{-1}(2,1,1)$ hay que resolver el siguiente sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Este es un sistema compatible indeterminado cuya solución es $x = z$ e $y = 1 - z$. Por tanto $f^{-1}(2,1,1) = \{(z, 1-z, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,1),(0,1,0) >$.

(c) Es fácil ver que el conjunto P de vectores de $\mathbb{R}^3$ que poseen primera componente nula, es decir, $P = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z,y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Entonces, la imagen $f(P)$ de este subespacio vectorial dada por la aplicación lineal f es también un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Teniendo en cuenta que $f(0,y,z) = (2y+z, y+z, -y+2z)$ entonces $f(P) = \{(2y+z, y+z, -y+2z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z,y \in \mathbb{R}\} =< (2,1,1),(1,1,2) >$.

(d) Si S es el subespacio complementario de Imf entonces $\mathbb{R}^3 = S \oplus \mathrm{Im}f$ y por lo tanto $S \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$. De donde $f^{-1}(S) = f^{-1}(0) = \mathrm{Ker}f$.

20. *Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por $f(x,y,z,t) = (x+z-t,\ 2x+y-z+2t,\ 3x+y+mt)$.*

    (a) *Estudiar* Ker$f$ *y* Imf *según los valores de m.*

    (b) *Encontrar $f^{-1}(a,4,5)$ para el valor de m que hace mínimo el rango de f, según los diferentes valores de a.*

Solución. **(a)** Como Imf es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ engendrado por la imagen dada por la aplicación f de los vectores de la bade canónica de $\mathbb{R}^4$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}f &= < f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) > \\ &= < (1,2,3),(0,1,1),(1,-1,0),(-1,2,m) > . \end{aligned}$$

Para encontrar dim(Imf), calculamos el rango de la siguiente matriz mediante transformaciones elementales por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & m+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

De donde se sigue que

$$\dim(\text{Im}f) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad m \neq 1\ , \\ 2 & \text{si} \quad m = 1\ . \end{cases}$$

Por tanto una base de la imagen de f es $\text{Im}f =< (1,2,3),(0,1,1) >$ si $m = 1$ y $\text{Im}f =< (1,2,3),(0,1,1),(0,0,m-1) >$ si $m \neq 1$. Por otra parte $\dim(\text{Ker}f) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\text{Im}f)$, de lo que se deduce que

$$\dim(\text{Ker}f) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m \neq 1\ , \\ 2 & \text{si} \quad m = 1\ . \end{cases}$$

Para encontrar una base de núcleo de f procedemos de la siguiente forma. Sea $v = (x,y,z,t) \in \text{Ker}f$, es decir $f(x,y,z,t) = (0,0,0)$. Entonces, por la definición de f, se tiene

$$(x+z-t, /2x+y-z+2t, /3x+y+mt) = (0,0,0)\ ,$$

que, escrito en forma matricial, da lugar al siguiente sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.1}$$

- Si $m = 1$, el sistema lineal anterior es compatible indeterminado y toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

  siendo su solución $x = -z+t$, $y = 3z-4t$. Por lo tanto $v \in \text{Ker}f$ si $v = (-z+t, 3z-4t, z, t)$, es decir, $\text{Ker}f =< (-1,3,1,0),(1,-4,0,1) >$.
- Si $m \neq 1$, entonces el sistema lineal (3.1) es compatible e indeterminado y su solución viene dada por $x = -z$, $y = 3z$ y $t = 0$. Por lo tanto $v \in \text{Ker}f$ si $v = (-z, 3z, z, 0)$, es decir, $\text{Ker}f =< (-1,3,1,0) >$.

(b) El valor de m que hace mínimo el rango de f, es decir, que hace mínima la dimensión de la imagen de f es $m = 1$. Por tanto para encontrar $(x,y,z,t) = f^{-1}(a,4,5)$ según los diferentes valores de a, hay que plantear el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\ ,$$

De la primera ecuación se puede aislar x y nos queda $x = a - z + t$, que sustituyendo en las otras ecuaciones nos dan $2a - 3z + y + 4t = 4$ y $3a - 3z + y + 4t = 5$. Compatibilizando ambas ecuaciones obtenemos $a = 1$. Otra forma de ver que $a = 1$ es considerar que el vector $(a, 4, 5)$ pertenece a la imagen de f y por tanto $(a, 4, 5) = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, 1, 1)$, de los que se deduce $a = \lambda_1$, $4 = 2\lambda_1 + \lambda_2$ y $5 = 3\lambda_1 + \lambda_2$. Compatibilizando dichas ecuaciones se obtiene que $a = 1$. Consecuentemente $f^{-1}(a, 4, 5) = (1 - z + t, 2 + 3z - 4t, z, t)$ si $a = 1$ y si $a \neq 1$ se tiene que $f^{-1}(a, 4, 5)$ no existe.

21. *¿Se puede obtener una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifique $f(1, -1) = (1, 0)$, $f(2, -1) = (0, 1)$ y $f(-3, 2) = (1, 1)$?*

Solución. Observemos que el conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{(1, -1), (2, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Puesto que $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ y verifica $f(1, -1) = (1, 0)$ y $f(2, -1) = (0, 1)$, la matriz A asociada a f en la base $\mathcal{B}$ en partida y la base canónica de $\mathbb{R}^2$ en llegada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \ .$$

Veamos si esta aplicación f puede verificar la última condición, es decir, $f(-3, 2) = (1, 1)$. Para verlo, calcularemos $f(-3, 2)$. Para ello es necesario conocer la matriz B asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es decir, $B = P^{-1}A$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

la matriz del cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Se tiene pues que

$$B = P^{-1}A = P^{-1}I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

En definitiva obtenemos que

$$f(-3, 2) = B \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

por lo tanto no puede existir tal aplicación f.

22. *Considerar el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por*

$$f(x, y, z) = ((m-2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z) \ .$$

Calcular una base del núcleo y la imagen de f en función del parámetro real m.

Solución. Sea $v = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}f$, es decir $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Entonces, por la definición de f se tiene

$$((m-2)x+2y-z, 2x+my+2z, 2mx+2(m+1)y+(m+1)z) = (0,0,0) \ ,$$

que, escrito en forma matricial, da lugar al siguiente sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (3.2)$$

El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es

$$\begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-2) \ ,$$

de lo que se deduce la siguiente discusión:

- Si $m(m-1)(m-2) \neq 0$, entonces el sistema lineal (3.2) es compatible y determinado. Puesto que también es homogéneo, su única solución es la trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Por lo tanto $\mathrm{Ker}f = \{(0, 0, 0)\}$. Como además $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\mathrm{Im}f)$ y $\mathrm{Im}f \subset \mathbb{R}^3$ se tiene que $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3$.
- Si $m = 0$, el sistema lineal (3.2) es compatible indeterminado y queda de la forma
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
siendo su solución $x = -z$, $y = -z/2$. Por lo tanto $v \in rmKerf$ si $v = (-z, -z/2, z)$, es decir, $\mathrm{Ker}f =< (2, 1, -2) >$. Como $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(\mathrm{Im}f) = 1 + \dim(\mathrm{Im}f)$, concluimos que $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$. Calculemos a continuación una base de $\mathrm{Im}f$. $\mathrm{Im}f =< f(1, 0, 0), f(0, 1, 0),\ f(0, 0, 1) > =< (-2, 2, 0), (2, 0, 2), (-1, 2, 1) >$. Por lo tanto una base de $\mathrm{Im}f$ es $\{(2, 0, 2), (-1, 2, 1)\}$.
- Si $m = 1$, el sistema lineal (3.2) es compatible indeterminado, siendo éste
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
siendo su solución $x = -z$, $y = 0$. Por lo tanto $v \in \mathrm{Ker}f$ si $v = (-z, 0, z)$, es decir, $\mathrm{Ker}f =< (-1, 0, 1) >$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(\mathrm{Im}f) = 1+\dim(\mathrm{Im}f)$, concluimos que $\dim(\mathrm{Im}f) = 2$. Además, $\mathrm{Im}f = < f(1, 0, 0),\ f(0, 1, 0), f(0, 0, 1) > = < (-1, 2, 2), (2, 1, 4), (-1, 2, 2) >$. Por lo tanto una base de $\mathrm{Im}f$ es $\{(-1, 2, 2), (2, 1, 4)\}$.

- Si $m = 2$, el sistema lineal (3.2) es compatible indeterminado, siendo éste
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
siendo su solución $y = z/2$, $x = -3z/2$. Por lo tanto $v \in \text{Ker}f$ si $v = (-3z/2, z/2, z)$, es decir, $\text{Ker}f =< (-3, 1, 2) >$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{Im}f) = 1 + \dim(\text{Im}f)$, concluimos que $\dim(\text{Im}f) = 2$. Además, $\text{Im}f \; = < f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1) > = < (0,2,4), (2,2,6), (-1,2,3) >$. Por lo tanto una base de $\text{Im}f$ es $\{(0,1,2),(1,1,3)\}$.

23. *Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 a coeficientes reales. Se sabe que la matriz A asociada a un endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ en una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ viene dada por*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$
siendo $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ con $p_1 = 3x + 3x^2$, $p_2 = -1 + 3x + 2x^2$ y $p_3 = 3 + 7x + 2x^2$. Hallar la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y calcular la imagen dada por f del polinomio $q = 1 + x^2$.

Solución. La matriz B asociada al endomorfismo f en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ viene dada por $B = PAP^{-1}$, siendo P la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por $\{1, x, x^2\}$. Puesto que las componentes de los polinomios p_1, p_2 y p_3 en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ son $p_1 = (0, 3, 3)$, $p_2 = (-1, 3, 2)$ y $p_3 = (3, 7, 2)$, la matriz P es
$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
siendo su inversa
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/8 & 3/8 & -3/8 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}.$$
Finalmente
$$\begin{aligned} B &= PAP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/8 & 3/8 & -3/8 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 239/24 & -161/24 & 289/24 \\ 201/8 & -111/8 & 247/8 \\ 61/12 & -31/12 & 107/12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La imagen dada por f del polinomio $q = 1 + x^2$ será

$$\begin{aligned} f(1+x^2) &= B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 239/24 & -161/24 & 289/24 \\ 201/8 & -111/8 & 247/8 \\ 61/12 & -31/12 & 107/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 \\ 56 \\ 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$.

Capítulo 4

Diagonalización de Endomorfismos

4.1. Resumen de teoría

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define su *polinomio característico* de la forma $Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, siendo I_n la matriz identidad de orden n. Se tiene siempre que $\mathrm{gr}(Q_A) = n$.

Proposición 6 *Si A y B son semejantes, entonces $Q_A(\lambda) = Q_B(\lambda)$.*

Esta proposición nos pemite definir el *polinomio característico de un endomorfismo* como el polinomio característico de cualquiera de sus matrices asociadas.

Polinomio de Matrices: Dado un polinomio $p(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i$ con coeficientes reales y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define $p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$.

Teorema 6 (Cayley-Hamilton) *Toda matriz cuadrada A verifica $Q_A(A) = 0$.*

Valores y Vectores Propios: Sea $f \in \mathrm{End}(E)$. Diremos que un vector $v \neq 0$ es *vector propio* de f con *valor propio* asociado $\lambda \in \mathbb{R}$ si $f(v) = \lambda v$.

Proposición 7 *Si λ es un valor propio del endomorfismo f entonces λ es una raíz del polinomio característico asociado a f.*

Dado un endomorfismo f con valor propio λ, se define el *subespacio propio* V_λ asociado a él como $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda I)$. A la $\dim V_\lambda$ se la llama *multiplicidad geométrica* de λ, mientras que la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico se llama *multiplicidad algebraica*.

Proposición 8 *Sea $f \in \mathrm{End}(E)$ y λ un valor propio de f. Entonces $1 \leq \dim V_\lambda \leq m$, siendo m su multiplicidad algebraica.*

Diremos que $f \in \mathrm{End}(E)$ diagonaliza cuando exista una base de E formada por vectores propios de f. En esa base, la matriz D asociada a f toma la forma $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ siendo los λ_i valores propios de f (diferentes o repetidos). Obsérvese que si f diagonaliza entonces existe una matriz inversible P tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal, siendo A la matriz asociada a f en cualquier base de E.

Teorema 7 (de Diagonalización) *Sea $f \in \mathrm{End}(E)$ y m_i la multiplicidad algebraica de cada valor propio λ_i. Entonces f diagonaliza si y sólo si (i) $Q_f(\lambda)$ descompone totalmente (es decir se puede expresar como producto de polinomios reales de grado 1); (ii) $\mathrm{dim}V_{\lambda_i} = m_i$ para todo i.*

Corolario 1 *Dado $f \in \mathrm{End}(E)$, si $Q_f(\lambda)$ descompone totalmente y todos los valores propios son simples entonces f es diagonalizable.*

Aplicaciones de la Diagonalización:

Potencias de Matrices: Si $A \in \mathcal{M}_n$ diagonaliza, entonces existe $P \in \mathcal{M}_n$ no singular tal que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Entonces $A^m = PD^mP^{-1}$ con $D^m = \mathrm{diag}\{\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m\}$.

Sucesiones Recurrentes: Queremos hallar el término general de las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que verifiquen la *ecuación en diferencias finitas lineal de orden r* siguiente $x_{n+r} = a_{r-1}x_{n+r-1} + \cdots a_1x_{n+1} + a_0x_n + f(n)$, siendo $a_i \in \mathbb{R}$ y donde los primeros términos $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$ son dados. Si $f(n) \equiv 0$ se dice que la ecuación es *homogénea.* En este caso, podemos escribir dicha ecuación en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_{n+r} \\ x_{n+r-1} \\ x_{n+r-2} \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+r-1} \\ x_{n+r-2} \\ x_{n+r-3} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se verificará $\begin{pmatrix} x_{n+r} & \cdots & x_{n+1} \end{pmatrix}^t = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_{r-1} & \cdots & x_0 \end{pmatrix}^t$.

Teorema 8 *La solución general x_n de la ecuación en diferencias lineal no homogénea es la suma de una solución particular $x_n^{(p)}$ y la solución general $x_n^{(h)}$ de la ecuación homogénea asociada.*

Algunos Criterios Parciales Para Hallar $x_n^{(p)}$: (i) Sea $f(n) = aR^n$ con $a, R \in \mathbb{R}$. Sea m la multiplicidad de R mirada como raíz de $Q_A(\lambda)$ (puede ser $m = 0$). Entonces se ensaya $x_n^{(p)} = bn^mR^n$. (ii) Sea $f(n) \in \mathbb{R}_k[n]$ y 1 raíz de $Q_A(\lambda)$ con multiplicidad m (puede ser $m = 0$). Entonces se ensaya $x_n^{(p)} = n^mP(n)$ siendo $P(n) \in \mathbb{R}_k[n]$.

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden: Consideremos el sistema diferencial $\dot{y} = Ay + f(t)$, donde $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^t$, $\dot{y} = (\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)^t$, $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^t$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $f(t) \equiv 0$ entonces dicha ecuación se llama *homogénea.* En este caso, si la matriz A diagonaliza, existe un cambio lineal de coordenadas $y \to z = P^{-1}y$ tal que *desacopla* el sistema y lo transforma en $\dot{z} = Dz$ siendo $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Entonces $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$ con $i = 1, \ldots, n$ siendo su solución $z_i(t) = c_i \exp(\lambda_i t)$.

Teorema 9 *La solución general $y(t)$ del sistema diferencial lineal no homogéneo es la suma de una solución particular $y^{(p)}(t)$ y la solución general $y^{(h)}(t)$ de la ecuación homogénea asociada.*

Método de Variación de Constantes: Si la solución general de la ecuación homogénea es $y^{(h)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(i)}(t)$ donde las c_i son constantes arbitrarias, se ensaya una solución particular $y^{(p)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y^{(i)}(t)$ y se obtiene $y^{(p)}(t) = B(t)\int B^{-1}(t)f(t)\,dt$, siendo $B \in \mathcal{M}_n$ la *matriz fundamental* definida como $B(t) = \mathrm{col}\{y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n)}(t)\}$.

4.2. Problemas propuestos

4.2.1. Polinomios de matrices

1. *Dado $p(x) = 3x^2 - 2x + 2$, calcular $p(A)$, donde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Determinar el polinomio característico de la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Comprobar que se satisface el Teorema de Cayley-Hamilton.*

3. *Encontrar el polinomio característico del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, en una base $\{u_1, u_2, u_3\}$, por $f(u_1) = u_1 - u_2 - u_3$, $f(u_2) = -u_3$, $f(u_3) = -u_2$.*

4. *Encontrar el polinomio característico de f, f^2, f^3, donde $f(x, y, z) = (0, x, y)$.*

4.2.2. Valores y vectores propios

1. *Un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tiene los vectores propios $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 0, 1)$ con valores propios asociados 1, 1 y -1 respectivamente. Encontrar la matriz de f respecto de la base canónica.*

2. *Sea v un vector propio de los endomorfismos f y g de un cierto espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Demostrar que v es también un vector propio del endomorfismo $af + bg$ para cualquier $a, b \in \mathbb{K}$.*

3. *Sea el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$f(x, y, z) = (x - 4y, -4x + y, -4x - 4y + z) \ .$$

   a) *Demostrar que* 0 *no es valor propio de* f *y deducir que* f *es biyectiva.*

   b) *Considerar los vectores* $v_1 = 2e_1$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$, *donde* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^3$. *Encontrar la matriz de* f *en esta base* $\{v_1, v_2, v_3\}$.

   c) *Deducir si existe una base de* $\mathbb{R}^3$ *de vectores propios de* f.

4. *Sea* E *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y* $f : E \longrightarrow E$ *un endomorfismo.*

   a) *Demostrar que si la dimensión de* E *es impar entonces* f *tiene al menos un valor propio.*

   b) *Dar un ejemplo donde la dimensión del espacio vectorial* E *sea par y* f *no tenga valores propios.*

   c) *Probar que si la dimensión de* E *es par y* $\det A < 0$, *donde* A *es la matriz asociada al endomorfismo* f *en una cierta base, entonces* f *tiene al menos dos valores propios distintos.*

5. *Los valores propios de una matriz de orden* 3 *son* 1 *y* -1. *Encontrar los posibles polinomios característicos de esta matriz. Comprobar que en cualquier caso se trata de una matriz inversible.*

6. *Sea* $f : E \longrightarrow E$ *y* $g : E \longrightarrow E$ *dos endomorfismos. Sabemos que sus polinomios característicos son* $Q_f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$ *y* $Q_g(\lambda) = \lambda^4 - 1$.

   a) *¿Cuáles son las dimensiones de* E *y* F*?*

   b) *¿Son inversibles dichos endomorfismos?*

   c) *¿Se puede encontrar la matriz de* f *y/o de* g *en alguna base?*

7. *Sea* E *un espacio vectorial y* f *un endomorfismo de* E. *Sean* $\{v_1, v_2, v_3\} \subset E$, *tres vectores linealmente independientes tales que el primero pertenece al núcleo de* f *y el segundo y el tercero son vectores propios del mismo valor propio* $\lambda \neq 0$.

   a) *¿Es el* 0 *valor propio de* f*?*

   b) *Demostrar que el vector* $v_2 + v_3$ *es también vector propio.*

   c) *Calcular la imagen del vector* $v_1 + v_2$. *¿Es éste vector propio ?*

   d) *¿Es posible que* v_2 *pertenezca al núcleo de* f*?*

   e) *¿Se puede dar la matriz de* f *en alguna base?*

4.2.3. Endomorfismos diagonalizables

1. *Encontrar los vectores y valores propios del endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *que tiene la matriz asociada*
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
¿ Es diagonalizable dicho endomorfismo ?

2. *Estudiar la diagonalización de los endomorfismos de* $\mathbb{R}^3$ *que en la base canónica tienen las siguientes matrices asociadas:*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. *Estudiar qué endomorfismos son diagonalizables y, en caso de que lo sean, dar una base en la cual diagonalizan*

   a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2y, 2z);$

   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (2x - y, 9x - 8y);$

   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (3x, x + 3y, x + y + 4z);$

4. *Estudiar la diagonalización de los endomorfismos de* $\mathbb{R}^4$ *que en la base canónica tienen las siguientes matrices asociadas*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

5. *Considerar el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *la matriz del cual en cierta base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *es*
$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 24 \\ -4 & -8 & -24 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) *Probar que los vectores* $v_1 = 4e_1 - 4e_2 + e_3$ *y* $v_2 = 4e_2 - e_3$ *son vectores propios y encontrar los valores propios asociados.*

   b) *Encontrar otro vector propio sabiendo que su valor propio es* -4.

   c) *Expresar la matriz del endomorfismo en la base* $\{v_1, v_2, v_3\}$.

6. *Sea f el endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ que en la base canónica tiene matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) *Calcular la dimensión de* $\mathrm{Ker} f$.
   b) *Demostrar que f tiene un valor propio real que no depende de a. Encontrar los valores propios de f.*
   c) *Estudiar los valores de a para los cuales existen valores propios múltiples y los casos en que f es diagonalizable.*

7. *Considerar el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con la siguiente matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} -a & 1 & -a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   a) *Probar que para $a = 2$, f es diagonalizable y dar una base en la cual diagonaliza.*
   b) *Razonar por qué para $a = -1$, f no es diagonalizable.*

8. *Estudiar según los valores del parámetro a la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica tiene la matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-a & -1+a & -1+a \\ 2 & 2+a & 2-a & 2-a \\ 1 & 1 & 3-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. *Determinar el valor de a para el cual la matriz siguiente es diagonalizable.*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. *Determinar según los valores de los parámetros a y b, los valores y subespacios propios del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene como matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. *Discutir la diagonalización de la matriz A según los valores de los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. *Decidir si la matriz siguiente diagonaliza sobre $\mathbb{R}$ o bien sobre $\mathbb{C}$.*

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 7 & 1 \\ 5 & -3 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. *Sea a un nombre real y A la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & -2a & 0 \end{pmatrix}$.

    a) *¿Para qué valores de a es diagonalizable el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene asociada la matriz A en la base canónica?*

    b) *¿Para qué valores de a es diagonalizable el endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ que tiene asociada la matriz A en la base canónica?*

    c) *Sea $a \neq 0$, calcular una base de $\mathbb{C}^3$ en la cual la matriz asociada a f sea diagonal.*

4.2.4. Aplicaciones: Potencia de una matriz

1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calcular A^{2000}.*

2. *Calcular la potencia n-ésima de la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. *Sea A la matriz* $\begin{pmatrix} 24 & -14 & -16 \\ 10 & -3 & -8 \\ 10 & -4 & -7 \end{pmatrix}$. *Encontrar la matriz B tal que $A = B^2$.*

4. *Para una matriz cuadrada A se define* $\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. *Calcular e^A, es decir, la exponencial de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Indicación: Recordar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

5. *Sea f un endomorfismo del espacio vectorial E, A su matriz asociada en cierta base y $Q_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ su polinomio característico.*

a) *¿Cuál es la dimensión de E?*

b) *¿Es f diagonalizable? En caso afirmativo, ¿cómo es su matriz diagonal?*

c) *Comprobar que se verifica el Teorema de Cayley-Hamilton.*

d) *Como aplicación de la comprobación anterior, calcular A^4 y A^{-1}.*

4.2.5. Aplicaciones: Sucesiones recurrentes y ecuaciones en diferencias finitas

1. *Hallar todas las sucesiones que verifican $y_{n+2} - 2y_{n+1} = y_n$.*

2. *Hallar en cada caso la sucesión que verifica la recurrencia dada con las correspondientes condiciones iniciales.*

   a) $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n, \quad y_0 = y_1 = 1.$

   b) $y_{n+3} - y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0, \quad y_0 = 1,\ y_1 = -2,\ y_2 = -3.$

   c) $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 6y_n = 0, \quad y_0 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = -1.$

3. *Hallar la solución general de la ecuación en diferencias finitas $\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_n + 12\Delta y_n$, donde $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$.*

4. *Consideremos la sucesión recurrente $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Hallar a_n para todo $n \geq 2$.*

5. *Resolver:*

   a) $y_{n+2} - y_n = 5 \cdot 2^n.$

   b) $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 3n^2 + \frac{29}{24}.$

4.2.6. Aplicaciones: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

1. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 4x - 6y, \\ \dot{y} & = & x - y. \end{array} \right.$$

2. *Estudiar si se puede resolver el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente utilizando las técnicas de diagonalización*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. *Estudiar si se puede resolver el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente utilizando las técnicas de diagonalización buscando soluciones en* $\mathbb{R}^3$ *y en* $\mathbb{C}^3$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 \\ 5 & -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

4. *Encontrar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo*

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x + y - \sin t, \\ \dot{y} &= -3x - 2y + \cos t. \end{cases}$$

que cumple las condiciones iniciales $x(0) = 0$ *e* $y(0) = 3$.

4.3. Problemas resueltos

1. *Comprobar que se verifica el Teorema de Cayley-Hamilton para la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calcular* A^4 *y* A^{-1} *como combinación lineal de la matriz* A *y de la matriz identidad.*

Solución. Sea I_2 la matriz identidad 2×2. El polinomio característico asociado a la matriz A es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3 \ .$$

Calculando este polinomio para la matriz A se obtiene $Q_A(A) =$

$$A^2 - 2A + 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de manera que queda verificado para este caso particular el Teorema de Cayley-Hamilton, es decir $Q_A(A) = A^2 - 2A + 3I_2 = O$. A partir de esta igualdad se tiene lo siguiente:

- $A^2 = 2A - 3I_2$, de lo que se deduce $A^4 = A^2A^2 = (2A - 3I_2)(2A - 3I_2) = 4A^2 - 12A + 9I_2$. Finalmente, utilizando de nuevo la expresión de A^2 dada a partir del Teorema de Cayley-Hamilton se obtiene

$$A^4 = 4(2A - 3I_2) - 12A + 9I_2 = -4A - 3I_2 \ .$$

- Por definición de matriz inversa se tiene $I_2 = AA^{-1}$, de manera que $A^2 = 2A - 3I_2$ se puede reescribir de la forma $A^2 = 2A - 3AA^{-1} = A(2I_2 - 3A^{-1})$. De esta última igualdad se tiene $A = 2I_2 - 3A^{-1}$ de la cual podemos despejar $A^{-1} = \frac{1}{3}(2I_2 - A)$.

2. *Hallar la solución general de la ecuación en recurrencias dada por* $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n + 1$.

Solución. En primer lugar se obtendrá la solución general de la ecuación recurrente de segundo orden homogénea asociada $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para conseguirlo escribimos dicha ecuación en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} , \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

De esta forma se tiene

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} , \cdots$$

y en general, por inducción, obtenemos

$$\begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

Sólo falta hallar la potencia $n+1$ de la matriz A. Dicha potencia será calculada con las técnicas de diagonalización.

El polinomio característico de la matriz A

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) ,$$

descompone totalmente y además sus valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ son simples, es decir tienen multiplicidad algebraica 1. De aquí se deduce que la matriz A diagonaliza y por lo tanto existe una matriz $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no singular tal que $D = P^{-1}AP$ es de la forma $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Despejando la matriz A de la anterior igualdad obtenemos $A = PDP^{-1}$ y de aquí se deduce que

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1} , \quad \text{donde } D^{n+1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{n+1}, \lambda_2^{n+1}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} .$$

Los elementos de la matriz P son las componentes en columnas de los vectores propios asociados a cada valor propio colocados en el mismo orden que los valores propios en la matriz D. Su cálculo es el siguiente.

- Sea $v_1 = (x, y) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$. Se tiene pues, por definición de nucleo, que $(A - I_2)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cuya solución es $x = y$. De esta forma $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$.

- Sea $v_2 = (x, y) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, es decir $(A - 2I_2)v_2 = 0$. En forma matricial esta ecuación se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cuya solución es $x = 2y$. Por lo tanto $v_2 = (2y, y) = y(2, 1)$.

Se concluye que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+2} & 2(1 - 2^{n+1}) \\ -1 + 2^{n+1} & 2(1 - 2^{n}) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es $y^h_{n+2} = [-1 + 2^{n+2}]y_1 + [2(1 - 2^{n+1})]y_0$, o de forma equivalente

$$y^h_n = [-1 + 2^n]y_1 + [2(1 - 2^{n-1})]y_0 = (y_0 - y_1) + (y_1 - y_0)2^n .$$

En segundo lugar se procede al cálculo de una solución particular de la ecuación en diferencias finitas completa $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + n + 1$. Puesto que el término no homogéneo $f(n) = n + 1 \in \mathbb{R}_1[n]$ es un polinomio en la variable n de primer grado y además 1 es raíz del polinomio característico $Q_A(\lambda)$ con multiplicidad $m = 1$ entonces se ensaya una solución particular y^p_n del tipo $y^p_n = n^m p(n)$, siendo $p \in \mathbb{R}_1[n]$.

Se tiene de esta forma que $y^p_n = n(an + b) = an^2 + bn$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Substituyendo y^p_n en la ecuación recurrente se obtiene

$$a(n + 2)^2 + b(n + 2) = 3[a(n + 1)^2 + b(n + 1)] - 2[an^2 + bn] + n + 1 ,$$

que agrupado por potencias de n resulta $[-2a-1]n + [a-b-1] = 0$. Los valores de los parámetros a y b son la solución del sistema lineal $-2a - 1 = 0$, $a - b - 1 = 0$, es decir $a = -1/2$, $b = -3/2$. En definitiva $y^p_n = -n(n+3)/2$.

La solución general de la ecuación recurrente completa es

$$y_n = y^h_n + y^p_n = [-1 + 2^n]y_1 + [2(1 - 2^{n-1})]y_0 - \frac{n}{2}(n + 3) .$$

3. *Dada la matriz*

$$\begin{pmatrix} 3a + 3b - 2 & 9a + 6b - 6 \\ 1 - a - b & 3 - 3a - 2b \end{pmatrix} .$$

(i) *Encontrar el polinomio característico.*

(ii) *Discutir la diagonalización de la matriz según los valores de los parámetros reales a y b.*

(iii) *Encontrar los vectores propios para el caso $b = -1$, en función de a.*

Solución. (i) El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3a + 3b - 2 - \lambda & 9a + 6b - 6 \\ 1 - a - b & 3 - 3a - 2b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3(1 - \lambda) \\ 1 - a - b & 3 - 3a - 2b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 - a - b & 3 - 3a - 2b - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(b - \lambda) , \end{aligned}$$

donde se ha realizado la transformación elemental por filas $f_1 \to f_1 + 3f_2$.

(ii) El polinomio característico descompone totalmente $Q_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - b)$ y los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = b$. Obviamente si $b \neq 1$ los valores propios son simples y por lo tanto A diagonaliza.

Si $b = 1$ se tiene que la matriz A sólo tiene el valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica $m = 2$. Para averiguar en este caso cuando A diagonaliza es necesario conocer la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio 1, es decir $\dim \ker(A - I_2)$. Una forma de obtener dicha dimensión es hallar el rango de la matriz $A - I_2$ cuando $b = 1$.

$$\text{rang}(A - I_2) = \text{rang} \begin{pmatrix} 3a & 9a \\ -a & -3a \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} a & 3a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ si } & a = 0, \\ 1 \text{ si } & a \neq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\dim \ker(A - I_2) = 2 - \dim \text{Im}(A - I_2) = 2 - \text{rang}(A - I_2) = \begin{cases} 2 = m \text{ si } & a = 0, \\ 1 \neq m \text{ si } & a \neq 0, \end{cases}$$

de lo que se obtiene que si $b = 1$ y $a = 0$ entonces A diagonaliza, pero si $b = 1$ y $a \neq 0$ entonces A no diagonaliza.

(iii) Si $b = -1$ los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. El cálculo de los vectores propios es el siguiente.

- Sea $v_1 = (x, y) \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$. Se tiene pues que $(A - I_2)v_1 = 0$, es decir
$$\begin{pmatrix} 3a - 6 & 9a - 12 \\ 2 - a & 4 - 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$
cuya solución es $(2 - a)x + (4 - 3a)y = 0$. Se tiene pues que $v_1 = (3a - 4, 2 - a)$.

- Sea $v_2 = (x, y) \in \text{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, es decir $(A + I_2)v_2 = 0$. En forma matricial esta ecuación se escribe como

$$\begin{pmatrix} 3a-4 & 9a-12 \\ 2-a & 6-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $x = -3y$. Por lo tanto $v_2 = (-3y, y) = y(-3, 1)$.

Se tiene en definitiva que los subespacios propios son

$$\text{Ker}(A - I_2) =< (3a-4, 2-a) > \ , \quad \text{Ker}(A + I_2) =< (-3, 1) > \ .$$

4. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales* $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x - y, \\ \dot{y} & = & 3x - 2y. \end{array} \right.$

Solución. El sistema lineal de ecuaciones diferenciales adopta la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ , \quad \text{siendo} \ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$Q_A(\lambda) \quad = \quad \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1) \ ,$$

de manera que los valores propios son $\lambda_{\pm} = \pm 1$. El cálculo de vectores propios es el siguiente.

- Sea $v_1 = (x, y) \in \text{Ker}(A - \lambda_+ I_2)$. Se tiene pues que $(A - I_2)v_1 = 0$ y por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $x = y$. De esta forma $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$.

- Sea $v_2 = (x, y) \in \text{Ker}(A - \lambda_- I_2)$, es decir $(A + I_2)v_2 = 0$ o bien

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $3x = y$. Por lo tanto $v_2 = (x, 3x) = x(1, 3)$.

Definiendo el vector $X = (x, y)^t$ se obtiene $\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})^t$ de manera que el sistema diferencial del enunciado se escribe como $\dot{X} = AX$. Realizando el cambio de variables lineal $X = PZ$ siendo $Z = (z_1, z_2)^t$ las nuevas variables y P la matriz del cambio cuyas columnas son las componentes de los vectores propios, es decir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

el sistema de ecuaciones diferenciales se desacopla de la forma $\dot{Z} = DZ$ siendo $D = P^{-1}AP = \text{diag}\{1, -1\}$. En las nuevas variables $(z_1, z_2)^t$ el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \ , \quad \text{siendo} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ ,$$

cuya solución es $z_1(t) = c_1 \exp(t)$, $z_2(t) = c_2 \exp(-t)$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Finalmente se deshace el cambio de variables efectuado de manera que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) \\ c_2 \exp(-t) \end{pmatrix} \ .$$

Concluimos que la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales planteado en el problema es

$$x(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t) \ , \quad y(t) = c_1 \exp(t) + 3c_2 \exp(-t) \ .$$

5. *Sean A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Probar que las matrices AB y BA tienen los mismos autovalores.*

Solución. Sea I_n la matriz identidad $n \times n$. Veamos que el polinomio característico $Q_{AB}(\lambda)$ asociado a la matriz AB coincide con el polinomio característico $Q_{BA}(\lambda)$ asociado a la matriz BA.

$$\begin{aligned} Q_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda I_n) = \det(AB - \lambda AA^{-1}) = \det[A(B - \lambda A^{-1})] \\ &= \det(A) \det(B - \lambda A^{-1}) = \det(B - \lambda A^{-1}) \det(A) \\ &= \det[(B - \lambda A^{-1})A] = \det(BA - \lambda A^{-1}A) = \det(BA - \lambda I_n) \\ &= Q_{BA}(\lambda) \ . \end{aligned}$$

Puesto que los valores propios de una matriz vienen dados por las raíces de su polinomio característico, se concluye que las matrices AB y BA tienen los mismos valores propios.

6. *Dada la matriz*

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) *Encontrar el polinomio característico.*

(b) *Discutir la diagonalización de la matriz según los valores de los parámetros reales a y b.*

(c) *Encontrar los vectores propios para el caso $a = 1$ y $b = 0$.*

Solución. **(a)** El polinomio característico de la matriz A del enunciado es $Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Puesto que A es una matriz triangular, de manera inmediata se tiene que sus valores propios son los elementos de su diagonal principal o, de forma equivalente, su polinomio característico es

$$Q_A(\lambda) = (a - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) \; .$$

(b) Notemos que el polinomio característico $Q_A(\lambda)$ descompone totalmente y que además si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, entonces los valores propios son simples y por lo tanto A diagonaliza.

Si $a = 1$ se tiene que la matriz A tiene los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidades algebraicas $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$ respectivamente. Para averiguar en este caso cuando A diagonaliza es necesario conocer la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio 1, es decir $\dim \ker(A - I_3)$. Una forma de obtener dicha dimensión es hallar el rango de la matriz $A - I_3$ cuando $a = 1$.

$$\text{rang}(A - I_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } & b \neq 0, \\ 1 \text{ si } & b = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\dim \ker(A - I_3) = 3 - \dim \text{Im}(A - I_3) = 3 - \text{rang}(A - I_3) = \begin{cases} 1 \text{ si } & b \neq 0, \\ 2 \text{ si } & b = 0, \end{cases}$$

de lo que se obtiene que si $a = 1$ entonces A diagonaliza sólo cuando $b = 0$.

De forma totalmente análoga, si $a = 2$ entonces la matriz A tiene los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidades algebraicas $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$ respectivamente. Para estudiar en este caso cuando A diagonaliza se necesita la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio 2, es decir $\dim \ker(A - 2I_3)$. Para conseguir dicha dimensión calculamos en primer lugar el rango de la matriz $A - 2I_3$ cuando $a = 2$.

$$\text{rang}(A - 2I_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } & b \neq 0, \\ 1 \text{ si } & b = 0. \end{cases}$$

De esta forma se tiene

$$\dim \ker(A - 2I_3) = 3 - \dim \text{Im}(A - 2I_3) = 3 - \text{rang}(A - 2I_3) = \begin{cases} 1 \text{ si } & b \neq 0, \\ 2 \text{ si } & b = 0, \end{cases}$$

de lo que se deduce que para $a = 2$ la matriz A diagonaliza sólo cuando $b = 0$.

En resumen se tiene que A diagonaliza si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

i) $a \neq 1$,

ii) $a \neq 2$,

iii) $a = 1$ y $b = 0$,

iv) $a = 2$ y $b = 0$.

(c) Se sabe del apartado anterior que si $a = 1$ y $b = 0$, los valores propios asociados a la matriz A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidades algebraicas $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$ respectivamente. Además, como la matriz A diagonaliza, obtendremos tantos vectores propios asociados a cada valor propio como indica su multiplicidad algebraica. Comprobemoslo realizando el cálculo explícito de los vectores propios.

(1) Los vectores propios $v_1 = (x, y, z)$ asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ verifican $(A - \lambda_1 I_3)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cuya solución es $z = 0$. De esta forma $v_1 = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$. El subespacio propio V_{λ_1} asociado al valor propio λ_1 tiene la siguiente base de vectores propios $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

(2) El vector propio $v_2 = (x, y, z)$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$ satisface la ecuación $(A - \lambda_2 I_3)v_2 = 0$, que desarrollada en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solución de este sistema es $x = 0$, $y = 2z$, de manera que $v_2 = (0, , 2z, z) = z(0, 2, 1)$. Por lo tanto, $\{(0, 2, 1)\}$ es una base del subespacio propio V_{λ_2} asociado al valor propio λ_2.

7. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales* $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 5x - 2y, \\ \dot{y} & = & 4x - y. \end{array} \right.$ *con las condiciones iniciales* $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Solución. En forma matricial, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales se escribe como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} .$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) .$$

Como el polinomio característico descompone totalmente y sus raices son simples, se sabe que la matriz A diagonaliza. Entonces, existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$ siendo D una matriz diagonal con los valores propios de A en la diagonal principal, es decir

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Además, las columnas de la matriz P son las componentes de los vectores propios de la matriz A. El cálculo de dichos vectores propios es el siguiente.

(1) El vector propio $v_1 = (x, y)$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 3$ verifica $(A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cuya solución es $x = y$. De esta forma $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$.

(2) El vector propio $v_2 = (x, y)$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$ satisface la ecuación $(A - \lambda_2 I_2)v_2 = 0$, que desarrollada en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solución de este sistema es $y = 2x$, de manera que $v_2 = (x, 2x) = x(1, 2)$.

Una vez se conocen los vectores propios de A, la matriz P viene dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

siendo su inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Se sabe que, realizando el cambio lineal de variables

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ,$$

el sistema lineal de ecuaciones diferenciales se escribe en forma desacoplada como

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ,$$

es decir $\dot{u} = 3u$, $\dot{v} = v$. La solución general del sistema desacoplado es $u(t) = c_1 \exp(3t)$, $v(t) = c_2 \exp(t)$, siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Deshaciendo el cambio de variables efectuado obtendremos la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales original.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \exp(3t) \\ c_2 \exp(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \exp(3t) + c_2 \exp(t) \\ c_1 \exp(3t) + 2c_2 \exp(t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Finalmente, calcularemos las constantes c_1 y c_2 de manera que obtendremos la solución particular que verifica las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. Imponiendo dichas condiciones se obtiene el sistema lineal

$$c_1 + c_2 = 0 \ , \quad c_1 + 2c_2 = 1 \ ,$$

cuya solución es $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. De esta forma, la solución es

$$x(t) = \exp(t) - \exp(3t) \ , \quad y(t) = 2\exp(t) - \exp(3t) \ .$$

8. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

(i) *Demostrar que si v es un vector propio de la matriz A con valor propio asociado λ entonces v es también vector propio de A^m con valor propio λ^m para cualquier $m \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Probar que las matrices A y A^T tienen los mismos valores propios.*

Solución. **(i)** Sea v un vector propio de la matriz A con valor propio asociado λ. Entonces se verifica $Av = \lambda v$. Multiplicando por la izquierda los dos miembros de la ecuación anterior por A se obtiene $AAv = \lambda Av$, es decir $A^2 v = \lambda^2 v$ con lo que el enunciado del problema queda demostrado para $m = 2$. Continuaremos la demostración por inducción, es decir, se ha de demostrar que $A^m v = \lambda^m v$ suponiendo únicamente que se verifica $A^{m-1} v = \lambda^{m-1} v$. Para conseguirlo multiplicamos por la izquierda los dos miembros de la ecuación anterior por A, de manera que se obtiene $AA^{m-1} v = \lambda^{m-1} Av$, o equivalentemente $A^m v = \lambda^m v$ como se quería demostrar.

(ii) Vamos a demostrar que los polinomios característicos $Q_A(\lambda)$ y $Q_{A^T}(\lambda)$ asociados a una matriz cuadrada A y a su matriz traspuesta A^T coinciden. En concreto, utilizando las propiedades de los determinantes y de la operación trasposición de matrices, se tiene

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I^T) \\ &= \det(A^T - \lambda I) = Q_{A^T}(\lambda). \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta demostración, puesto que los valores propios son las raíces del polinomio característico, se tiene la prueba del enunciado del problema.

9. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b \end{pmatrix}.$$

(a) *Encontrar el polinomio característico de A.*

(b) *Discutir la diagonalización de la matriz A según los valores de los parámetros reales a y b.*

(c) *Dar la matriz diagonal en el caso de que diagonalice A.*

Solución. **(a)** El polinomio característico de la matriz A del enunciado es

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2a-b-\lambda & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ -a+b & 0 & -a+2b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\begin{vmatrix} 2a-b-\lambda & 2a-2b \\ -a+b & -a+2b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & a-\lambda \\ -a+b & -a+2b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a+b & -a+2b-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(b-\lambda)\ , \end{aligned}$$

donde, por las propiedades de los determiantes, en el segundo paso se ha desarrollado el determinante por la segunda columna y en el tercero paso se ha sumado a la primera fila la segunda.

(b) Notemos que el polinomio característico $Q_A(\lambda)$ posee dos raices $\lambda_1 = a$ y $\lambda_2 = b$ de multiplicidad algebraica $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$. Calculemos el subespacio propio asociado al valor propio a, es decir dim ker$(A - aI_3)$. Una forma de obtener dicha dimensión es hallar el rango de la matriz $A - aI_3$.

$$\text{rang}(A-aI_3) = \text{rang}\begin{pmatrix} a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & 0 & 2 \\ -a+b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1\,.$$

Entonces

$$\dim\ker(A-aI_3) = 3 - \dim\ \text{Im}(A-aI_3) = 3 - \text{rang}(A-aI_3) = 3-1 = 2$$

de lo que se obtiene que si $a \neq b$ entonces A diagonaliza y si $a = b$ entonces A no diagonaliza. Realizemos el cálculo explícito de los vectores propios asociados a cada valor propio.

Los vectores propios $v_1 = (x, y, z)$ asociados al valor propio $\lambda_1 = a$ verifican $(A - \lambda_1 I_3)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} a-b & 0 & 2a-2b \\ 1 & 0 & 2 \\ -a+b & 0 & -2a+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $x = -2z$. De esta forma $v_1 = (-2z, y, z) = y(0, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. El subespacio propio V_{λ_1} asociado al valor propio λ_1 tiene la siguiente base de vectores propios $\{(0, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$.

El vector propio $v_2 = (x, y, z)$ asociado al valor propio $\lambda_2 = b$ satisface la ecuación $(A - \lambda_2 I_3)v_2 = 0$, que desarrollada en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 2a-2b & 0 & 2a-2b \\ 1 & a-b & 2 \\ -a+b & 0 & -a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es $x = (a - b)y$, $z = (b - a)y$, de manera que $v_2 = ((a-b)y, y, (b-a)y) = y(a-b, 1, b-a))$. Por lo tanto, $\{(a-b, 1, b-a)\}$ es una base del subespacio propio V_{λ_2} asociado al valor propio λ_2.

(c) La matriz diagonal en el caso que diagonaliza la matriz A toma la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

si tomamos como matriz de cambio de base

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a-b \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b-a \end{pmatrix}$$

10. *Hallar la solución de la ecuación en recurrencias dada por* $y_{n+3} - 4y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$ *con las condiciones iniciales* $y_0 = -1$, $y_1 = 3$, $y_2 = -1$.

Solución. En primer lugar se obtendrá la solución general de la ecuación recurrente de tercer orden $y_{n+3} = 4y_{n+2} + 7y_{n+1} - 10y_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para conseguirlo escribimos dicha ecuación en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_{n+3} \\ y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma se tiene

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_4 \\ y_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}, \cdots$$

y en general, por inducción, obtenemos

$$\begin{pmatrix} y_{n+3} \\ y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Sólo falta hallar la potencia $n+1$ de la matriz A. Dicha potencia será calculada con las técnicas de diagonalización.

El polinomio característico de la matriz A

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 & -10 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3+4\lambda^2+7\lambda-10 = (1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+2), \end{aligned}$$

descompone totalmente y además sus raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -2$ son simples, es decir con multipicidad algebraica 1. De aquí se deduce que la matriz A diagonaliza y por lo tanto existe una matriz $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ no singular tal que $D = P^{-1}AP$ es de la forma $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Despejando la matriz A de la anterior igualdad obtenemos $A = PDP^{-1}$ y de aquí se deduce que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donde

$$D^{n+1} = \operatorname{diag}\{\lambda_1^{n+1}, \lambda_2^{n+1}, \lambda_3^{n+1}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Los elementos de la matriz P son las componentes en columnas de los vectores propios asociados a cada valor propio colocados en el mismo orden que los valores propios en la matriz D. Su cálculo es el siguiente.

- Sea $v_1 = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I_3)$. Se tiene pues, por definición de nucleo, que $(A-I_3)v_1 = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -10 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  cuya solución es $x = y = z$. De esta forma $v_1 = (x,x,x) = x(1,1,1)$.

- Sea $v_2 = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I_3)$, es decir $(A-5I_3)v_2 = 0$. En forma matricial esta ecuación se escribe como

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & -10 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  cuya solución es $x = 5y = 25z$. Por lo tanto $v_2 = (25z, 5z, z) = z(25,5,1)$.

- Sea $v_3 = (x, y, z) \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_3 I_3)$, es decir $(A + 2I_3)v_3 = 0$. En forma matricial esta ecuación se escribe como

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cuya solución es $x = -2y = 4z$. Por lo tanto $v_2 = (4z, -2z, z) = z(4, -2, 1)$.

Se concluye que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 25 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 1/4 & 5/6 \\ 1/28 & 1/28 & -1/14 \\ 1/21 & -2/7 & 5/21 \end{pmatrix} .$$

De esta forma obtenemos $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 25 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/12 & 1/4 & 5/6 \\ 1/28 & 1/28 & -1/14 \\ 1/21 & -2/7 & 5/21 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{84} \begin{pmatrix} -7 - 32(-2)^n + 375(5)^n & 3(7 + 64(-2)^n + 125(5)^n) & 10(7 - 16(-2)^n - 75(5)^n) \\ -7 + 16(-2)^n + 75(5)^n & 3(7 - 32(-2)^n + 25(5)^n) & 10(7 + 8(-2)^n - 15(5)^n) \\ -7 - 8(-2)^n + 15(5)^n & 3(7 - 16(-2)^n + 5(5)^n) & 10(7 - 4(-2)^n - 3(5)^n) \end{pmatrix} .$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$\begin{aligned} y_{n+3} &= \frac{1}{84}\Big([-7 - 32(-2)^n + 375(5)^n] y_2 + [3(7 + 64(-2)^n + 125(5)^n)] y_1 \\ &\quad + [10(7 - 16(-2)^n - 75(5)^n)] y_0 \Big) , \end{aligned}$$

o de forma equivalente

$$y_{n+3} = \frac{1}{84}\Big([-y_2 + 3y_1 + 10y_0] + 32[-y_2 + 6y_1 - 5y_0](-2)^n + 375[y_2 + y_1 - 2y_0](5)^n \Big) .$$

Con las condiciones iniciales $y_2 = -1$, $y_1 = 3$ e $y_0 = -1$, la anterior relación se expresa de la forma

$$y_{n+3} = \frac{64(-2)^n + 125(5)^n}{7} .$$

Finalmente, reordenando el índice n, la solución de la ecuación recurrente con las condiciones iniciales dadas es

$$y_n = \frac{64(-2)^{n-3} + 125(5)^{n-3}}{7} = \frac{-8(-2)^n + 5^n}{7} .$$

11. *Considerar la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar su polinomio característico y discutir la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ *que tiene como matriz asociada la matriz anterior.*

Solución. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matriz del enunciado. Su polinomio característico $Q_A(\lambda)$ viene dado por $Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$, donde I_4 es la matriz identidad de cuarto orden. Desarrollando el anterior determinante 4×4 por la primera fila se reduce de la forma

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ -4 & 3-\lambda & 1 \\ -4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A partir de ahora es posible utilizar la regla de Sarrus para calcular el determinante 3×3, sin embargo proseguiremos el cálculo utilizando propiedades de los determinantes con el objetivo de obtener el polinomio $Q_A(\lambda)$ factorizado. De esta forma, realizando las transformaciones elementales por filas $f_3 \to f_3 - f_2$ y por columnas $c_2 \to c_2 + c_3$ se tiene

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ -4 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 & 1 \\ -4 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente, desarrollando el anterior determinante por la tercera fila se obtiene

$$Q_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^3 .$$

Para discutir la diagonalización de A se necesita en primer lugar sus valores propios asociados y su multiplicidad algebraica. Puesto que los valores propios son las raíces de $Q_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$, se tiene que $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $m_1 = 3$ y $\lambda_2 = 0$ es un valor propio simple, es decir, con multiplicidad $m_2 = 1$. Como el polinomio característico ha descompuesto totalmente, se deduce que la matriz A diagonalizará si y sólo si $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_4) = m_1$, es decir $\dim \operatorname{Ker}(A - I_4) = 3$.

Una forma sencilla de calcular dim Ker$(A-I_4)$ consiste en hallar el rango de la matriz $A-I_4$. Como

$$A-I_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\ ,$$

se tiene que rang$(A-I_4)=1$, de manera que

$$\dim \operatorname{Ker}(A-I_4)=4-\dim \operatorname{Im}(A-I_4)=4-\operatorname{rang}(A-I_4)=4-1=3\ .$$

Concluimos que A diagonaliza.

12. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneas*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x+y-\sin t,\\ \dot{y} & = & -3x-2y+\cos t.\end{array}\right.$$

Solución. En forma matricial, el sistema lineal homogéneo asociado de ecuaciones diferenciales se escribe como

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ ,\quad \text{siendo } A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\ .$$

El polinomio característico de la matriz A es

$$Q_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -3 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)\ .$$

Como el polinomio característico descompone totalmente y sus raíces son simples, se sabe que la matriz A diagonaliza. Entonces, existe una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP=D$ siendo D una matriz diagonal con los valores propios de A en la diagonal principal, es decir

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ .$$

Además, las columnas de la matriz P son las componentes de los vectores propios de la matriz A. El cálculo de dichos vectores propios es el siguiente.

(1) El vector propio $v_1=(x,y)$ asociado al valor propio $\lambda_1=1$ verifica $(A-I_2)v_1=0$, es decir

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\ ,$$

cuya solución es $x=-y$. De esta forma $v_1=(x,-x)=x(1,-1)$.

(2) El vector propio $v_2 = (x, y)$ asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$ satisface la ecuación $(A + I_2)v_2 = 0$, que desarrollada en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solución de este sistema es $y = -3x$, de manera que $v_2 = (x, -3x) = x(1, -3)$.

Una vez se conocen los vectores propios de A, la matriz P viene dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} ,$$

siendo su inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} .$$

Se sabe que, realizando el cambio lineal de variables

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ,$$

el sistema lineal de ecuaciones diferenciales se escribe en forma desacoplada como

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ,$$

es decir $\dot{u} = u$, $\dot{v} = -v$. La solución general del sistema desacoplado es $u(t) = c_1 \exp(t)$, $v(t) = c_2 \exp(-t)$, siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Deshaciendo el cambio de variables efectuado obtendremos la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo original

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) \\ c_2 \exp(-t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t) \\ -c_1 \exp(t) - 3c_2 \exp(-t) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Utilizando el método de variación de las constantes se busca a continuación una solución particular de la forma

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t) \exp(t) + c_2(t) \exp(-t) \\ -c_1(t) \exp(t) - 3c_2(t) \exp(-t) \end{pmatrix} .$$

Introduciendo esta expresión en el sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= c_1(t) \exp(t) - c_2(t) \exp(-t) + \dot{c}_1(t) \exp(t) + \dot{c}_2(t) \exp(-t) \\ &= c_1(t) \exp(t) - c_2(t) \exp(-t) - \sin t \ , \\ \dot{y}_p(t) &= -c_1(t) \exp(t) + 3c_2(t) \exp(-t) - \dot{c}_1(t) \exp(t) - 3\dot{c}_2(t) \exp(-t) \\ &= -c_1(t) \exp(t) + 3c_2(t) \exp(-t) + \cos t \ . \end{aligned}$$

Simplificando estas igualdades se tiene el siguiente sistema lineal para las incógnitas $\dot{c}_1(t)$ y $\dot{c}_2(t)$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1(t)\exp(t) + \dot{c}_2(t)\exp(-t) &= -\sin t \ , \\
-\dot{c}_1(t)\exp(t) - 3\dot{c}_2(t)\exp(-t) &= -\cos t \ ,
\end{aligned}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1(t) &= \frac{1}{2}\exp(-t)[\cos t - 3\sin t] \ , \\
\dot{c}_2(t) &= -\frac{1}{2}\exp(t)[\cos t - \sin t] \ .
\end{aligned}$$

Integrando se obtiene

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= \int \dot{c}_1(t)\ dt = \frac{1}{2}\int \exp(-t)[\cos t - 3\sin t]\ dt \\
&= \frac{1}{2}\exp(-t)[\cos t + 2\sin t] \ , \\
c_2(t) &= \int \dot{c}_2(t)\ dt = -\frac{1}{2}\int \exp(t)[\cos t - \sin t]\ dt = -\frac{1}{2}\exp(t)\cos t \ .
\end{aligned}$$

De esta forma se tiene que una solución particular del sistema diferencial es

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t)\exp(t) + c_2(t)\exp(-t) \\ -c_1(t)\exp(t) - 3c_2(t)\exp(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} .$$

Finalmente la solución general viene dada por el principio de superposición, es decir,

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1\exp(t) + c_2\exp(-t) + \sin t, \\
y(t) &= -c_1\exp(t) - 3c_2\exp(-t) + \cos t - \sin t.
\end{aligned}$$

13. *Hallar la solución general de la ecuación en recurrencias dada por* $y_{n+2} - y_n = n + 2$.

Solución. En primer lugar se obtendrá la solución general de la ecuación recurrente de segundo orden homogénea asociada $y_{n+2} = y_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Para conseguirlo escribimos dicha ecuación en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} , \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

De esta forma se tiene

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} , \ \cdots$$

y en general, por inducción, obtenemos

$$\begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} .$$

Sólo falta hallar la potencia $n+1$ de la matriz A. Dicha potencia será calculada con las técnicas de diagonalización.

El polinomio característico de la matriz A

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) ,$$

descompone totalmente y además sus valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ son simples, es decir tienen multiplicidad algebraica 1. De aquí se deduce que la matriz A diagonaliza y por lo tanto existe una matriz $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no singular tal que $D = P^{-1}AP$ es de la forma $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Despejando la matriz A de la anterior igualdad obtenemos $A = PDP^{-1}$ y de aquí se deduce que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donde

$$D^{n+1} = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{n+1}, \lambda_2^{n+1}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} .$$

Las columnas de la matriz P son las componentes de los vectores propios asociados a cada valor propio colocados en el mismo orden que los valores propios en la matriz D. Su cálculo es el siguiente.

- Sea $v_1 = (x, y) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$. Se tiene pues, por definición de núcleo, que $(A - I_2)v_1 = 0$. Resolviendo el sistema homogéneo se obtiene $v_1 = (1, 1)$.
- Sea $v_2 = (x, y) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$, es decir $(A + I_2)v_2 = 0$. En este caso se obtiene $v_1 = (1, -1)$.

Se concluye que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} .$$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2(-1)^{n+1} & 1/2 - 1/2(-1)^{n+1} \\ 1/2 - 1/2(-1)^{n+1} & 1/2 + 1/2(-1)^{n+1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_{n+2}^h = \frac{1}{2}[1 + (-1)^{n+1}]y_1 + \frac{1}{2}[1 - (-1)^{n+1}]y_0,$$

o de forma equivalente

$$y_n^h = \frac{1}{2}[1+(-1)^{n-1}]y_1 + \frac{1}{2}[1-(-1)^{n-1}]y_0 = \frac{1}{2}(y_1+y_0) + \frac{1}{2}(y_1-y_0)(-1)^{n-1} \,.$$

En segundo lugar se procede al cálculo de una solución particular de la ecuación en diferencias finitas completa $y_{n+2} = y_n + n + 2$. Puesto que el término no homogéneo $f(n) = n+2 \in \mathbb{R}_1[n]$ es un polinomio en la variable n de primer grado y además 1 es raíz del polinomio característico $Q_A(\lambda)$ con multiplicidad $m = 1$ entonces se ensaya una solución particular y_n^p del tipo $y_n^p = n(an+b) = an^2 + bn$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Substituyendo y_n^p en la ecuación recurrente se obtiene

$$a(n+2)^2 + b(n+2) = [an^2 + bn] + n + 2 \,,$$

que agrupado por potencias de n resulta $[4a-1]n + [4a+2b-2] = 0$. Los valores de los parámetros a y b son la solución del sistema lineal $4a-1 = 0$, $4a+2b+2 = 0$, es decir $a = 1/4$, $b = 1/2$. En definitiva $y_n^p = n(n+2)/4$.

La solución general de la ecuación recurrente completa es

$$y_n = y_n^h + y_n^p = \frac{1}{2}(y_1+y_0) + \frac{1}{2}(y_1-y_0)(-1)^{n-1} + \frac{1}{4}n(n+2) \,.$$

14. *Dada la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -b & -1 \end{pmatrix},$$

estudiar su diagonalización según el valor de los parámetros a y b. Buscar una base de vectores propios en el caso $a = 1$, $b = 0$.

Solución. Si llamamos A a la matriz del enunciado, el polinomio característico de la matriz A es

$$Q_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & b & 2 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & -b & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(a-\lambda)(1+\lambda).$$

Notemos que el polinomio característico $Q_A(\lambda)$ posee tres raíces $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = a$ y $\lambda_3 = -1$ de multiplicidad algebraica 1. En el caso $a \neq \pm 1$ los tres valores propios son simples y la matriz A diagonaliza.

En el caso $a = 1$ entonces λ_1 tiene multiplicidad $m_1 = 2$. Debemos por tanto calcular la dimensión del subespacio propio asociado al valor propio

λ_1, es decir dim Ker$(A-\lambda_1 I_3)$. Una forma de obtener dicha dimensión es hallar el rango de la matriz $A-\lambda_1 I_3$.

$$\operatorname{rang}(A-I_3)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -2 \end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & b & 2 \end{pmatrix}=1\ ,\quad \forall b\in\mathbb{R}.$$

Entonces

$$\dim \operatorname{Ker}(A-I_3)=3-\dim \operatorname{Im}(A-I_3)=3-\operatorname{rang}(A-I_3)=3-1=2,$$

de lo que se obtiene que A diagonaliza $\forall b$.

En el caso $a=-1$ entonces λ_3 tiene mutiplicidad $m_3=2$. Debemos por tanto calcular el subespacio propio asociado al valor propio λ_3, es decir dim Ker$(A-\lambda_3 I_3)$. Para ello calcularemos el rango de la matriz $A-\lambda_3 I_3$.

$$\operatorname{rang}(A+I_3)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & b & 2 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}=\begin{cases} 2 \text{ si } b\neq 0 \\ 1 \text{ si } b=0 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker}(A+I_3) &= 3-\dim \operatorname{Im}(A+I_3)=3-\operatorname{rang}(A+I_3)\\ &= \begin{cases} 3-2=1 \text{ si } b\neq 0 \\ 3-1=2 \text{ si } b=0 \end{cases}\end{aligned}$$

de lo que se obtiene que si $a=-1$ entonces A sólo diagonaliza para $b=0$.

En el caso $a=1$ y $b=0$ la matriz A toma la forma

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son, como hemos visto anteriormente, $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=-1$ con multiplicidades $m_1=2$ y $m_2=1$ respectivamente. Realizemos el cálculo explícito de los vectores propios asociados a cada valor propio.

- Los vectores propios $v_1=(x,y,z)$ asociados al valor propio $\lambda_1=1$ verifican $(A-\lambda_1 I_3)v_1=0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  cuya solución es $z=0$. De esta forma $v_1=(x,y,0)=x(1,0,0)+y(0,1,0)$. El subespacio propio V_{λ_1} asociado al valor propio λ_1 tiene la siguiente base de vectores propios $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

- El vector propio $v_2 = (x, y, z)$ asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$ satisface la ecuación $(A - \lambda_2 I_3)v_2 = 0$, que desarrollada en forma matricial es
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
La solución de este sistema es $y = 0$, $z = -x$, de manera que $v_2 = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$. Por lo tanto, $\{(1, 0, -1)\}$ es una base del subespacio propio V_{λ_2} asociado al valor propio $\lambda_2 = -1$.

Por tanto la base de vectores propios es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$. En esta base la matriz A en el caso $a = 1$ y $b = 0$ toma la forma diagonal
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
tomando como matriz de cambio de base
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. *Sea f un endomorfismo del espacio vectorial E, A su matriz en una cierta base y $Q_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ su polinomio característico. Se pide:*

    (a) *¿Cuál es la dimensión de E?*

    (b) *¿És f diagonalizable? En caso afirmativo, ¿cuál es su matriz diagonal?*

    (c) *Calcular A^4 y A^{-1} expresando el resultado como combinación lineal de A y de la matriz identidad I.*

Solución. **(a)** La $\dim E = 2$, ya que coincide con el grado del polinomio característico.

(b) Como que $Q_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, existe una base en la cual la matriz asociada al endomorfismo es diagonal ya que todos sus valores propios son simples y además el polinomio característico descompone totalmente. La matriz diagonal D tendrá en la diagonal principal a los valores propios y por lo tanto
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton se tiene que $A^2 - 3A + 2I = 0$. Es decir que $A^2 = 3A - 2I$. De donde, $A^4 = (3A - 2I)^2 = 9A^2 - 12A + 4I$.

Sustituyendo en la igualdad anterior el valor de A^2 se obtiene $A^4 = 15A - 14I$. Por otro lado, multiplicando la igualdad $A^2 - 3A + 2I = 0$, por A^{-1}, obtenemos $A - 3I + 2A^{-1} = 0$, de donde $A^{-1} = (3I - A)/2$.

16. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.*

(i) *Demostrar que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, siendo $v_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $v_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $v_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.*

(ii) *Si f tiene asociada la matriz*

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

en la base $\mathcal{B}$, hallar la matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}'$.

(iii) *A la vista de los anteriores resultados ¿Se puede afirmar que $\mathcal{B}'$ es una base formada por vectores propios de f?*

Solución. **(i)** Como el número de elementos de $\mathcal{B}'$ es 3, para demostrar que $\mathcal{B}'$ es base de $\mathbb{R}^3$ basta con mostrar que sus elementos $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independientes. Puesto que dichos vectores tienen las componentes en la base $\mathcal{B}$ dadas por

$$v_1 = (2,3,1)_{\mathcal{B}}\ ,\ v_2 = (3,4,1)_{\mathcal{B}}\ ,\ v_3 = (1,2,2)_{\mathcal{B}}\ ,$$

y además el determinante formado con dichos vectores

$$\det\{v_1, v_2, v_3\} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\ ,$$

se concluye que los vectores de $\mathcal{B}'$ son linealmente independientes y por lo tanto $\mathcal{B}'$ es base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix},$$

la matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$. Entonces, por la teoría del cambio de base en un endomorfismo, si denotamos po A' a la matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}'$ se tiene que $A' = P^{-1}AP$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$. Calculando su matriz inversa se obtiene

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

de modo que

$$\begin{aligned} A' = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

(iii) Si, $\mathcal{B}'$ es una base formada por vectores propios de f ya que la matriz A' es diagonal.

17. *Calcular los valores del parámetro a para los cuales el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *definido por* $f(x, y, z) = (x + ay + az, -x + y - z, x + 2z)$ *es diagonalizable y hallar una base de* $\mathbb{R}^3$ *en la cual* f *diagonaliza.*

Solución. Calculemos la matriz A asociada a f en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Puesto que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, -1, 1) , \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (a, 1, 0) , \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (a, -1, 2) , \end{aligned}$$

se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Los valores propios asociados a f o equivalentemente a A vienen dados por las raíces del polinomio característico

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) .$$

Observar que $Q_A(\lambda)$ no depende del parámetro a y por lo tanto los autovalores tampoco lo harán. Los valores propios de f son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebaica $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ que es simple, es decir, tiene multiplicidad algebraica $m_2 = 1$. Como $Q_A(\lambda)$ descompone totalmente se tiene que el

endomorfismo f diagonaliza si y sólo si $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_3) = m_1 = 2$. Teniendo en cuenta que $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_3) = 3 - \operatorname{rang}(A - \lambda_1 I_3)$ se calculará en primer lugar el rango de la matriz $A - \lambda_1 I_3$. Puesto que

$$\det(A - \lambda_1 I_3) = \det(A - I_3) = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

se tendrá $\operatorname{rang}(A - \lambda_1 I_3) < 3$. Además, fácilmente se ve que

$$\operatorname{rang}(A - \lambda_1 I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad a \neq 0 \ , \\ 1 & \text{si} \quad a = 0 \ , \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_3) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \neq 0 \ , \\ 2 & \text{si} \quad a = 0 \ , \end{cases}$$

de donde se deduce que f diagonaliza si y sólo si $a = 0$.

Una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ en la que f diagonaliza (y por lo tanto $a = 0$) estará compuesta por vectores propios asociados a valores propios diferentes, es decir, $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, 3$. Calculemos pues los vectores propios asociados a cada valor propio.

- Sea (x, y, z) vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$, es decir, verificando $(A - \lambda_1 I_3)(x, y, z)^t = 0$. Se tiene pues que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

  Este sistema lineal tiene por solución $x + z = 0$ y por lo tanto los vectores propios son de la forma $(x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0)$. Se tiene pues que $v_1 = (1, 0, -1)$ y $v_2 = (0, 1, 0)$.

- Sea $v_3 = (x, y, z)$ vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$, es decir, verificando $(A - \lambda_2 I_3)v_3 = 0$. Se tiene pues que

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $x = 0$, $y + z = 0$ y por lo tanto los vectores propios son de la forma $v_3 = (0, y, -y) = y(0, 1, -1)$.

Concluimos que una base de $\mathbb{R}^3$ en la cual f diagonaliza es

$$\{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 1, -1)\} \ .$$

18. **(a)** *Sea A la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Encontrar el polinomio característico y discutir la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene a A como matriz asociada. Hallar A^{2002}.

(b) *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo*

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + 2y + e^{\,t}, \\ \dot{y} &= 6x - y + 1. \end{cases}$$

Solución. **(a)** El polinomio característico $Q_A(\lambda)$ asociado a la matriz A es

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda+1)^2(1-\lambda) \ . \end{aligned}$$

Los valores propios de A son las raíces reales del polinomio característico $Q_A(\lambda)$, es decir $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 2$. Puesto que el polinomio característico $Q_A(\lambda)$ ha descompuesto totalmente, A diagonalizará si y sólo si $\dim V_{-1} = 2$, siendo $V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I_3)$ el subespacio propio asociado al valor propio múltiple $\lambda_2 = -1$. Una forma rápida de calcular $\dim V_{-1}$ es la siguiente

$$\dim V_{-1} = \dim \mathrm{Ker}(A + I_3) = 3 - \mathrm{rang}(A + I_3) = 3 - 1 = 2 \ ,$$

ya que

$$\mathrm{rang}(A + I_3) = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1 \ .$$

En definitiva $\dim V_{\lambda_2} = m_2 = 2$ y por lo tanto A diagonaliza.

Una vez se sabe que A diagonaliza, en particular existirá una matriz P no singular, tal que $D = P^{-1}AP$, siendo $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2\} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1\}$ la matriz diagonal con los valores propios en la diagonal principal repetidos según su multiplicidad algebraica y P la matriz de cambio de base de la base de vectores propios a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En definitiva, $P = \mathrm{col}\{v_1, v_2, v_3\}$ siendo v_1 vector propio de A con valor propio asociado $\lambda_1 = 1$ y v_2 y v_3 vectores propios de A con valor propio asociado $\lambda_2 = -1$. Calculemos los vectores propios v_i con $i = 1, 2, 3$.

- Puesto que $v_1 = (x, y, z) \in V_{\lambda_1}$ es vector propio de A con valor propio $\lambda_1 = 1$ se verificará $v_1 \in \mathrm{Ker}(A - I_3)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

cuya solución es $x = y = z$. Entonces $v_1 = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$ y por lo tanto $V_1 =< (1, 1, 1) >$.

- Sea $v = (x, y, z) \in V_{\lambda_2}$ vector propio de A con valor propio $\lambda_2 = -1$. Se verificará $v \in \mathrm{Ker}(A + I_3)$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

cuya solución es $z = x + y$. Entonces $v = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$, de manera que $V_{-1} =< v_2, v_3 >=< (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$.

Estos cálculos muestran que la matriz P es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

siendo su inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

En definitiva, puesto que $A = PDP^{-1}$ y

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

con lo que

$$D^{2002} = \begin{pmatrix} 1^{2002} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2002} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2002} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 ,$$

se tiene

$$A^{2002} = PD^{2002}P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) El sistema de ecuaciones diferenciales escrito en forma matricial es $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$, donde el punto denota derivación respecto de la variable independiente t y

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \ \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} , \ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} , \ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} .$$

En primer lugar se hallará la solución general del sistema diferencial homogéneo asociado $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Puesto que el polinomio característico asociado

a la matriz A es $Q_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda + 3)$ se tiene que $Q_A(\lambda)$ descompone totalmente y además todos los valores propios de A son simples. En consecuencia A diagonaliza, de manera que, existe una matriz P no singular tal que $D = P^{-1}AP$ con $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$, siendo $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -3$ los valores propios de A con vectores propios asociados v_1 y v_2 respectívamente y $P = \text{col}\{v_1, v_2\} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculemos los vectores propios v_i asociados a cada valor propio λ_i.

- Sea $v_1 = (a, b)$ vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 5$. Entonces se verifica $(A - 5I_2)v_1 = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $a = b$. En definitiva $v_1 = (a, a) = a(1, 1)$ y $\text{Ker}(A - 5I_2) = < (1, 1) >$.

- Sea $v_2 = (c, d)$ vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -3$. Entonces se verifica $(A + 3I_2)v_2 = 0$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $d = -3c$. Por lo tanto $v_1 = (c, -3c) = c(1, -3)$ con lo que $\text{Ker}(A + 3I_2) =< (1, -3) >$.

A partir del anterior cálculo se tiene que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} ,$$

siendo su inversa

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Sea $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^t$ y realizemos el cambio lineal de variables $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{x}$. Entonces, el sistema diferencial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ se escribe en forma desacoplada $\dot{\mathbf{z}} = D\mathbf{z}$, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

Se tiene pues $\dot{z_1} = 5z_1$, $\dot{z_2} = -3z_2$, cuya solución es

$$z_1(t) = c_1 e^{5t} \ , \quad z_2(t) = c_2 e^{-3t} \ ,$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias. Finalmente, deshaciendo el cambio de variables efectuado se obtiene la solución general $\mathbf{x}^{(h)}$ del sistema homogéneo asociado. En concreto

$$\mathbf{x}^{(h)}(t) = P\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t} \\ c_1 e^{5t} - 3c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

En segundo lugar se buscará una solución particular $\mathbf{x}^{(p)}$ del sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ a partir del método de variación de constantes. Se ha visto anteriormente que la solución general del sistema homogéneo asociado es $\mathbf{x}^{(h)}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$, siendo

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

El método de variación de constantes consiste en hallar una solución particular $\mathbf{x}^{(p)}$ del sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ de la forma $\mathbf{x}^{(p)}(t) = c_1(t)\mathbf{x}^{(1)} + c_2(t)\mathbf{x}^{(2)}$, donde ahora c_1 y c_2 son funciones de t a determinar. Tras un desarrollo se demuestra que

$$\mathbf{x}^{(p)}(t) = B(t) \int B^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\, dt ,$$

siendo $B(t) = \mathrm{col}\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\}$ la matriz fundamental, es decir,

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

Puesto que la matriz inversa de B es

$$B^{-1}(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{pmatrix} ,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(p)}(t) &= \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} \int \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{3t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} e^{-5t} + 3e^{-4t} \\ -e^{3t} + e^{4t} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-3t} \\ e^{5t} & -3e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{5}e^{-5t} - \frac{3}{4}e^{-4t} \\ \frac{-1}{3}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{15} - \frac{1}{8}e^{t} \\ \frac{1}{5} - \frac{3}{8}e^{t} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Finalmente, la solución general $\mathbf{x}$ del sistema no homogéneo $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$ es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(h)}(t) + \mathbf{x}^{(p)}(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{5t} + c_2e^{-3t} \\ c_1e^{5t} - 3c_2e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2}{15} - \frac{1}{8}e^{t} \\ \frac{1}{5} - \frac{3}{8}e^{t} \end{pmatrix} ,$$

es decir

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{5t} + c_2e^{-3t} - \frac{2}{15} - \frac{1}{8}e^{t} , \\ y(t) &= c_1e^{5t} - 3c_2e^{-3t} + \frac{1}{5} - \frac{3}{8}e^{t} . \end{aligned}$$

19. Hallar sucesión que verifica la recurrencia dada por $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1$ con las condiciones iniciales $y_0 = y_1 = 1$.

Solución. En primer lugar se hallará la solución general de la ecuación en diferencias finitas lineal de segundo orden homogénea asociada $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$. Escrita en forma matricial se obtiene

$$\begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} ,$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Puesto que $(y_2, y_1)^t = A(y_1, y_0)^t$, $(y_3, y_2)^t = A(y_2, y_1)^t = A^2(y_1, y_0)^t$, ..., se tiene por inducción que

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} . \tag{4.1}$$

El polinomio característico de A es $Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, de manera que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Puesto que ambos valores propios son simples y $Q_A(\lambda)$ ha descompuesto totalmente se sabe que A diagonaliza. En particular existe una matriz P no singular tal que $D = P^{-1}AP$, siendo $D = \mathrm{diag}\{1, 2\}$ y $P = \mathrm{col}\{v_1, v_2\}$ siendo v_i vector propio de A asociado al valor propio λ_i. Entonces, calcularemos la potencia A^{n-1} mediante la relación $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$.

- Sea $v_1 = (x, y)$ vector propio de A con valor propio $\lambda_1 = 1$, es decir, $v_1 \in \mathrm{Ker}(A - I_2)$. Entonces se verificará

  $$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $x = y$. En definitiva $v_1 = (x, x) = x(1, 1)$.
- Sea $v_2 = (x, y)$ vector propio de A con valor propio $\lambda_2 = 2$. Entonces $v_2 \in \mathrm{Ker}(A - 2I_2)$, es decir,

  $$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

  cuya solución es $x = 2y$. Se tiene pues que $v_2 = (2y, y) = y(2, 1)$.

El cálculo anterior muestra que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

cuya inversa es

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= PD^{n-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n - 1 & 2(1-2^{n-1}) \\ 2^{n-1}-1 & 2(1-2^{n-2}) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

A partir de (4.1), se obtiene que el término general de la ecuación homogénea asociada es $y_n^{(h)} = (2^n - 1)y_1^{(h)} + 2(1-2^{n-1})y_0^{(h)}$.

En segundo lugar se hallará una solución particular de la ecuación en diferencias finitas lineal de segundo orden no homogénea $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + f(n)$, siendo $f(n) = 1$. Puesto que f es un polinomio en n de grado cero y la matriz A tiene el valor propio 1 con multiplicidad 1, se ensaya la solución particular $y_n^{(p)} = an$, siendo a una constante real a determinar. Imponiendo $y_{n+2}^{(p)} = 3y_{n+1}^{(p)} - 2y_n^{(p)} + 1$ se obtiene $a = -1$, de manera que $y_n^{(p)} = -n$.

Finalmente, la solución general de la ecuación $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n + 1$ es $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = (2^n-1)y_1^{(h)} + 2(1-2^{n-1})y_0^{(h)} - n$. Las constante $y_1^{(h)}$ e $y_0^{(h)}$ se calculan imponiendo que $y_0 = y_1 = 1$, de donde se obtiene $y_0^{(h)} = 1$ e $y_1^{(h)} = 2$. En definitiva

$$y_n = 2(2^n - 1) + 2(1 - 2^{n-1}) - n .$$

20. *Encontrar los valores propios y los vectores propios del endomorfismo de* $\mathbb{R}^4$ *que posee como matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Solución. Si llamamos A a la matriz del enunciado, el polinomio característico de la matriz A es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} .$$

Puesto que la matriz $A - \lambda I_4$ es triangular superior, su determinante es directamente el producto de los elementos de su diagonal principal y por

lo tanto $Q_A(\lambda) = \lambda^4$. Tenemos pues un único valor propio $\lambda = 0$ con multiplicidad algebraica 4.

Calculemos ahora los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 0$. Sea $v = (x, y, z, t)$ uno de tales vectores propios. Entonces se verificará que $Av = \lambda v = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Este sistema lineal homogéneo es triangular superior y tiene por solución $y = z = t = 0$. En definitiva, los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 0$ son $v = (x, 0, 0, 0) = x(1, 0, 0, 0)$. Por lo tanto el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 0$ es $V_0 =< (1, 0, 0, 0) >$ siendo $\dim V_0 = 1$ la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda = 0$. Puesto que, aunque el polinomio característico ha descompuesto totalmente, las multiplicidades algebraica y geométrica asociadas al valor propio $\lambda = 0$ son distintas, se concluye que A no diagonaliza.

21. *Sea λ un valor propio de una matriz A. Demostrar que $p(\lambda)$ es valor propio de $p(A)$ para cualquier polinomio p.*

Solución. Sea v un vector propio asociado al valor propio λ, es decir, $Av = \lambda v$ con $v \neq 0$. Puesto que $A^2 v = AAv = \lambda Av = \lambda^2 v$, utilizando un argumento de inducción se tiene

$$A^k = \lambda^k v \ , \ k = 0, 1, 2, \dots \ ,$$

donde se ha tenido en cuenta que A^0 es la matriz identidad I del mismo orden que A. Hemos demostrado hasta el momento que, si λ es un valor propio de una matriz A entonces λ^k es un valor propio de la matriz A^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

El polinomio p se escribe de la forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ con $a_k \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} p(A)v &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k \right) v = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k v = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k v \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) v = p(\lambda) v \ , \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado.

22. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} ,$$

(i) *Calcular los valores de los parámetros reales a, b y c de manera que A posea el valor propio $\lambda = 1$ con vector propio asociado $v = (1, 1, 1)$.*

(ii) *Hallar los vectores y valores propios asociados a A para los valores de a, b y c hallados en el apartado anterior. ¿Diagonaliza la matriz A?*

Solución. **(i)** Si $\lambda = 1$ es valor propio de A con vector propio asociado $v = (1, 1, 1)$ se verificará $Av = \lambda v$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

En definitiva, de la anterior ecuación se obtiene $a = b = -2$, $c = -3$.

(ii) Con los valores hallados $a = b - 2$, $c = -3$, el polinomio característico Q_A asociado a la matriz A es

$$Q_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 .$$

Por lo tanto, los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 2$.

Puesto que el valor propio $\lambda_1 = 1$ es simple, el subespacio propio V_1 asociado al valor propio 1 tiene dimensión 1. Como ya conocemos del apartado anterior se tiene que $V_1 =< (1, 1, 1) >$. Sólo falta pues obtener los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = -1$. Sea V_{-1} el subespacio propio asociado al valor propio -1 y sea $w = (x, y, z) \in V_{-1}$. Entonces se verifica $(A + I_3)w = 0$. Desarrollando esta ecuación se obtiene el sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

que es compatible indeterminado, siendo sus soluciones de la forma $z = x + y$. Se tiene pues que $w = (x, y, x + y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Se ha probado que $V_{-1} =< (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$, siendo $\dim V_{-1} = 2 = m_2$. Por lo tanto A diagonaliza.

Capítulo 5

Formas Bilineales y Formas Cuadráticas

5.1. Resumen de teoría

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una aplicación $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ es una *forma bilineal* si $\forall u, v, w \in E$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisface:

(i) $\phi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\phi(u, w) + \beta\phi(v, w)$;

(ii) $\phi(w, \alpha u + \beta v) = \alpha\phi(w, u) + \beta\phi(w, v)$. Las formas bilineales ϕ sobre E se denotarán por $\phi \in B(E)$.

Formas Bilineales y Matrices: Sea $\phi \in B(E)$ y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E. Sean $x, y \in E$ tales que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Entonces $\phi(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \phi(v_i, v_j)$. Una representación matricial es $\phi(x, y) = x^t A y$, siendo $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$, $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t$ y $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la llamada *matriz asociada a* ϕ en la base $\mathcal{B}$ cuyos elementos son $a_{ij} = \phi(v_i, v_j)$.

Teorema 10 *Sea $\phi \in B(E)$ y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ dos bases de E. Sean A y A' las matrices asociadas a ϕ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente. Entonces $A' = P^t A P$, siendo P la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.*

Dos matrices A y B se dice que son *congruentes* si existe una matriz no singular P tal que $B = P^t A P$. En este caso $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}B$. Se define entonces el *rango* de una forma bilineal ϕ como el rango de cualquiera de sus matrices asociadas y se denota por $\mathrm{rang}\phi$.

Clasificación 1 de Formas Bilineales: $\phi \in B(E)$ se dice que es *simétrica* si verifica $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ $\forall x, y \in E$ y *antisimétrica* si $\phi(x, y) = -\phi(y, x)$ $\forall x, y \in E$.

Es fácil ver que $\phi \in B(E)$ es simétrica o antisimétrica si y sólo si su matriz asociada A en cualquier base de E es simétrica ($A^t = A$) o antisimétrica

($A^t = -A$) respectivamente. Además, si ϕ es simétrica, se define su *núcleo* como $\text{Ker}\phi = \{y \in E \ : \ \phi(x,y) = 0 \ \forall x \in E\}$.

Clasificación 2 de Formas Bilineales Simétricas: Se dice que $\phi \in B(E)$ simétrica es *degenerada* si $\text{Ker}\phi \neq \{0_E\}$ y se llama *no degenerada* si $\text{Ker}\phi = \{0_E\}$.

Proposición 9 *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\phi \in B(E)$ simétrica. Entonces* $\text{dim}E = \text{dim Ker}\phi + \text{rang}\phi$.

Corolario 2 *Sea $\phi \in B(E)$ simétrica. Entonces ϕ es no degenerada si y sólo si* $\text{rang}\phi = \text{dim}E$.

Nótese que una forma bilineal $\phi \in B(E)$ simétrica es degenerada o no degenerada si y sólo si $\det A = 0$ o $\det A \neq 0$ respectivamente, siendo A la matriz asociada a ϕ en cualquier base de E.

Clasificación 3 de Formas Bilineales: Sea $\phi \in B(E)$. Entoces:
(i) ϕ es *definida positiva* si $\phi(x,x) > 0 \ \forall x \in E$ con $x \neq 0_E$.
(ii) ϕ es *definida negativa* si $\phi(x,x) < 0 \ \forall x E$ con $x \neq 0_E$.
(iii) ϕ es *semidefinida positiva* si $\phi(x,x) \geq 0 \ \forall x \in E$.
(iv) ϕ es *semidefinida negativa* si $\phi(x,x) \leq 0 \ \forall x \in E$.
(v) En caso contrario ϕ es *no definida*.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces, se define el *menor principal de orden i* de la matriz A, y se denota por Δ_i con $i = 1, \ldots, n$, como el determinante formado con las i primeras filas y columnas de A. En particular $\Delta_n = \det A$.

Teorema 11 (Sylvester) *Sea $\phi \in B(E)$ simétrica y Δ_i con $i = 1, \ldots, n$ todos los menores principales de una matriz asociada a ϕ. Entonces:*
(i) ϕ es definida positiva si y sólo si $\Delta_i > 0 \ \forall i$;
(ii) ϕ es definida negativa si y sólo si $(-1)^i \Delta_i > 0 \ \forall i$;
(iii) Si $\Delta_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $\Delta_n = 0$ entonces ϕ es semidefinida positiva;
(iv) Si $(-1)^i \Delta_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $\Delta_n = 0$ entonces ϕ es semidefinida negativa;
(v) Si $\Delta_n \neq 0$ y ϕ no es ni definida positiva ni definida negativa entonces ϕ es no definida.

Proposición 10 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Entonces, todas las raíces de su polinomio característico son reales y además A siempre diagonaliza.*

Teorema 12 *Sea $\phi \in B(E)$ simétrica y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz asociada a ϕ en alguna base de E. Sean λ_i con $i = 1, \ldots, n$ los valores propios de A. Entonces:*
(i) ϕ es definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0 \ \forall i$;
(ii) ϕ es definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0 \ \forall i$;

(iii) ϕ *es semidefinida positiva si y sólo si* $\lambda_i \geq 0$ $\forall i$ *y además existe un* $\lambda_j = 0$*;*

(iv) ϕ *es semidefinida negativa si y sólo si* $\lambda_i \leq 0$ $\forall i$ *y además existe un* $\lambda_j = 0$*;*

(v) ϕ *es no definida si y sólo si existe un* $\lambda_i > 0$ *un* $\lambda_j < 0$.

Se define un *producto escalar* ϕ como una forma bilineal simétrica y definida positiva. Un *espacio euclídeo* es un par (E, ϕ), siendo E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y ϕ un producto escalar sobre E. El *producto escalar euclídeo ordinario* es aquel que tiene asociado en la base canónica la matriz identidad, es decir $\phi(x, y) = x^t y$. Se define la *norma* de un vector $x \in E$ como $\|x\| = \sqrt{\phi(x, x)} \geq 0$. Además, los vectores del conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ son *ortogonales* si $\phi(v_i, v_j) = 0$ $\forall i \neq j$ y son *ortonormales* si son ortogonales y $\phi(v_i, v_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, n$.

Proposición 11 *Un conjunto de vectores ortogonales siempre es linealmente independiente.*

Proposición 12 *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *simétrica. Entonces, los vectores propios de* A *asociados a valores propios diferentes son ortogonales respecto del producto escalar euclídeo ordinario.*

Una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si es invertible y además $P^{-1} = P^t$, es decir, $P^t P = P P^t = I_n$.

Proposición 13 *Sea* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *ortogonal con* $P = \mathrm{col}\{v_1, \ldots, v_n\} = \mathrm{fil}\{w_1, \ldots, w_n\}$*. Entonces, los conjuntos* $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *son ortonormales respecto del producto escalar euclídeo ordinario.*

Teorema 13 (Ley de Inercia) *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *simétrica. Entonces, existe una matriz ortogonal* P *tal que* $D = P^t A P = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $\phi \in B(E)$ simétrica. Entonces, se define la *signatura* de ϕ como $\mathrm{sig}\phi = p - n$, siendo p y n el número de valores propios positivos y negativos respectivamente de cualquier matriz asociada a ϕ. Además, se tiene que el rango de ϕ es $\mathrm{rang}\phi = p + n$.

Obsérvese que el Teorema 13 asegura que, para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica, siempre existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores ortonormales respecto del producto escalar euclídeo ordinario tal que además dicha base está formada por vectores propios de A. En particular, el Teorema 13 muestra que cualquier forma bilineal $\phi \in B(\mathbb{R}^n)$ simétrica diagonaliza.

Formas Cuadráticas: Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Una aplicación $q : E \to \mathbb{R}$ se denomina *forma cuadrática* si $q(x) = \phi(x, x)$ para alguna $\phi \in B(E)$ simétrica. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz simétrica asociada a la forma bilineal simétrica ϕ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, entonces $q(x) = x^t A x = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$. Por el Teorema 13, toda forma cuadrática q tiene

una representación $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$ conocida como la *forma reducida* de q.

Clasificación de Cónicas y Cuádricas:

Sistema de referencia: Se dice $\{O, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{R}^n$ si O es un punto de $\mathbb{R}^n$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. El punto O es llamado origen del sistema de referencia. Si la base del sistema de referencia es ortogonal (ortonormal), se dice que el sistema de referencia es ortogonal (ortonormal). Se define *sistema de referencia canónico* al sistema de referencia que tiene como origen el punto $O = (0, \ldots, 0)$ y como base del sistema referencia la base canónica.

Coordenadas de un punto: Si $\{O, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{R}^n$ para un punto P de $\mathbb{R}^n$ la expresión del vector $\vec{OP}$ como combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ es única. Si $\vec{OP} = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$ se dice que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las *coordenadas* de P en el sistema de referencia $\{O, u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Variedad cuadrática de $\mathbb{R}^n$: Fijado un sistema de referencia ortonormal de $\mathbb{R}^n$, definimos *variedad cuadrática* como el conjunto de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$$

donde a_{ij}, b_i y $c \in \mathbb{R}$ con $a_{ij} = a_{ji}$. La forma matricial de esta ecuación es

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2(b_1, b_2, \ldots, b_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c = 0.$$

Si definimos los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)^t \in \mathbb{R}^n$ y la matriz simétrica $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la ecuación de la variedad cuadrática se escribe de la forma $x^tAx + 2b^tx + c = 0$.

Las variedades cuadráticas de $\mathbb{R}^2$ se llaman *cónicas* y las variedades cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ se llaman *cuádricas*. La clasificación de una cónica o una cuádrica consiste en encontrar un sistema de referencia ortonormal en el cual la cónica o cuádrica posea la forma más simple posible, llamada *ecuación reducida* de la cónica o de la cuádrica. La manera de encontrar la forma reducida es la siguiente:

(i) Cambio de base del sistema de referencia. Los nuevos vectores de la base son los vectores propios ortonormalizados de los valores propios reales asociados a la matriz simétrica A. Geométricamente, este proceso corresponde a realizar un cambio de coordenadas del tipo rotación o giro.

(ii) Cambio del origen del sistema de referencia mediante una traslación.

Ecuaciones reducidas de las cónicas: Dada una cónica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

existe un sistema de referencia en el cual la ecuación adopta una de las siguientes formas:

$a^2x^2 + b^2y^2 = 1,$	Elipse,
$a^2x^2 - b^2y^2 = 1,$	Hipérbola,
$ax^2 + y = 0, \text{ ó } x + by^2 = 0,$	Parábola,
$a^2x^2 + b^2y^2 = -1,$	Cónica irreducible imaginaria,
$a^2x^2 + b^2y^2 = 0,$	Par de rectas imaginarias no paralelas,
$a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$	Par de rectas reales no paralelas,
$a^2x^2 = 1, \text{ ó } b^2y^2 = 1,$	Par de rectas reales paralelas,
$a^2x^2 = -1, \text{ ó } b^2y^2 = -1,$	Par de rectas imaginarias paralelas,
$x^2 = 0, \text{ ó } y^2 = 0,$	Recta doble real,
$x = 0, \text{ ó } y = 0,$	Recta real.

Ecuaciones reducidas de las cuádricas: Dada una cuádrica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + +2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

existe un sistema de referencia en el cual la ecuación adopta una de las siguientes formas:

$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$	Elipsoide real,
$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = -1,$	Elipsoide imaginario,
$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 1,$	Hiperboloide de una hoja,
$a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 = 1,$	Hiperboloide de dos hojas,
$a^2x^2 + b^2y^2 + z = 0,$	Paraboloide elíptico,
$a^2x^2 - b^2y^2 + z = 0,$	Paraboloide hiperbólico,
$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0,$	Cono imaginario,
$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0,$	Cono real,
$a^2x^2 + b^2y^2 = 1,$	Cilindro elítico,
$a^2x^2 - b^2y^2 = 1,$	Cilindro hiperbólico,
$a^2x^2 + b^2y^2 = -1,$	Cilindro imaginario,
$ax^2 + y = 0,$	Cilindro parabólico,
$a^2x^2 + b^2y^2 = 0,$	Par de planos imaginarios no paralelos,
$a^2x^2 = -1,$	Par de planos imaginarios paralelos,
$a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$	Par de planos reales no paralelos,
$a^2x^2 = 1,$	Par de planos reales paralelos,
$x^2 = 0,$	Plano doble real,
$x = 0,$	Plano real.

5.2. Problemas propuestos

5.2.1. Formas bilineales

1. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una forma bilineal simétrica de* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $\phi(e_1, e_1) = 1$, $\phi(u, e_1) = 1$, $\phi(e_2, e_2) = 2$, $\phi(u, e_2) = 1$, $\phi(e_3, e_3) = 5$ *y* $\phi(v, v) = 9$, *donde* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$, $u = 2e_1 - e_3$ *y* $v = e_2 - e_3$.

   a) *Probar que* ϕ *queda unívocamente determinada y encontrar la matriz asociada a* ϕ *en la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$.
   b) *Encontrar el rango y la signatura de* ϕ.
   c) *Encontrar* $< e_1 >^{\perp}$.

2. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 + y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$.

   a) *Probar que* ϕ *es una forma bilineal simétrica de* $\mathbb{R}^3$.
   b) *Encontrar la matriz asociada a* ϕ *en la base canónica.*
   c) *Encontrar el rango y la signatura de* ϕ.
   d) *Encontrar la matriz asociada a* ϕ *en la base* $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

3. *Discutir según los valores del parámetro* a *el rango y la signatura de las formas bilineales simétricas* ϕ_a *de* $\mathbb{R}^3$ *definidas por:*

$$\phi_a((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = ax_1y_1 + ax_2y_2 + (a - 1)x_3y_3 + x_1y_2 + y_1x_2$$

4. *Sea* ϕ *una forma bilineal simétrica de* $\mathbb{R}^3$ *verificando que los vectores* $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ *y* $(1, 1, 1)$ *son isótropos de* ϕ, *que* $\phi((1, 2, 0), (2, 1, 0)) = 1$ *y que* $< (3, 2, 1) >^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -2x\}$.

   a) *Encontrar la matriz asociada a* ϕ *en la base canónica.*
   b) *Encontrar el rango y la signatura de* ϕ.

5. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la forma bilineal simétrica que en la base canónica tiene como matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) *Obtener la expresión de la forma bilineal* ϕ.
   b) *Probar que* ϕ *es no degenerada y definida positiva.*
   c) *Encontrar una base ortonormal para* ϕ.
   d) *Dar la matriz de* ϕ *en esta base ortonormal y la matriz de cambio de base.*

6. *La matriz de la forma bilineal ϕ de $\mathbb{R}^2$ en la base canónica es*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una base en la que ϕ diagonaliza.

7. *La matriz de la forma bilineal ϕ en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una base ortonormal en la que ϕ diagonaliza.

8. *Clasificar la formas bilineales que en la base canónica tiene como matriz asociada*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

5.2.2. Formas cuadráticas

1. *Expresar la forma cuadrática*

$$q(x, y, z) = 10x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xy + 4xz + 4yz,$$

como suma de cuadrados.

2. *Expresar la forma cuadrática*

$$q(x, y, z) = 5x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy + 4xz + 8yz,$$

como suma de cuadrados mediante un cambio ortogonal.

3. *Clasificar la forma cuadrática $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5y^2 - 6xy + 6xz + 2yz$, y encontrar su expresión canónica afín y euclídea.*

4. *La matriz de una forma bilineal simétrica de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica es*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular su matriz asociada en la base $\{(1, 2, 1), (2, 1, -2), (-1, 2, -2)\}$ y la expresión de la forma cuadrática asociada a esta forma bilineal en las dos bases.

5. *Dada la forma cuadrática de* $\mathbb{R}^3$

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz + 4yz,$$

calcular la matriz de la forma bilineal simétrica asociada y su radical.

Indicación: El radical de una forma bilineal ϕ *es el conjunto de vectores* $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ *tales que* $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ *para todo* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

6. *Considerar la forma cuadrática* $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$ *y sea* ϕ *la forma bilineal asociada.*

   a) *Calcular el rango y la signatura de* ϕ.
   b) *Encontrar una base ortogonal para* ϕ.
   c) *Encontrar el subespacio de vectores isótropos.*

7. *Encontrar la forma reducida y dar una base ortogonal de las formas cuadráticas siguientes:*

   a) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$.
   b) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 6xy - 2yz$.
   c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz$.
   d) $2xy + 2xz + 2yz$.
   e) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz$.
   f) $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2t^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2yt - 2zt$.

5.2.3. Aplicaciones: Clasificación de cónicas

1. *Calcular la ecuación de la elipse que tiene los focos en los puntos* $(2, 1)$ *y* $(0, 3)$ *y el semieje mayor igual a 2.*

2. *Calcular la ecuación de la hipérbola que tiene los focos en los puntos* $(-1, 2)$ *y* $(3, 0)$ *y el semieje real igual a 2.*

3. *Calcular la ecuación de la parábola que tiene el foco en el punto* $(-2, 1)$ *y la recta directriz es la recta de ecuación* $x + 2y - 3 = 0$.

4. *Calcular la ecuación reducida de la cónica* $10x^2 - 12xy - 6y^2 - 12x - 12y - 129 = 0$ *a partir de las ecuaciones de giro y de traslación. Clasificarla y calcular sus ejes.*

5. *Calcular la ecuación reducida de la cónica* $x^2 + 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$ *a partir de las ecuaciones de giro y de traslación. Clasificarla y calcular sus ejes.*

6. *Estudiar la cónica de ecuación dada y representarla gráficamente.*

   a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 16x + 16 = 0$.

b) $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y - 11 = 0$.

c) $3x^2 - 4xy - 8x + 8y = 0$.

d) $3x^2 + 10xy - 8y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.

e) $5x^2 + 2xy + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$.

7. *Clasificar, dibujar, encontrar la ecuación reducida y dar las coordenadas de la nueva referencia de cada una de las cónicas siguientes, que en una referencia ortonormal tienen por ecuación:*

   a) $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$.

   b) $x^2 + 4y^2 - 4y + 2x - 2 = 0$.

   c) $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$.

   d) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$.

   e) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y + 28 = 0$.

   f) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$.

   g) $x^2 - 6xy + y^2 + 6x + 6y + 9 = 0$.

   h) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$.

8. *Encontrar la ecuación en la referencia canónica de la elipse de centro* $(6, -6)$ *y semiejes* $a = 5$ *y* $b = 3$ *en la dirección de los vectores* $(1, -1)$ *y* $(1, 1)$.

9. *Estudiar el conjunto de puntos de* $\mathbb{R}^3$ *que equidistan del plano de ecuación* $x + y + 2z = 6$ *(en referencia ortonormal) y del punto* $(0, 0, 0)$.

5.2.4. Aplicaciones: Clasificación de cuádricas

1. *Estudiar la cuádrica de ecuación dada y representarla gráficamente.*

   a) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz + 6y - 24z + 24 = 0$.

   b) $x^2 - y^2 + 4xz - 4yz - 6x + 6y - 3 = 0$.

   c) $9x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 12xy - 12xz - 2x + 24y + 14z - 5 = 0$.

   d) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 48x - 24y + 84 = 0$.

   e) $4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xy + 4yz - 4xz + 2x - 2y + 4z - 6 = 0$.

   f) $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 + 5xy + 5yz - 3xz - 5x - 8y + 5z + 3 = 0$.

2. *Clasificar, dibujar, encontrar la ecuación reducida y dar las coordenadas de la nueva referencia de cada una de las cuádricas siguientes, que en una referencia ortonormal tienen por ecuación:*

   a) $x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$.

   b) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 5 = 0$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 10 = 0$.

d) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$.

e) $y^2 - 4xz + 1 = 0$.

f) $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10xy - 8xz - 10yz + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$.

g) $x^2 + y^2 + 10z^2 - 6xz + 2yz - 3x + 9z + 1 = 0$.

3. *Clasificar según los valores de a la cuádrica de ecuación*

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy + 4x + 4y - 2az = 2 + 5a$$

5.3. Problemas resueltos

1. *Sea* $\varphi : \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la forma bilineal que en la base canónica tiene como matriz asociada*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) *Encontrar la matriz asociada a* φ *en la base* $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *utilizando el cambio de base de una forma bilineal.*

(ii) *Encontrar el rango y la signatura de* φ *y una base ortonormal en la que* φ *diagonaliza.*

Solución. **(i)** Sea A la matriz asociada a φ en la base canónica y sea B la matriz asociada a φ en la base $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. La relación existente entre dichas matrices es el cambio de base de una forma bilineal que viene dado por $B = C^T AC$. La matriz A es la matriz del enunciado del problema y la matriz C viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de manera que su traspuesta es

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz B viene dada por el siguiente producto de matrices

$$\begin{aligned} B = C^T AC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 12 \\ 5 & 12 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Otra forma de resolver el problema es utilizando la definición de forma bilineal, es decir, la matriz B vendrá dada por la expresión

$$B = \begin{pmatrix} \varphi(e_1,e_1) & \varphi(e_1,e_2) & \varphi(e_1,e_3) \\ \varphi(e_2,e_1) & \varphi(e_2,e_2) & \varphi(e_2,e_3) \\ \varphi(e_3,e_1) & \varphi(e_3,e_2) & \varphi(e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

donde $\varphi(e_i,e_j) = e_i^T A e_j$ y los e_i son los vectores de la nueva base. Por lo tanto, sabiendo que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ y $e_3 = (1,1,1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1,e_1) &= (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \ , \\
\varphi(e_1,e_2) &= (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \ , \\
\varphi(e_1,e_3) &= (1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \ , \\
\varphi(e_2,e_2) &= (1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \ , \\
\varphi(e_2,e_3) &= (1,1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \ , \\
\varphi(e_3,e_3) &= (1,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 17 \ .
\end{aligned}$$

Además, como φ es una forma bilineal simétrica puesto que su matriz asociada en cualquier base es simétrica, se tiene que $\varphi(e_i,e_j) = \varphi(e_j,e_i)$ con lo cual se completa por simetría todos los elementos de la matriz B.

(ii) El polinomio característico de la matriz asociada a la forma bilineal es

$$Q_A(\lambda) = \det|A - \lambda I_3| = -36 + 7\lambda^2 - \lambda^3 = (3-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2),$$

descompone totalmente y además todos los valores propios $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 6$ son simples. Por tanto el rango de φ es 3 y la signatura es $(2,1)$. Como los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales, para encontrar una base ortonormal es suficiente con encontrar los vectores propios de cada valor propio y normalizarlos. Su cálculo es el siguiente:

- Sea $v_1 = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_3)$, entonces v_1 verifica $(A - \lambda_1 I_3)v_1 = 0$. Resolviendo el sistema homogéneo se obtiene $v_1 = (-1, 0, 1)$.
- Sea $v_2 = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_3)$, entonces v_2 verifica $(A - \lambda_2 I_3)v_2 = 0$. En este caso se obtiene $v_2 = (1, -1, 1)$.
- Sea $v_3 = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_3 I_3)$, entonces v_3 verifica $(A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0$. De donde se obtiene $v_3 = (1, 2, 1)$.

Finalmente normalizando los vectores, la base ortonormal en la cual la matriz asociada a la forma bilineal φ es diagonal esta formada por los siguientes vectores $\bar{v}_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, $\bar{v}_2 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ y $\bar{v}_3 = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$.

2. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida de la forma* $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + zx' + 2yz' + zz'$.

   (a) *Demostrar que* ϕ *es una forma bilineal sobre* $\mathbb{R}^3$.

   (b) *Calcular la matriz asociada a* ϕ *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *y utilizarla para hallar* $\phi((1, 2, 0), (0, -1, 0))$.

   (c) *¿Es* ϕ *degenerada?*

Solución. **(a)** La aplicación ϕ será bilineal si es lineal respecto de sus dos argumentos, es decir, si $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica $\phi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\phi(u, w) + \beta\phi(v, w)$ y $\phi(w, \alpha u + \beta v) = \alpha\phi(w, u) + \beta\phi(w, v)$. Sean $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ y $w = (x'', y'', z'')$ y veamos que ϕ es bilineal.

- Puesto que

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha u + \beta v, w) &= \phi(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z'), (x'', y'', z'')) \\
&= \phi((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'), (x'', y'', z'')) \\
&= 2(\alpha x + \beta x')x'' + (\alpha z + \beta z')x'' \\
&\quad +2(\alpha y + \beta y')z'' + (\alpha z + \beta z')z'' \\
&= \alpha(2xx'' + zx'' + 2yz'' + zz'') \\
&\quad +\beta(2x'x'' + z'x'' + 2y'z'' + z'z'') \\
&= \alpha\phi((x, y, z), (x'', y'', z'')) \\
&\quad +\beta\phi((x', y', z'), (x'', y'', z'')) \\
&= \alpha\phi(u, w) + \beta\phi(v, w)\ ,
\end{aligned}$$

  se verifica la primera condición de bilinealidad.

- Un segundo cálculo semejante al anterior muestra que

$$\begin{aligned}
\phi(w, \alpha u + \beta v) &= \phi((x'', y'', z''), \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) \\
&= \phi((x'', y'', z''), (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2x''(\alpha x+\beta x')+x''(\alpha z+\beta z') \\
&\quad +2z''(\alpha y+\beta y')+z''(\alpha z+\beta z') \\
&= \alpha(2xx''+zx''+2yz''+zz'') \\
&\quad +\beta(2x'x''+z'x''+2y'z''+z'z'') \\
&= \alpha\phi((x'',y'',z''),(x,y,z)) \\
&\quad +\beta\phi((x'',y'',z''),(x',y',z')) \\
&= \alpha\phi(w,u)+\beta\phi(w,v)\ ,
\end{aligned}$$

de manera que se verifica también la segunda condición de bilinealidad.

(b) Sea $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calculemos las siguientes imágenes dadas por ϕ

$$\begin{aligned}
\phi(e_1,e_1) &= \phi((1,0,0),(1,0,0))=2\ ,\\
\phi(e_2,e_2) &= \phi((0,1,0),(0,1,0))=0\ ,\\
\phi(e_3,e_3) &= \phi((0,0,1),(0,0,1))=1\ ,\\
\phi(e_1,e_2) &= \phi((1,0,0),(0,1,0))=0\ ,\\
\phi(e_1,e_3) &= \phi((1,0,0),(0,0,1))=1\ ,\\
\phi(e_2,e_1) &= \phi((0,1,0),(1,0,0))=0\ ,\\
\phi(e_2,e_3) &= \phi((0,1,0),(0,0,1))=0\ ,\\
\phi(e_3,e_1) &= \phi((0,0,1),(1,0,0))=0\ ,\\
\phi(e_3,e_2) &= \phi((0,0,1),(0,1,0))=2\ .
\end{aligned}$$

La matriz $A=(a_{ij})$ asociada a ϕ en la base canónica $\{e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tendrá por elementos $a_{ij}=\phi(e_i,e_j)$, de manera que

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\ .$$

Finalmente

$$\phi((1,2,0),(0,-1,0))=(1\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=0\ .$$

(c) Por definición, ϕ será degenerada si $\text{rang}\phi<\dim\mathbb{R}^3=3$. Puesto que $\text{rang}\phi=\text{rang}A=2<3$ se tiene que ϕ es degenerada.

3. *Sea* $\varphi:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *la forma bilineal definida por* $\varphi((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))$ $=-x_1x_2+x_2y_1+x_1y_2+y_1y_2+x_2z_1+y_2z_1+x_1z_2+y_1z_2-z_1z_2$.

(i) *Encontrar la matriz asociada a* φ *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

(ii) *Demostrar que φ es simétrica y no degenerada. Encontrar el núcleo de φ.*

(iii) *Encontrar la matriz asociada a φ en la base* $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

(iv) *Encontrar el rango y la signatura de φ y una base ortonormal en la que φ diagonaliza.*

Solución. **(i)** Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, es decir, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$. La matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ asociada a la forma bilineal φ en la base canónica tiene, por definición, los elementos $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ con $i, j = 1,2,3$. En concreto $\varphi(e_1, e_1) = -1$, $\varphi(e_1, e_2) = 1$, $\varphi(e_1, e_3) = 1$, $\varphi(e_2, e_1) = 1$, $\varphi(e_2, e_2) = 1$, $\varphi(e_2, e_3) = 1$, $\varphi(e_3, e_1) = 1$, $\varphi(e_3, e_2) = 1$ y $\varphi(e_3, e_3) = -1$, de manera que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Puesto que una forma bilineal φ es simétrica si y sólo si la matriz asociada a φ en cualquier base es una matriz simétrica y hemos visto en el apartado anterior que la matriz A obtenida es simétrica, se concluye que φ es simétrica. Por otra parte, se sabe que una forma bilineal simétrica φ es degenerada si y sólo si la matriz asociada a φ en cualquier base es singular, es decir, con determinante nulo. Conocemos, por el apartado anterior, la matriz A asociada a φ en la base canónica. Como $\det A = 4 \neq 0$ se tiene que φ es no degenerada.

El núcleo de φ es, por definición, $\mathrm{Ker}\varphi = \{y \in \mathbb{R}^3 \ : \ \varphi(x,y) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3\}$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{Ker}\varphi$ si se verifica $x^t A y = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Se tiene pues que $Ay = (0,0,0)^t$, cuya única solución es $y = (0,0,0)$ ya que $\det A \neq 0$. En resumen $\mathrm{Ker}\varphi = \{(0,0,0)\}$. Obsérvese que los resultados obtenidos están en total acuerdo con el hecho de que, por ser φ una forma bilineal y simétrica definida sobre $\mathbb{R}^3$, se verificará $\dim\mathbb{R}^3 = \dim Ker\varphi + \mathrm{rang}\varphi$, es decir, $3 = 0 + 3$.

(iii) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1)$ una base de $\mathbb{R}^3$. La matriz C asociada a la forma bilineal φ en la base $\mathcal{B}$ es $C = P^t A P$, donde $P = \mathrm{col}\{v_1, v_2, v_3\}$ es la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica. En definitiva

$$\begin{aligned} C &= P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Existe otra forma de calcular la anterior matriz $C = (c_{ij})$, que consiste en calcular sus elementos $c_{ij} = \varphi(v_i, v_j)$.

(iv) El rango de la forma bilineal φ es el rango de cualquiera de sus matrices asociadas. Por ejemplo, como ya sabemos que $\det A \neq 0$, $\text{rang}\varphi = \text{rang}A = 3$.

La signatura $\text{sig}\varphi$ de la forma bilineal φ es la diferencia entre el número p de valores propios positivos y el número n de valores propios negativos que tiene cualquiera de sus matrices asociadas. En el caso que nos ocupa, el polinomio característico $Q_A(\lambda)$ de la matriz A es

$$\begin{aligned} Q_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1) \ , \end{aligned}$$

de manera que los valores propios de A son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$. Se tiene pues $p = 1$ y $n = 2$ con lo cual $\text{sig}\varphi = p - n = 1 - 2 = -1$.

Calculemos los vectores propios u_i asociados a cada valor propio λ_i para $i = 1, 2, 3$.

- Puesto que $u_1 = (x, y, z) \in V_{\lambda_1}$ es vector propio de A con valor propio $\lambda_1 = -2$ se verificará $u_1 \in \text{Ker}(A + 2I_3)$, es decir,

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

  cuya solución es $y = 0$, $x = -z$. Entonces $v_1 = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$ y por lo tanto $V_{-2} =< (-1, 0, 1) >$.

- Sea $u_2 = (x, y, z) \in V_{\lambda_2}$ vector propio de A con valor propio $\lambda_2 = -1$. Entonces se verificará $u_2 \in \text{Ker}(A + I_3)$, es decir,

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

  cuya solución es $x = z = -y$. Entonces $u_2 = (x, -x, x) = x(1, -1, 1)$ y en consecuencia $V_{-1} =< (1, -1, 1) >$.

- Si $u_3 = (x, y, z) \in V_{\lambda_3}$ vector propio de A con valor propio $\lambda_3 = 2$ se verificará $u_3 \in \text{Ker}(A - 2I_3)$, es decir,

  $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

cuya solución es $x = z$, $y = 2z$. Entonces $u_3 = (z, 2z, z) = z(1, 2, 1)$, con lo que $V_2 =< (1, 2, 1) >$.

Se tiene que, el conjunto de vectores $\{u_1, u_2, u_3\} = \{(-1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. Además, puesto que A es una matriz simétrica y los vectores u_i están asociados a valores propios λ_i diferentes, se sabe que el conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es ortogonal respecto del producto escalar euclídeo ordinario. En definitiva, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la cual φ diagonaliza es $\{u_1/\|u_1\|, u_2/\|u_2\|, u_3/\|u_3\|\}$, es decir,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \right\} .$$

4. *Sea $\{e_1, e_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y consideremos la aplicación bilineal $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\phi(e_1, e_1) = 1, \quad \phi(e_2, e_1) = -1, \quad \phi(e_1, e_2) = 1, \quad \phi(e_2, e_2) = 3.$$

(a) *Encontrar la matriz asociada a ϕ en la base $\{e_1, e_2\}$.*

(b) *Calcular $\phi(v, w)$ siendo $v = 2e_1 - 3e_2$ y $w = -e_1 + 2e_2$.*

(c) *Calcular la matriz asociada a ϕ en la base $\{u_1, u_2\}$ donde $u_1 = e_1 + e_2$ y $u_2 = -e_1 + e_2$.*

Solución. **(a)** Teniendo en cuenta que $\phi(e_1, e_1) = 1$, $\phi(e_2, e_1) = -1$, $\phi(e_1, e_2) = 1$ y $\phi(e_2, e_2) = 3$, la matriz $A = (a_{ij})$ asociada a f en la base canónica $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tendrá por elementos $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$, de manera que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(b) El cálculo de $\phi(v, w)$ es el siguiente

$$\phi((2, -3), (-1, 2)) = (2 \ \ -3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -19 .$$

(c) A es la matriz asociada a ϕ en la base canónica $\{e_1, e_2\}$ y sea B la matriz asociada a ϕ en la base $\{u_1, u_2\}$. La relación que existe entre dichas matrices proviene del cambio de base de una forma bilineal que viene dado por $B = C^T AC$ siendo C la matriz del cambio de base de la base $\{u_1, u_2\}$ a la base $\{e_1, e_2\}$. La matriz C viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Finalmente, la matriz B es

$$B = C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

5. *Sea* $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *una aplicación definida por* $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - yy'$*.*

   (i) *Demostrar que* ϕ *es una forma bilineal.*

   (ii) *Obtener la matriz asociada a* ϕ *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *y averiguar si* ϕ *es simétrica y degenerada.*

   (iii) *¿Define* ϕ *un producto escalar en* $\mathbb{R}^3$*?*

Solución. **(i)** Una aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal si $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisface:

- $\phi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\phi(u, w) + \beta\phi(v, w)$;
- $\phi(w, \alpha u + \beta v) = \alpha\phi(w, u) + \beta\phi(w, v)$.

Veamos que la aplicación $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - yy'$ es una forma bilineal. Sean $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$, $w = (x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\phi(\alpha u + \beta v, w) = \phi(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z'), (x'', y'', z'')) = \phi((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z'), (x'', y'', z'')) = (\alpha x + \beta x')x'' - (\alpha y + \beta y')y'' = \alpha(xx'' - yy'') + \beta(x'x'' - y'y'') = \alpha\phi(u, w) + \beta\phi(v, w)$;
- $\phi(w, \alpha u + \beta v) = \phi((x'', y'', z''), \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) = \phi((x'', y'', z''), (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')) = x''(\alpha x + \beta x') - y''(\alpha y + \beta y') = \alpha(x''x - y''y) + \beta(x''x' - y''y') = \alpha\phi(w, u) + \beta\phi(w, v)$.

(ii) Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La matriz $A = (a_{ij})$ asociada a ϕ en dicha base tiene por elementos $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$, de manera que, a partir de la definición $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - yy'$, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que A es una matriz simétrica, por lo tanto, ϕ es simétrica. Además, como $\operatorname{rang}\phi = \operatorname{rang}A = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, se deduce que ϕ es degenerada.

(iii) Un producto escalar es, por definición, una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Por el apartado anterior se sabe que las dos primeras condiciones son satisfechas por ϕ. Sin embargo, ϕ no es definida positiva puesto que los valores propios asociados a la matriz A no son todos estrictamente positivos. De hecho, al ser A diagonal, por simple inspección de sus elementos se ve que sus valores propios son ± 1 y 0.

6. *Calcular la ecuación reducida de la cónica* $10x^2 - 12xy - 6y^2 - 12x - 12y - 129 = 0$ *a partir de las ecuaciones de giro y de traslación. Clasificarla y calcular sus ejes.*

Solución. El proceso para obtener la ecuación reducida de esta cónica consta de dos etapas. En primer lugar, hay que encontrar las ecuaciones de giro que nos permiten diagonalizar la matriz correspondiente a la parte cuadrática de la cónica y, en segundo lugar, hay que expresar los términos obtenidos como una suma de cuadrados para obtener las ecuaciones de la traslación y la ecuación reducida.

En este caso la matriz de la parte cuadrática de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico viene dado por $Q_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 96 = (\lambda - 12)(\lambda + 8)$. Por tanto los valores propios son $\lambda_1 = 12$ y $\lambda_2 = -8$. Los vectores propios asociados a estos valores propios son $v_1 = (3, -1)$ y $v_2 = (1, 3)$. Normalizando estos vectores se obtiene $u_1 = v_1/||v_1|| = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$ y $u_2 = v_2/||v_2|| = (1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$. Por tanto, si hacemos el cambio de coordenadas o las ecuaciones del giro

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

la ecuación de la cónica en las nuevas coordenadas (x', y') es

$$12\,x'^2 - 8\,y'^2 - \frac{24}{\sqrt{10}}\,x' - \frac{48}{\sqrt{10}}\,y' - 129 = 0,$$

Como sabemos que el cambio de coordenadas es en realidad un giro se tiene que los coeficientes en x'^2 e y'^2 son los valores propios de la matriz A, que los nuevos coeficientes $2b_1$ y $2b_2$ de x' e y' vienen dados por la igualdad

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2b_1' \\ 2b_2' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b_1 \\ 2b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -24 \\ -48 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y que el término independiente c no varía.

Agrupando los términos en x' y en y' de la anterior ecuación de la cónica en dos cuadrados perfectos la podemos escribir como

$$12(x'-a)^2 - 8(y'-b)^2 + c = 12x'^2 - 8y'^2 - 24ax' + 16by' + 12a^2 - 8b^2 + c = 0.$$

Igualando los coeficientes de x' e y' y el término independiente se obtiene

$$\begin{aligned} -24a &= -\frac{24}{\sqrt{10}}, \\ 16b &= -\frac{48}{\sqrt{10}}, \\ 12a^2 - 8b^2 + c &= -129. \end{aligned}$$

De donde, obtenemos que $a = 1/\sqrt{10}$, $b = -3/\sqrt{10}$ y $c = -123$. Por tanto, la ecuación de la cónica se puede escribir de la forma

$$12\left(x' - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - 8\left(y' + \frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 123 = 0,$$

Finalmente, la ecuación reducida de la cónica es $12x''^2 - 8y''^2 - 123 = 0$ y se llega a esta ecuación mediante la traslación $x'' = x' - 1/\sqrt{10}$ e $y'' = y' + 3/\sqrt{10}$. La cónica es una hipérbola.

Los ejes de la hipérbola son rectas que pasan por el centro y tienen como vectores directores los vectores propios de la matriz A. El centro es el punto de coordenadas $(x'', y'') = (0, 0)$, o bien de coordenadas $x' = 1/\sqrt{10}$ e $y' = -3/\sqrt{10}$. Entonces, las coordenadas (x, y) del centro son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, el eje de las x'' es la recta que passa por el centro y tiene como vector director $v_1 = (3, -1)$, es decir, la recta de ecuación $x + 3y + 3 = 0$. El eje de las y'' es la recta que passa por el centro y tiene como vector director $v_2 = (1, 3)$, es decir, la recta de ecuación $3x - y - 1 = 0$. La expresión del cambio de coordenadas que lleva a la ecuación reducida es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Universitat de Lleida

1300 - 2000

700 ANYS