

Universität Regensburg

SS 2011

Vorlesungsmitschrift

# Theoretische Physik Ia

## Klassische Mechanik

Dr. Enno Scholz

3. Mai 2011

Gesetzt in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X von Tobias Dietrich

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Mechanik von Punktteilchen</b>	<b>3</b>
1.1	Bahnkurve . . . . .	3
1.2	Newtonsche Axiome . . . . .	5
1.2.1	1. Axiom - Lex Prima . . . . .	5
1.2.2	2. Axiom - Lex Secunda . . . . .	5
1.2.3	3. Axiom - Lex Tertia . . . . .	6
1.3	Fundamentale Größen und Erhaltungssätze . . . . .	6
1.3.1	Impulserhaltung . . . . .	6
1.3.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	6
1.3.3	Energieerhaltung . . . . .	7

# 1 Mechanik von Punktteilchen

Ausgangspunkt der Klassischen Mechanik: Trägheitsgesetz (Galilei) und Newtonsche Axiome. Beschreibung der Bewegung einzelner Massepunkt bzw. von Punktteilchen, d.h. Objekten deren gesammte Masse in einem Punkt konzentriert ist.

## 1.1 Bahnkurve

Beschreibung des Weges eines Punktteilchens

$$\vec{v}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \quad (1.1)$$

Hierbei benötigt:

1. Bezugssystem: Bewegung gegenüber festwer Bezugspunkte. Bezugssystem mit konstantem Koordinatensystem. Hier: 3 Ortskonstanten, 1 Zeitkonstante
2. Definition Zeit: Messung durch Uhren, d.h. Instrumente welche die Periodenzahl eines kontinuierlichen, periodischen Vorgangs messen. 1 Sekunde entspricht dem 9.191.631.777 fachen der Periodendauer zwischen den Hyperfeinstrukturniveaus im  $^{137}\text{Cs}$ .
3. Definition Länge: räumliche Ausbreitung. Vergleich mit einem Masstab. 1 Meter ist die Strecke, die Licht in Vakuum in  $1/299792458$  Sekunden zurücklegt.
4. Oben benutztes kartesisches koordinatensystem setzt die Existenz eines euklidischen bzw. ebenen Raumes voraus. (Gegensatz: gekrümmter Raum; keine kart. Koord. möglich) Im euklidischen Raum ist ebenfalls die Benutzung gekrümmter Koordinatensysteme möglich (z.B. Polar, zylinder oder Kugelkoordinaten)

### Zeitableitungen der Bahnkurve

#### Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t')}{t - t'} = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z} \quad (1.2)$$

Hier raumfestes Koordinatensystem, d.h. Einheitsvektoren  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  konstant. Im allgemeinen nicht der Fall bei krummlinigen KS (s.o.)

## Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z} \quad (1.3)$$

Andere Darstellungen der Bahnkurve:

1. Parameterdarstellung  $x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda)$
2. (ebene) Polarkoordinaten (2 dim)  $r(t), \varphi(t)$   $\varphi \in [0, 2\pi]$
3. Zylinderkoordinaten:  $\phi(t), \rho(t), z(t)$
4. Kugelkoordinaten:  $r(t), \vartheta(t)$  (Polarwinkel)  $\vartheta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi(t)$  (Azimut)  $\varphi \in [0, 2\pi]$

Bsp. Bewegung auf Kreisbahn in 2 dim

$$x(t) = R \cos(\omega t) \quad y(t) = R \sin(\omega t) \quad R, \omega \text{ konst.} \quad (1.4)$$

$$\vec{v}(t) = \omega R (-\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}) \quad (1.5)$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 R (\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}) \quad (1.6)$$

Parameterdarstellung:

$$x(\varphi) = R \cos \varphi \quad y(\varphi) = R \sin \varphi \quad t(\varphi) = \frac{\varphi}{\omega} \quad (1.7)$$

Ebene Polarkoordinaten

$$\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}(t) \quad \vec{r}(t) = R = \text{const.} \quad \varphi(t) = \omega t \quad (1.8)$$

Hier sind allerdings die Einheitsvektoren nicht raumfest:

$$\hat{r} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \quad (1.9)$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \quad (1.10)$$

$$\dot{\hat{r}} = -\dot{\varphi} \sin \varphi \hat{x} + \dot{\varphi} \cos \varphi \hat{y} = \dot{\varphi} \hat{\varphi} \quad (1.11)$$

$$\dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi} \cos \varphi \hat{x} - \dot{\varphi} \sin \varphi \hat{y} = -\dot{\varphi} \hat{r} \quad (1.12)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} r(t)\hat{r}(t) = \dot{r}(t)\hat{r}(t) + r(t)\dot{\hat{r}}(t) = R\dot{\varphi}(t)\hat{\varphi}(t) = R\omega\hat{\varphi}(t) \quad (1.13)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \omega R \dot{\hat{\varphi}}(t) = -\omega^2 R \hat{r}(t) \quad (1.14)$$

alternativ über infinitesimales Wegelement

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\varphi \hat{\varphi} \quad (1.15)$$

## 1.2 Newtonsche Axiome

Beschreibung, Erklärung und Voraussage von Beobachtungen durch möglichst einfache Gesetze und möglichst wenige Gesetze. Innerhalb der Klassischen, nicht-relativistischen Mechanik lassen sich sämtliche Phänomene aus den Newtonschen Axiomen ableiten.

Diese Axiome sind selber mathematisch nicht beweisbar, sondern werden aus Beobachtungen/Experimenten abgeleitet/postuliert.

### 1.2.1 1. Axiom - Lex Prima

Es gibt Bezugssysteme in denen die Kräftefreie Bewegung eines Massepunktes durch  $\vec{v} = \text{const.}$  beschrieben wird. Ein Solches BS wird Intertialsystem (IS) genannt.

### 1.2.2 2. Axiom - Lex Secunda

In einem IS ändert sich unter dem Einfluss einer Kraft  $\vec{F}$  der Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  eines Massepunktes mit Masse  $m$  wie

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1.16)$$

insbesondere für  $m = \text{const.}$  gilt  $\vec{F} = m\vec{a}$

Hierbei weiter zu definieren: Masse, Kraft

1. Referenzkörper mit Masse  $m_{ref}$  1 Masseneinheit (Urkilogramm)
2. Weitere Massen können nun bestimmt werden. Messung der Beschleunigung unter Einfluss einer konst. Kraft

$$F = m_{ref}a_{ref}, F = ma \Rightarrow m = m_{ref} \frac{a_{ref}}{a} \quad (1.17)$$

Gl. definiert ebenfalls Kraft.

Einheiten [Masse]=kg, [Kraft]=Newton Obige Definition gilt für träge Masse. Die schwere Masse ist proportional zur Stärke der Gravitationskraft. Exp. schwere Masse = träge Masse

Durch das 2. Axiom wird ebenfalls die Dynamik eines Massepunktes festgelegt: durch eine Differentialgleichung (DGL): falls Kraft nur von  $\vec{r}, \vec{v}, t$  abhängt.

$$\vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = m\ddot{\vec{r}}(t) (m = \text{const.}) \quad (1.18)$$

Lösung der Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingungen  $\vec{r}(0), \vec{v}(0)$  ergibt Bahnkurve.

Falls die BWG nicht explizit von der Zeit abhängen autonomes System

### 1.2.3 3. Axiom - Lex Tertia

Der Kraft mit der die Umgebung auf einen Massepunkt wirkt, entspricht stets eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft, mit der der Massepunkt auf die Umgebung wirkt.

$$\begin{aligned} \text{“Actio = Reactio“} \\ \vec{F}_{actio} = -\vec{F}_{reactio} \end{aligned}$$

bzw. für zwei Massepunkte i,j

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

wobei  $\vec{F}_{ij}$  die Kraft ist die j auf i ausübt.

Zusatz: Superpositionsprinzip: wirken mehrere Kräfte  $\vec{F}_i$  auf einen Massepunkt, gilt für resultierende Gesamtkraft:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.19)$$

## 1.3 Fundamentale Größen und Erhaltungssätze

### 1.3.1 Impulserhaltung

Wirkt auf einen Massepunkt keine Kraft, so ist der Impuls erhalten (2. Axiom)

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const.} \quad (1.20)$$

### 1.3.2 Drehimpulserhaltung

Drehimpuls eines Massepunktes am Ort  $\vec{r}$  mit Impuls  $\vec{p}$  ist:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.21)$$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad c_i = \sum_{jk} a_j b_k \varepsilon_{ijk} \quad (1.22)$$

Drehmoment, das eine Kraft  $\vec{F}$  auf einen Massepunkt am Ort  $\vec{r}$  ausübt.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.23)$$

$\vec{L}, \vec{M}$  hängen von Wahl des KS-Ursprungs ab.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{M} = \vec{M} \quad (1.24)$$

Bei verschwindendem Drehmoment ist der Drehimpuls erhalten:

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad (1.25)$$

z.B. für eine Zentralkraft  $\vec{F}_{Zentr.} \parallel \pm \vec{r}$  ist der Drehimpuls erhalten:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_Z = 0 \quad (1.26)$$

### 1.3.3 Energieerhaltung

An einem Massepunkt, der sich unter dem Einfluss einer Kraft  $\vec{F}$  von  $\vec{r}$  nach  $\vec{r} + d\vec{r}$  bewegt, wird die Arbeit

$$dW = \vec{F} \circ d\vec{r} \quad \text{Skalarprod. } \vec{a} \circ \vec{b} = c = \sum_i a_i b_i \quad (1.27)$$

geleistet.

Bewegt sich ein Teilchen längs eines Endlichen Weges  $C$ , wird an ihm die Arbeit

$$W = \int_C dW = \int_C d\vec{r} \circ \vec{F} \quad (1.28)$$

geleistet. Die Arbeit hängt von den Anfangs und Endpunkten des Weges, und i.a. auch vom Weg selber ab. Einheit: [Arbeit] = J(oule) = Nm

Linienintegral: Parameter des Weges  $C$ :

$$\vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} \quad \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1] \quad (1.29)$$

$$\int_C d\vec{r} \circ \vec{F} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \circ \vec{F} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

**Leistung** Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \circ \dot{\vec{r}} \quad (1.31)$$

$$[P] = W(\text{att}) = \frac{J}{s}$$

**Kinetische Energie**

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} \vec{p} \circ \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2m} \vec{p} \circ \vec{p} \quad (1.32)$$

damit für ( $m = \text{const.}$ )

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m}{2} 2\dot{\vec{r}} \circ \ddot{\vec{r}} = (m\ddot{\vec{r}}) \circ \dot{\vec{r}} = \vec{F} \circ \dot{\vec{r}} = P \quad (1.33)$$

**Potentielle Energie und Konservative Kräfte** Falls die Arbeit, die durch eine Kraft an einem Massenpunkt geleistet wird wegunabhängig ist, (nur vom Anfangs und Endpunkt abhängt), handelt es sich um einen konservative Kraft.

Geschlossener Weg (beliebig):

$$\oint d\vec{r} \circ \vec{F}_{Kons} = 0 \quad (1.34)$$

Die Arbeit einer konservativen Kraft, also die potentielle Energie (auch Potential)  $U$  ist also nur ortsabhängig.

$$W_{12} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) \quad (1.35)$$

Es gilt infinitesimal:

$$\vec{F}_{Kons.} \circ d\vec{r} = -dU \quad (1.36)$$

Energiesatz für konservative Kräfte:

$$\frac{dU}{dt} = -\vec{F}_{kons} \circ \dot{\vec{r}} \quad (1.37)$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \text{ falls } \vec{F} = \vec{F}_{kons} \quad (1.38)$$

die Gesamtenergie  $E = T + U$  ist bei rein konservativen Kräften erhalten  $E = \text{const.}$   
im Allgemeinen treten nicht nur konservative Kräfte auf.

$$\vec{F} = \vec{F}_{kons} + \vec{F}_{diss} \quad (1.39)$$

nicht-konservative Kräfte bzw. dissipative Kräfte:

1. Arbeit wegababhängig
2. lassen sich nicht aus einem Potential ableiten
3. Umwandlung von mech. Energie  $\rightarrow$  andere Energie
4. zeitabhängige Kräfte

Energiesatz

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + U) = \vec{F} \circ \dot{\vec{r}} - \vec{F}_{kons} \circ \dot{\vec{r}} = (\vec{F}_{kons} + \vec{F}_{diss} - \vec{F}_{kons}) \circ \dot{\vec{r}} = \vec{F}_{diss} \circ \dot{\vec{r}} \quad (1.40)$$

Für ein gegebenes Potential  $U$  berechnet sich die (konservative) Kraft als der negative Gradient

$$\vec{F} \circ d\vec{r} = -dU \rightarrow \vec{F} = -\text{grad}U = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right) \quad (1.41)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials  $U$  zu einer Kraft  $\vec{F}$

$$\text{rot}\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\text{grad}U \quad (1.42)$$

$$\text{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} F_k \quad (1.43)$$

für eine gegebene konservative Kraft berechnet sich das Potential  $U(\vec{r})$  durch Integration längs eines beliebigen Weges mit Endpunkt  $\vec{r}$

$$-dU = \vec{F} \circ d\vec{r} \quad (1.44)$$

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \circ \vec{F}(\vec{r}') \quad (1.45)$$

Zentralkräfte, allg. Form  $\vec{F} = F(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\hat{r}$  nicht unbedingt konservativ. ohne Beweis: Zentralkraft  $\vec{F}$  konservativ  $\Leftrightarrow \vec{F} = F(r)\hat{r}$

weiter gilt: eine konservative Kraft ist genau dann eine Zentralkraft, wenn das Potential nur vom Abstand abhängt:

$$U(\vec{r}) = U(r) \quad (1.46)$$



**Gravitationspotential - Planetenbewegung** Gravitationskraft:

$$\vec{F}_G = -G \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad (1.47)$$

zugehöriges Potential:

$$U_G = -G \frac{mM}{r} \quad (1.48)$$

$G$  = Graviationskonst.,  $\vec{r}$  Ort der Masse  $m$

Ursprung, Kraftzentrum: Masse  $M$

Betrachten nun Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationspotential Zentralpotential bzw. Kons. Zentralkraft

$$E = T + U_G = \text{const.} \quad (1.49)$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{const.} \quad (1.50)$$

Bewegung erfolgt in Ebene  $\perp \vec{L}$  Wähle Zylinder Koord.  $\vec{L} \parallel \hat{z}$

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} \quad (1.51)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} \quad (1.52)$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}} \circ \dot{\vec{r}}) = (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) \frac{m}{2} \quad (1.53)$$

$$\vec{L} = m \rho^2 \dot{\varphi} \hat{z} =: L \hat{z} \quad (1.54)$$

$$E = T + U_G(\rho) = \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} + U_G(\rho) \quad (1.55)$$

$$U_{eff}(\rho) := \frac{L^2}{2m\rho^2} + U_G(\rho) \quad (1.56)$$

formaler Lösungsansatz für 1-dim Problem:

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(\rho))} \quad (1.57)$$

$$\int_{t_0}^t dt' = \int_{\rho_0=\rho(t_0)}^{\rho=\rho(t)} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{m}E - U_{eff}(\rho')}} \quad (1.58)$$

daraus  $\rho(t)$ ,  $\varphi(t)$  aus  $m\rho(t)^2\dot{\varphi} = L$

Alternativ  $\rho(\varphi)$

$$\frac{\varphi}{\rho} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\rho} \quad (1.59)$$